

Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 4

Titolo nota

16 marzo 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

TECNICHE DI INTEGRAZIONE

TEO. 1 DATI $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ED $f, g \in C^1([a, b])$ ALLORA:

(1)

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

DIMO

DALLA REGOLA DELLA DERIVATA DI UN PRODOTTO SEGUE CHE:

$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

DA CUI SEGUE:

$$f'(x) g(x) = (f(x) g(x))' - f(x) g'(x)$$

POICHÉ $f, g \in C^1([a, b])$, TUTTI I TERMINI SONO CONTINUI E QUINDI INTEGRABILI, QUINDI INTEGRANDO IN AMBO I MEMBRI SI HA:

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x) g(x) dx &= \int_a^b (f(x) g(x))' dx - \int_a^b f(x) g'(x) dx = \\ &= [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx \end{aligned}$$

CHE È LA TESI.

DSS. 1 LA FORMULA (1) PERMETTE DI TRASFORMARE IL CALCOLO DI $\int f'g$ NEL CALCOLO DI $\int fg'$. OVVIAMENTE BISOGNA SCEGLIERE BENE CHI È f E CHI È g PERCHÉ IL NUOVO INTEGRALE SIA PIÙ SEMPLICE.

ES. 1

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot (-\cos x)' dx = [x \cdot (-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)' \cdot (-\cos x) dx = \\ &= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1. \end{aligned}$$

ES. 2

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = \int_0^1 x^2 \cdot (e^x)' dx = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx = e - \int_0^1 2x \cdot (e^x)' dx =$$

$$= e - [2xe^x]_0^1 + \int_0^1 2e^x dx = e - 2e + [2e^x]_0^1 = -e + 2e - 2 = e - 2$$

Oss. 2

STESSO METODO FUNZIONA PER INTEGRALI DEL TIPO:

$$\int_a^b P(x) e^{cx} dx, \int_a^b P(x) \sin(cx) dx, \int_a^b P(x) \cos(cx) dx$$

DOVE $P(x)$ È UN POLINOMIO

Es. 3

$$\int_1^2 \ln x dx = \int_1^2 1 \cdot \ln x dx = \int_1^2 (x)' \ln x dx = [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx = 2 \ln 2 - 1$$

Es. 4

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{2}} 8x^3 \cdot \ln^2 x dx &= \int_1^{\sqrt{2}} (2x^4)' \cdot \ln^2 x dx = [2x^4 \cdot \ln^2 x]_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} 2x^4 \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= 2 \cdot 4 \cdot (\ln \sqrt{2})^2 - \int_1^{\sqrt{2}} 4x^3 \cdot \ln x dx = \\ &= 2 \ln^2 2 - \int_1^{\sqrt{2}} (x^4)' \cdot \ln x dx = \\ &= 2 \ln^2 2 - [x^4 \cdot \ln x]_1^{\sqrt{2}} + \int_1^{\sqrt{2}} x^4 \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= 2 \ln^2 2 - 2 \ln 2 + \int_1^{\sqrt{2}} x^3 dx = \\ &= 2 \ln^2 2 - 2 \ln 2 + \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^{\sqrt{2}} = 2 \ln^2 2 - 2 \ln 2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Oss 3

STESSO METODO FUNZIONA PER $\int_a^b P(x) \cdot \ln^n x dx$

Es. 5

$$\begin{aligned} \int_0^1 4x^3 \cdot \arctan x dx &= \int_0^1 (x^4)' \arctan x dx = [x^4 \arctan x]_0^1 - \int_0^1 x^4 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^4 + \overbrace{x^2 - x^2}^0 - 1 + 1}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^4 + x^2}{1+x^2} - \frac{x^2 + 1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= \cancel{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + 1 - \left[\arctan x\right]_0^1 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

