Roma la Sapienza - Roma Tor Vergata - Roma Tre - Progetto Olimpiadi della Matematica

Roma, 14 Marzo 2019 - Università di Roma Tor Vergata

Gara a Squadre di Secondo Livello - XII Edizione

(valevole per l'accesso alla fase nazionale di Cesenatico)

Con il supporto di: **Piano Lauree Scientifiche, Unione Matematica Italiana**

Problemi a cura di (in ordine alfabetico): E. Callegari, L. Ferrigno, G. Marini, R. Peirone, P. Perfetti, A. Rapagnetta, A. Sgueglia, R. Tauraso, R. Vacca

1. Quanti sono gli anagrammi di **MATEMATICO** che iniziano con **MATTO** e le cui ultime due lettere sono vocali?

2. Sommando tutti i numeri ottenuti anagrammando le cifre di 1126 (compreso 1126) si ottiene il valore S. Quanto vale $\frac{S}{10}$?

3. Tracciando una delle due diagonali di un trapezio, questo rimane diviso in due parti di area 946 e 903. Tracciando anche l'altra diagonale le parti diventano 4. Qual è l'area della parte più grande tra le quattro?

4. Tra tutti i divisori di un numero naturale N, chiamiamo *divisori massimali* quei divisori d per cui d e $\frac{N}{d}$ hanno massimo comun divisore 1. In particolare anche 1 e N sono divisori massimali di N. Dire quanti sono i divisori massimali di 30!, cioè di $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

5. Consideriamo la piramide $ABCDV$ di base $ABCD$, quadrata di lato $AB = 90$ cm, e vertice V, con $VA = VB = VC = VD = \sqrt{7650}$ cm. Sia P il punto sulla faccia $ABCD$ che dista 20 cm dal lato AB e 40 cm dal lato BC. Quanto vale la somma delle distanze (in cm) del punto P dai piani su cui giacciono le facce della piramide?

6. Sia ABC un triangolo rettangolo in A, con un cateto lungo 6 e con le mediane relative agli altri due lati che siano tra loro ortogonali. Le mediane uscenti rispettivamente da A, B e C, se prolungate, intersecano la circonferenza circoscritta ad ABC in L, M e N.
Calcolare il quadrato della somma delle aree dei triangoli ABN, BCL e CAM.

7. Trovare la somma delle soluzioni reali dell'equazione:

$$x^6 + 661x^4 - 2019x^3 - 661x^2 - 1 = 0$$

8. Trovare, se esiste, il più piccolo intero positivo n tale che il numero dei suoi divisori è un terzo del numero di divisori di n^2. Se non esistesse dare come risposta 0. (Si ricordi che tra i divisori di un numero vanno contati anche 1 e il numero stesso)

9. Nel triangolo acutangolo ABC si tracciano le altezze AP, BQ e CR. Se $\widehat{BAC} = 71°$, quanto vale, in gradi, $\widehat{QPR}$? (Se si ritiene che i dati siano insufficienti, dare come risposta 0)

10. La media dei valori minimi dei sottoinsiemi non vuoti dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ è un numero razionale. Quanto vale la somma del numeratore e del denominatore di tale frazione ridotta ai minimi termini?

11. Data $f(x) = \dfrac{252 + |x - 97| - |x - 349|}{2}$ dire quante sono le soluzioni intere positive dell'equazione $f(f(f(f(x)))) = 0$ che hanno meno di 5 cifre e non soddisfano l'equazione $f(f(f(x))) = 0$.

12. La griglia in figura è composta da 23 caselle 1×1 e viene completamente ricoperta, senza sovrapposizioni, usando tessere 1×1, 2×1 e 1×2. In quanti modi diversi si può farlo? (indicare come risposta le ultime 4 cifre del risultato)

