

Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 6

Titolo nota

20 marzo 2020 (9.00-11.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

OSS.1 DATI $f \in C([a,b])$ E $x_0 \in (a,b)$, DETTA $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$, SAPPIAMO (PER IL T.F.C.I.)

CHE $F \in C^1((a,b))$. CI CHIEDIAMO QUALE SIA IL COMPORTAMENTO DI $F(x)$ PER $x \rightarrow a^+$ E $x \rightarrow b^-$.

È UTILE VEDERE PRIMA IL SEGUENTE ESEMPIO:

ES.1 DATA $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ SIA $F(x) = \int_1^x f(t) dt$. DIRE SE ESISTONO E SE SONO FINITI
 $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$

I LIMITI:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$$

COMINCIAMO DA (1).

OSSERVIAMO CHE f È LIPSCITZIANA SU $(0, +\infty)$ PERCHÉ, PER OGNI $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$

SI HA:

$$\begin{aligned} |F(x_2) - F(x_1)| &= \left| \int_1^{x_2} \sin \frac{1}{t} dt - \int_1^{x_1} \sin \frac{1}{t} dt \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} \sin \frac{1}{t} dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_1}^{x_2} \left| \sin \frac{1}{t} \right| dt \right| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} 1 dt \right| = |x_2 - x_1| \end{aligned}$$

MA ALLORA f È UNIFORMEMENTE CONTINUA E QUINDI PUÒ ESSERE ESTESA
(CON CONTINUITÀ AL BORDO DI $(0, +\infty)$, CIOÈ PER $x=0$ (GRAZIE AL TED.1 CHE
VEDIAMO TRA UN ATTIMO)).

CIO' SIGNIFICA CHE $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ ESISTE FINITO.

PASSIAMO A (2).

PER $0 < \alpha \leq 1$ SI HA $\sin \alpha \geq \frac{\alpha}{2}$, QUINDI PER $t \geq 1$ SI HA $\sin \frac{1}{t} \geq \frac{1}{2t}$,

QUINDI:

$$F(x) = \int_1^x \sin \frac{1}{t} dt \geq \int_1^x \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} [\ln t]_1^x = \frac{1}{2} \ln x$$

SICCOME $\frac{1}{2} \ln x \rightarrow +\infty$ PER $x \rightarrow +\infty$, PER IL T. DEL CONFRONTO ANCHE $F(x) \rightarrow +\infty$.

TEO.1 SIANO $A \subset \mathbb{R}$, x_0 DI ACCUMULAZIONE PER A ED $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ UNIF. CONTINUA. ALLORA $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ESISTE FINITO.

DIMO

SE $x_0 \in A$ NON C'È NIENTE DA DIMOSTRARE SE $x_0 \notin A$ PRENDIAMO (x_n) A VALORI IN A TALE CHE $x_n \rightarrow x_0$. MOSTRIAMO CHE $(f(x_n))$ È DI CAUCHY, CIOÈ CHE:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } n, m \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$$

A TALE SCOPO, $\forall \varepsilon > 0$ PRENDIAMO $\delta > 0$ TALE CHE $\bar{x}, \tilde{x} \in A$ E $|\bar{x} - \tilde{x}| < \delta \Rightarrow |f(\bar{x}) - f(\tilde{x})| < \varepsilon$ (POSSIAMO FARLO PERCHÉ f È UNIF. CONTINUA SU A).

A QUESTO PUNTO PRENDIAMO $n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE PER $n \geq n_0$ SI ABBIÀ $|x_n - x_0| < \frac{\delta}{2}$ (POSSIAMO FARLO PERCHÉ $x_n \rightarrow x_0$).

ALLORA PER OGNI $n, m \geq n_0$ SI HA:

$$|x_n - x_m| = |x_n - x_0 + x_0 - x_m| \leq |x_n - x_0| + |x_m - x_0| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

QUINDI SI HA ANCHE:

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$$

MA ALLORA $(f(x_n))$ È DI CAUCHY E QUINDI HA LIMITE FINITO.

QUINDI, SE PRENDO (x_n) A VALORI IN A T.C. $x_n \rightarrow x_0$, SI HA CHE $(f(x_n))$ HA LIMITE FINITO.

RIMANE DA DIMOSTRARE CHE SE PRENDO DUE DISTINTE SUCCESSIONI (x_n) E (y_n) A VALORI IN A , ENTRAMBE CHE TENDANO A x_0 , ALLORA $f(x_n)$ E $f(y_n)$ TENDONO ALLO STESSO LIMITE.