OSS. 4 CON LO STESSO METODO, $\int_a^b P(x) \arctan x dx$ PUÒ ESSERE RICONDOTTO AL CALCOLO

$$\text{DI } \int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx \quad \text{O} \quad \int_a^b \frac{x}{1+x^2} dx.$$

ES. 6

$$\int_0^\pi e^x \cdot \sin x dx = \int_0^\pi (e^x)' \sin x dx = [e^x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x dx =$$

$$= 0 - \int_0^\pi (e^x)' \cos x dx = -[e^x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi e^x (-\sin x) dx =$$

$$= e^\pi + 1 - \int_0^\pi e^x \sin x dx$$

QUINDI, DETTO $I = \int_0^\pi e^x \cdot \sin x dx$, ABBIAMO OTTENUTO CHE:

$$I = e^\pi + 1 - I$$

CIOÈ:

$$I = \frac{e^\pi + 1}{2}$$

OSS. 5 STESSO METODO FUNZIONA CON:

$$\int_a^b e^{\alpha x} \sin(\beta x) dx \quad \int_a^b e^{\alpha x} \cos(\beta x) dx \quad \int_a^b \sin(\alpha x) \cos(\beta x) dx$$

TEO. 2 DATI $f \in C([A, B])$ E $\varphi: [a, b] \rightarrow [A, B]$ DI CLASSE C^1 , SIANO $\varphi(a) = a \in [A, B]$ E $\varphi(b) = b \in [A, B]$. ALLORA SI HA:

(2)

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

DIMO

PRESO UN QUALSIASI $x_0 \in [A, B]$ DEFINIAMO LA FUNZIONE INTEGRALE $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$.

PER IL T.F.C.I. SAPPIAMO CHE $F(x)$ È PRIMITIVA DI $f(x)$. DI CONSEGUENZA:

$$\left(F(\varphi(t)) \right)' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

QUINDI $F(\varphi(t))$ È UNA PRIMITIVA DI $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$.

QUINDI.

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \left[F(\varphi(t)) \right]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = F(b) - F(a)$$

MA SI HA ANCHE:

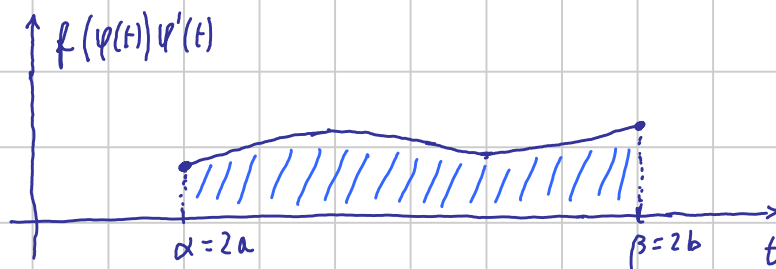
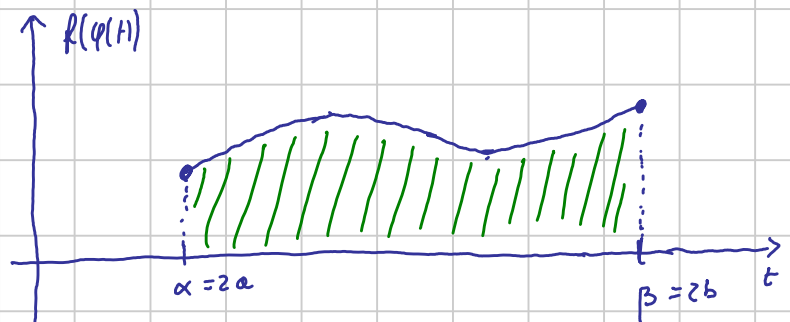
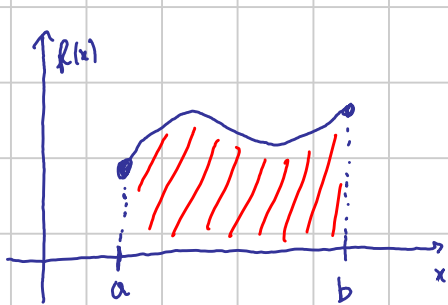
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

QUINDI VALE LA (2).

