Università di Roma Tor Vergata - Facoltà di ingegneria

Corso di Analisi Matematica II per ingegneria Gestionale

Docente prima parte: **Emanuele Callegari** (Univ. di Roma *Tor Vergata*) - Sito di riferimento per il materiale: www.problemisvolti.it

7 Ottobre 2013

Lezione 4: SERIE NUMERICHE (IV parte)

SERIE CON TERMINI DI SEGNO QUALSIASI

$\boxed{\text{CRITERIO DI CAUCHY}}$

Data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ allora essa converge se e solo se

(1) $$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \text{t.c.} \ \forall k \in \mathbb{N} \ (\text{con } k \geq 1) \ \left| \sum_{i=n_0+1}^{n_0+k} a_i \right| \leq \varepsilon}$$

$\boxed{\text{Oss.}}$ La condizione (1) è equivalente alla seguente

(2) $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ con } n_0 \le n < m \quad \left| \sum_{i=n+1}^{m} a_i \right| \le \varepsilon \quad \cancel{2\varepsilon}}$

$$\left| \sum_{i=n+1}^{m} a_i \right| = \left| \sum_{i=n_0+1}^{m} a_i - \sum_{i=n_0+1}^{n} a_i \right| \le \left| \sum_{i=n_0+1}^{m} a_i \right| + \left| - \sum_{i=n_0+1}^{n} a_i \right| \le 2\varepsilon$$

$\boxed{\text{Dim}}$ (2) $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ con } n_0 \le n < m \quad \left| S_m - S_n \right| \le \varepsilon}_{(1)}$

$$S_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$$

$$\boxed{(S_n) \text{ converge a un lim. finito}} \iff (S_n) \text{ è di Cauchy}$$

$$\iff \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge}}$$

CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA

Data $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, se $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge allora converge anche la serie data.

Osservazione

Il criterio NON DICE che se $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ diverge allora anche $\sum a_n$ diverge.

Esempio $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge ma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

$\boxed{\text{Dim}}$ (1) $\sum |a_n|$ converge (2) $\sum a_n$ converge

(1') $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall k \in \mathbb{N}$ si ha $\underbrace{\left| \sum_{i=n_0+1}^{n_0+k} |a_i| \right| \leq \varepsilon}_{(*)}$
(con $k \geq 1$)

(2') $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall k \in \mathbb{N}$ si ha $\underbrace{\left| \sum_{i=n_0+1}^{n_0+k} a_i \right| \leq \varepsilon}_{(*)}$
(con $k \geq 1$)

$$\left| \sum_{i=n_0+1}^{n_0+k} a_i \right| \underset{\text{dis. tr.}}{\leq} \left| \sum_{i=n_0+1}^{n_0+k} |a_i| \right|$$

CRITERIO DI LEIBNIZ

Data $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$, con $a_n > 0$, tale che $a_n \to 0$ decrescendo, allora tale serie converge.

Oss.

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 + \dots + a_{2n} - a_{2n+1} + \dots$$

$\boxed{\text{Dimostrazione}}$

1) (S_{2n}) è decrescente

$$S_{2n+2} = S_{2n} \underbrace{- a_{2n+1} + a_{2n+2}}_{\leq 0} \geq S_{2n}$$

2) (S_{2n+1}) è crescente

$$S_{2n+3} = S_{2n+1} \underbrace{+ a_{2n+2} - a_{2n+3}}_{\geq 0} \geq S_{2n+1}$$

3) Sia (S_{2n}) che (S_{2n+1}) sono limitate

$$\boxed{S_{2n+1} = S_{2n} - a_{2n+1}}$$

$$S_1 \leq \dots \leq S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq \dots \leq S_0$$

4) $S_{2n} \to L_1 \in \mathbb{R}$ decrescente
$S_{2n+1} \to L_2 \in \mathbb{R}$ crescente

$\Big\}$ perché monotone e limitate

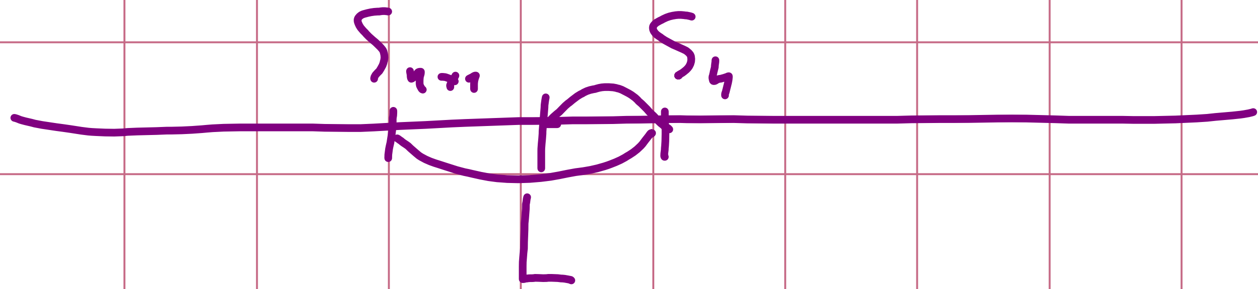
5) $L_1 = L_2$ perché:

$$\left.\begin{array}{ccccc} S_{2n+1} & = & S_{2n} & - & a_{2n+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L_2 & & L_1 & & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \underset{\nwarrow \; \nearrow}{L_1 = L_2} \quad L$$