MA QUESTO È OVVIO, PERCHÉ DETTA (t_n) LA SUCCESSIONE DEFINITA DA:

$$t_n = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{SE } n \text{ È DISPARI} \\ y_{\frac{n}{2}} & \text{SE } n \text{ È PARI} \end{cases}$$

SI HA CHE $t_n \rightarrow x_0$ E QUINDI $(f(t_n))$ HA LIMITE FINITO, DUNQUE $(f(x_n))$ E $(f(y_n))$ HANNO LO STESSO LIMITE PERCHÉ ENTRAMBE SOTTOSUCCESSIONI DI $(f(t_n))$. QUINDI ESISTE $l \in \mathbb{R}$ TALE CHE $((x_n) \subset A \text{ E } x_n \rightarrow x_0) \Rightarrow f(x_n) \rightarrow l$.

SAPPIAMO CHE QUESTO EQUIVALE AD DIRE CHE $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

OSS. 2

PROCEDENDO IN MODO ANALOGO AL PUNTO (1) DELL'ESEMPIO 1, SI DIMOSTRA CHE SE (a, b) , x_0 , f ED F SONO COME NELL'OSSERVAZIONE 1, ED INOLTRE (a, b) ED f SONO LIMITATI, ALLORA ESISTONO FINITI $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ E $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$.

OSS. 3

CONSIDERIAMO FUNZIONI INTEGRALI DI TIPO PIÙ GENERALE.

DATI $f \in C((A, B))$ E $g, h: (a, b) \rightarrow (A, B)$ DI CLASSE C^1 , PER OGNI $x \in (a, b)$ È BEN DEFINITA:

$$G(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$$

INOLTRE $G \in C^1((a, b))$ E SI HA:

$$G'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$$

DIMO

PRESO $y_0 \in (A, B)$, DEFINIAMO:

$$F(y) = \int_{y_0}^y f(t) dt.$$

OVVIAMENTE $F \in C^1((A, B))$ ED $F' = f$.

SI HA:

$$G(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt = \int_{y_0}^{h(x)} f(t) dt - \int_{y_0}^{g(x)} f(t) dt = F(h(x)) - F(g(x))$$

QUINDI G È COMPOSIZIONE DI FUNZIONI C^1 E SI HA

$$G'(x) = F'(h(x)) \cdot h'(x) - F'(g(x))g'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$$

ES. 2

TROVARE INF E SUP, AL VARIARE DI $x > 0$, DI $G(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$.

PER OGNI $x > 0$, $G(x)$ RAPPRESENTA L'AREA

VERDE IN FIGURA. AL CRESCERE DI x ,

L'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE $[\sqrt{x}, \sqrt{x+1}]$

SI RESTRINGE, MA IL GRAFICO DI f SUDI

ESSO SI ALZA, PER CUI NON È OVVIO

STABILIRE SE $G(x)$ CRESCA O DECRESCA.

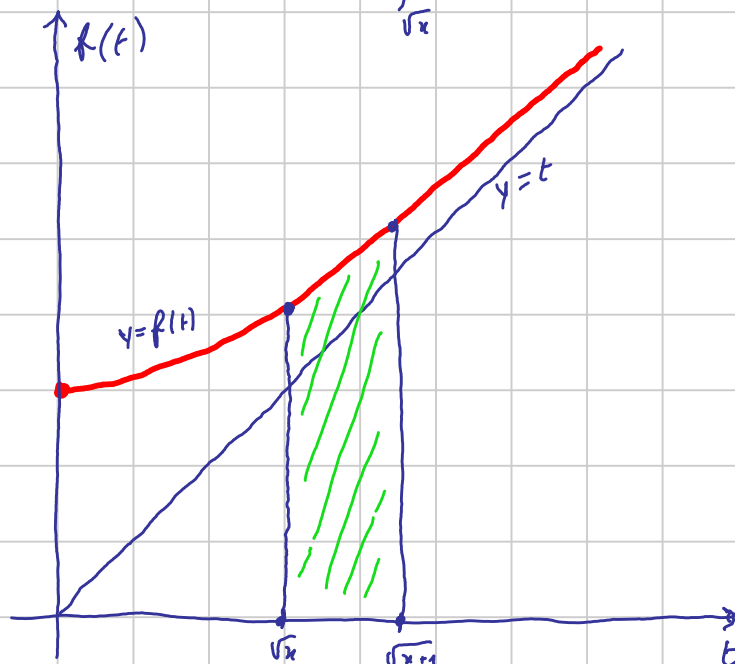
TUTTAVIA, USANDO L'OSS. 2, PER

OGNI $x > 0$ SI HA:

$$G'(x) = \sqrt{1+(\sqrt{x+1})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x+1}} - \sqrt{1+\frac{1}{x}} \right) < 0$$