Oss. 6 È UTILE CONVINCERSI DELLA NECESSITÀ DELLA PRESENZA DI $\varphi'(t)$ NELLA (2)

PENSANDO AL CASO PARTICOLARE IN CUI φ È LINEARE. AD ESEMPIO PRENDIAMO:

$\varphi: t \mapsto \frac{1}{2}t$, NEL QUAL CASO $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ VIENE INTEGRATA SU $[2a, 2b]$.



IL GRAFICO DI $f(\varphi(t))$ SI OTTIENE DA QUELLO DI $f(x)$ RADDOPPIANDO LE ASCISSE. AFFINCHÉ L'INTEGRALE NON CAMBI BISOGNA QUINDI DIMEZZARE LE ORDINATE, CIOÈ MOLTIPLICARE LA FUNZIONE PER $\varphi'(t)$. QUESTO FATTO È EVIDENZIATO NELLE FIGURE.

OSS. 7

LA (2) PUÒ ESSERE USATA IN ENTRAMBE LE DIREZIONI, COME CHIARISCE BENE L'ESEMPIO 7, QUI DI SEGUITO.

ES. 7

CALCOLARE $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$

I° MODO

PRENDO $\varphi: [1, 2] \rightarrow [1, 4]$. SI HA:
 $t \mapsto t^2$

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx &= \int_1^2 \frac{1}{t^2+\sqrt{t^2}} (t^2)' dt = \int_1^2 \frac{1}{t^2+1} \cdot 2t dt = \\ &= \int_1^2 \frac{2}{t+1} dt = \left[2 \ln(1+t) \right]_1^2 = 2 \ln 3 - 2 \ln 2 = 2 \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

II° MODO

PER CAPIRE MEGLIO CHE STIAMO USANDO (2) ALLA ROVESCIA, CAMBIAMO IL NOME DELLA VARIABILE DI PARTENZA E MANIPOLIAMO LA FUNZIONE INTEGRANDA:

$$\int_1^4 \frac{1}{t+\sqrt{t}} dt = \int_1^4 \frac{1}{(\sqrt{t}+1)\sqrt{t}} dt = \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{t}+1} \cdot \boxed{\frac{1}{2\sqrt{t}}} dt =$$

C'È SCRITTA LA STESSA COSA

PONENDO $\varphi: [1, 4] \rightarrow [2, 3]$
 $t \mapsto \sqrt{t}+1$

E USANDO (2) AL CONTRARIO

$$\begin{aligned} &= \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{t}+1} (\sqrt{t}+1)' dt = \\ &= \int_2^3 \frac{2}{x} dx = \left[2 \ln x \right]_2^3 = 2 \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

ES. 8

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

PRENDO $\varphi: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, 1]$
 $t \mapsto \sin t$

PERCHÉ
 CONT 30

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos 2t dt = \\ &= \frac{\pi}{4} + \left[\frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

OSS. 8

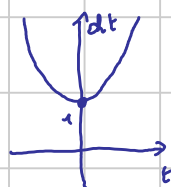
PER LO SVOLGIMENTO DELL'ESEMPIO 9 DOBBIAMO INTRODURRE LE FUNZIONI IPERBOLICHE. DEFINIAMO:

SENO IPERBOLICO

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

COSENO IPERBOLICO

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$



VALGONO LE PROPRIETÀ:

(3)

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$$

(4)

$$(\operatorname{ch} t)' = \operatorname{sh} t$$

(5)

$$(\operatorname{sh} t)' = \operatorname{ch} t$$

$$\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2 - e^{2t} - e^{-2t} + 2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$(\operatorname{ch} t)' = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)' = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \operatorname{sh} t$$

$$(\operatorname{sh} t)' = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)' = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \operatorname{ch} t$$