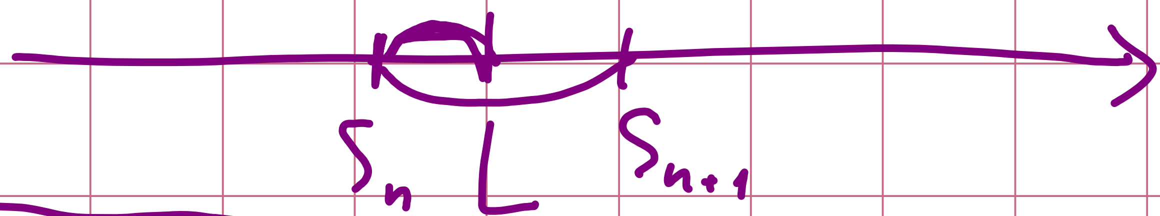
6) quindi $S_n \to L \in \mathbb{R}$, cioè $\sum (-1)^n a_n$ converge

$\boxed{\text{Osservazione}}$ $\quad \boxed{S_n} \quad \boxed{S_{n+1} = S_n + (-1)^{n+1} a_{n+1}}$

n pari



n dispari



$$\boxed{|S_n - L|} \leq |S_{n+1} - S_n| = a_{n+1}$$

$\boxed{\text{Esempio 1}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\sin \frac{1}{n}\right)^a$ $\boxed{a > 0}$

Studiare, al variare di a, convergenza semplice e assoluta della serie.

1) Convergenza assoluta.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin \frac{1}{n}\right)^a \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$$

$\underline{a > 1}$ converge

$0 < a \leq 1$ diverge.

$\boxed{\text{per } a > 1}$

2) $\boxed{\text{Conv. semplice}}$ $\boxed{\alpha > 0}$

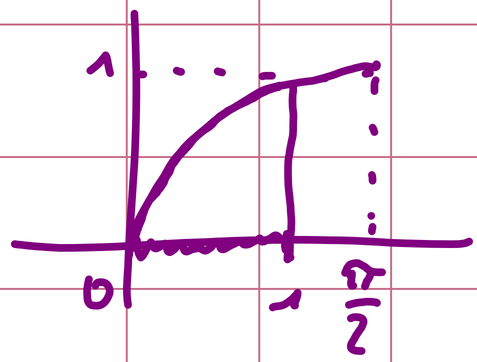
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\sin \frac{1}{n}\right)^\alpha \longleftarrow$$

qualsiasi sia $\alpha > 0$ la serie converge grazie a Leibniz

-) segno alterno SI
-) $\left(\sin \frac{1}{n}\right)^\alpha \to 0$ decrescente SI

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$$\left(\sin \frac{1}{n+1}\right)^\alpha < \left(\sin \frac{1}{n}\right)^\alpha$$



$\boxed{\text{Osserv.}}$ $\boxed{\text{Modo Sbagliato}}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n} \longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

NO

$\boxed{\text{Esempio 2}}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\sim \frac{1}{\sqrt{n}}} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cancel{(-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{n} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \text{diverge}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\boxed{\text{Converge grazie a Leibniz}}$

$\boxed{\text{Esempio 3}}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\ln n}}$$

Studiare conv. assoluta e semplice.

1) $\boxed{\text{Conv. Assoluta}}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\ln n}}$$

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\ln n}} \sim e^{\ln n} = n$$

$$\boxed{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n \ln n}} > \frac{1}{n}} \qquad \boxed{\sum \frac{1}{n} \text{ diverge}}$$

(crit. del confront.)

$$\sum \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n \ln n}} \text{ diverge}$$

1) Converg. semplice

$$\sum \frac{(-1)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n \ln n}}$$

Converge per Leibniz

$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\ln n} \to +\infty$$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$, $\quad \ln n \to +\infty$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n \ln n}} \to 0 \quad \text{decrescente}$$

$\geq 1 \quad \geq 1$

$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\ln n} < \left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{\ln(n+1)}$$

≥ 1

$\boxed{\text{Esempio 4}}$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}\right) \quad \text{diverge}}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{n^2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\cancel{\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{n^2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)\right)$$

$\boxed{\text{Modo Sbagliato}}$

$\ln(1+x) \approx x$ per $x \to 0$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}} \quad \text{converge per Leibniz}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2\sqrt[3]{n^2}}+o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)\right)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}+o\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)\right)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$ diverge

$\boxed{\text{Esempio 5}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n}$ converge

$$1 + \frac{0}{2} - \frac{1}{3} + \frac{0}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0}{6} - \frac{1}{7} + \frac{0}{8} + \dots\dots$$

$$S_{2n+1} = S_{2n+2}$$

$$S_{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sigma_n$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}}$$ converge per Leibniz