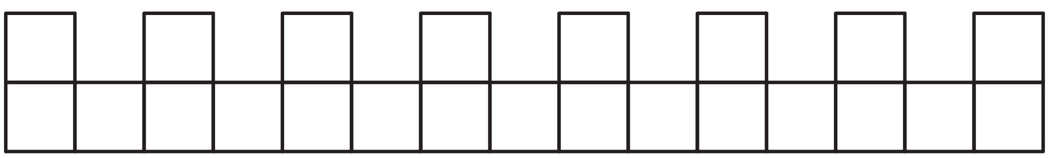

figura 1

13. Calcolare la somma dei quadrati dei reciproci di tutti i divisori di 72, comprendendo tra i divisori anche 1 e 72. (una volta espresso il risultato come una frazione $\frac{a}{b}$ ridotta ai minimi termini, dare come risposta le ultime quattro cifre di $a+b$)

14. Calcolare $\frac{a_{2017}}{a_{2019}}+\frac{a_{2017}}{a_{2018}}$, sapendo che $a_0=a_1=a_2=a_3=1$ e inoltre che per $n\geq 4$ si ha $a_n=\frac{a_{n-1}\cdot a_{n-3}}{a_{n-3}+a_{n-4}}$. (il risultato è un numero intero di cui si chiede di indicare, come risposta, le ultime 4 cifre)

15. Sia $R(x)$ il resto della divisone del polinomio $P(x)=1+4x+9x^2+16x^3+\ldots+400x^{19}$ per il polinomio $Q(x)=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$. Quali sono le ultime quattro cifre del numero $R(2)$?

16. In una tabella 20×20 le caselle sono numerate da 1 a 400. Definiamo la *distanza tra due caselle* come il minimo numero di salti tra caselle contigue (cioè con un lato in comune) che bisogna fare per passare da una all'altra. In quanti modi diversi posso scegliere due numeri da 1 a 400 in modo che la distanza tra le corrispondenti caselle sia 18?

17. Un prisma a base esagonale ha le facce numerate da 1 a 8. In quanti modi posso colorare le facce di tale prisma usando al più i colori rosso, giallo, verde, blu e bianco in modo che le facce con uno spigolo in comune abbiano colori diversi?

18. Le caselle di una tabella 6×6 sono numerate da 1 a 36. In quanti modi posso scegliere 3 numeri distinti da 1 a 36, in modo che le tre corrispondenti caselle della tabella non abbiano lati in comune?

19. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso. Le rette AB e CD si intersecano in P mentre le rette BC e DA si intersecano in Q. Se $|AB|=7$, $|AD|=15$, $|AQ|=9$ e la diagonale AC biseca l'angolo DAB allora $|AP|$ è un numero razionale. Quanto vale la somma del numeratore e del denominatore di tale frazione ridotta ai minimi termini?

20. In quanti modi possiamo riordinare la sequenza $1,2,3,4,5,6,7$ in $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$ in modo che $a_{k+1}-a_k\neq 1$ per $k=1,2,3,4,5,6$?

(a gara finita)

Informazioni Utili

- **Risultati, Statistiche e Video con i problemi risolti:** I risultati dei problemi, le statistiche della gara e i video con gli svolgimenti dettagliati di alcuni problemi saranno pubblicati la sera del **18 Marzo 2019** su **www.problemisvolti.it**.

- **Preparazione per Cesenatico:** In preparazione alla finale nazionale di Cesenatico, l'Università di Roma *Tor Vergata* organizza la **Disfida Matematica "Urbi et Orbi"**, quest'anno già alla 9^a edizione. La gara si svolgerà on line il giorno **8 Aprile 2019** attraverso il sito **www.phiquadro.it**. Tale gara sarà anche la gara conclusiva dello **Stage Olimpico "Urbi et Orbi"**, uno stage composto da 10 gare a squadre a tema, ciascuna su un argomento specifico di interesse per le gare di matematica. La pagina dello stage è **http://www.problemisvolti.it/StageOlimpiadiMatematica.html**

Risposte

		risultato
Problema 1	:	36
Problema 2	:	3333
Problema 3	:	484
Problema 4	:	1024
Problema 5	:	144
Problema 6	:	1352
Problema 7	:	3
Problema 8	:	144
Problema 9	:	38
Problema 10	:	3059
Problema 11	:	9708
Problema 12	:	1728
Problema 13	:	2919
Problema 14	:	3602
Problema 15	:	8657
Problema 16	:	3378
Problema 17	:	4980
Problema 18	:	5248
Problema 19	:	326
Problema 20	:	2119