INOLTRE:

(6)

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sh} t = x_0 \Leftrightarrow t = \ln(x_0 + \sqrt{x_0^2 + 1})$$

(7)

$$\forall x_0 \geq 1 \quad \operatorname{ch} t = x_0 \Leftrightarrow t = \ln(x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - 1})$$

PER MOSTRARE (6) SI OSSERVI CHE:

$$\operatorname{sh} t = x_0 \Leftrightarrow \frac{e^t - e^{-t}}{2} = x_0 \Leftrightarrow e^{2t} - 2x_0 e^t - 1 \Leftrightarrow e^t = x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + 1} \Leftrightarrow t = \ln(x_0 + \sqrt{x_0^2 + 1})$$

PER MOSTRARE (7):

$$\operatorname{ch} t = x_0 \Leftrightarrow \frac{e^t + e^{-t}}{2} = x_0 \Leftrightarrow e^{2t} - 2x_0 e^t + 1 \Leftrightarrow e^t = x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - 1} \Leftrightarrow t = \ln(x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - 1})$$

VA BENE SOLO "+"
PERCHÉ $e^t > 0$

VA BENE SIA "+" CHE "-" PERCHÉ, PER $x_0 \geq 1$
IL SECONDO MEMBRO È SEMPRE DEFINITO E POSITIVO

PERCHÉ $\operatorname{sh} t > 0$ PER $t > 0$

ES.9

$$\int_{\frac{13}{12}}^{\frac{5}{4}} \sqrt{x^2 - 1} \, dx = \int_{\ln \frac{3}{2}}^{\ln 2} \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} \cdot \operatorname{sh} t \, dt = \int_{\ln \frac{3}{2}}^{\ln 2} \sqrt{\operatorname{sh}^2 t} \cdot \operatorname{sh} t \, dt = \int_{\ln \frac{3}{2}}^{\ln 2} \operatorname{sh}^2 t \, dt =$$

PRENDO $\varphi(t) = \operatorname{ch}(t)$
SCEGLIENDO IL RAMO $t \geq 0$.
DA (4) SEGUE CHE:

$$\operatorname{ch} t = \frac{13}{12} \Leftrightarrow t = \ln \frac{3}{2}$$

$$\operatorname{ch} t = \frac{5}{4} \Leftrightarrow t = \ln 2$$

$$= \int_{\ln \frac{3}{2}}^{\ln 2} \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{4} \int_{\ln \frac{3}{2}}^{\ln 2} (e^{2t} + e^{-2t} - 2) dt =$$

$$= \left[\frac{e^{2t}}{8}\right]_{\ln \frac{3}{2}}^{\ln 2} - \left[\frac{e^{-2t}}{8}\right]_{\ln \frac{3}{2}}^{\ln 2} - \frac{1}{2}(t)_{\ln \frac{3}{2}}^{\ln 2} =$$

$$= \frac{1}{8}\left(4 - \frac{9}{4}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4} - \frac{4}{9}\right) - \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3} = \dots = \frac{35}{144} - \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$$

ES.10

$$\int_{\frac{5}{12}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx = \int_{\ln \frac{3}{2}}^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1}} (\operatorname{sh} t)' \, dt = \int_{\ln \frac{3}{2}}^{\ln 2} \frac{\operatorname{ch} t}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t}} \, dt = \int_{\ln \frac{3}{2}}^{\ln 2} 1 \, dt = \ln \frac{4}{3}$$

PRENDO $\varphi(t) = \operatorname{sh} t$,
DA (6) SEGUE CHE

$$\operatorname{sh} t = \frac{5}{12} \Leftrightarrow t = \ln \frac{3}{2}$$

$$\operatorname{sh} t = \frac{3}{4} \Leftrightarrow t = \ln 2$$

PERCHÉ $\operatorname{ch} t > 0$