QUINDI $G(x)$ È DECRESCENTE. CIÒ SIGNIFICA CHE $\sup G(x) = \max G(x) = G(0) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \dots$



MENTRE $\inf G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$.

PER CALCOLARE IL LIMITE CONVIENE RISCRIVERE MEGLIO $G(x)$:

$$G(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} (t + (\sqrt{1+t^2} - t)) dt = \underbrace{\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} t dt}_{(1)} + \underbrace{\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} (\sqrt{1+t^2} - t) dt}_{(2)}$$

$$(1) = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$$

$$(2) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2} + t} dt$$

PERCHÉ LA FUNZIONE
INTEGRANDA È DECRESCENTE

MOSTRIAMO CHE $(2) \rightarrow 0$ PER $x \rightarrow +\infty$.

SI HA:

$$0 \leq \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2} + t} dt \leq \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} dt = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \cdot \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} 1 dt = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2}$$

QUINDI $(2) \rightarrow 0$ PERCHÉ $\frac{1}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2} \rightarrow 0$.

POSSIAMO QUINDI CONCLUDERE CHE $G(x) \rightarrow \frac{1}{2}$ PER $x \rightarrow +\infty$.

QUINDI $\inf(G(x)) = \frac{1}{2}$.

PUÒ ESSERE
ANCHE $b = +\infty$

INTEGRALE IN SENSO IMPROPRIO

DEF. 1

DATI $[a, b) \subset \mathbb{R}$ E $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ T.C. $f \in \mathcal{R}([a, c])$ PER OGNI $c \in [a, b)$, DIREMO CHE:

1) $\int_a^b f(x) dx$ CONVERGE A $\lambda \in \mathbb{R}$ SE $\lim_{c \rightarrow b^+} \int_a^c f(x) dx = \lambda$.

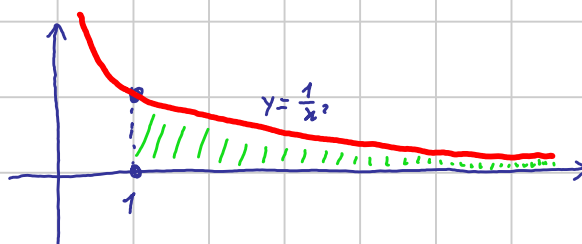
2) $\int_a^b f(x) dx$ DIVERGE A $+\infty$ SE $\lim_{c \rightarrow b^+} \int_a^c f(x) dx = +\infty$

3) $\int_a^b f(x) dx$ È INDETERMINATO SE $\lim_{c \rightarrow b^+} \int_a^c f(x) dx$ NON ESISTE

ES. 3

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ CONVERGE A 1

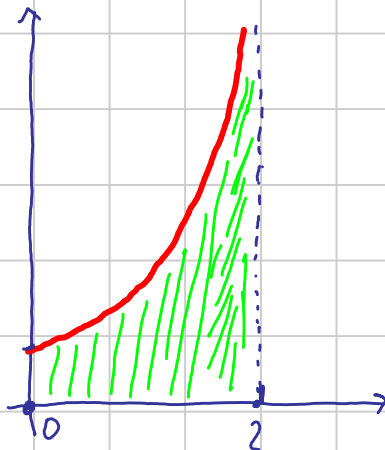
$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^c = \\ &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{c} + 1 \right) = 1 \end{aligned}$$



ES. 4

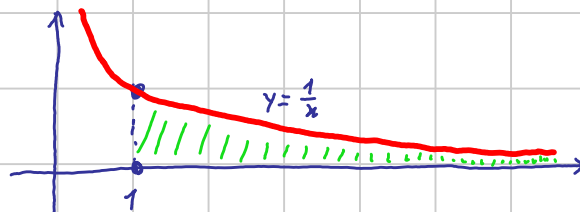
$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx \text{ CONVERGE A } 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 2^-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx &= \lim_{c \rightarrow 2^-} \left[-2\sqrt{2-x} \right]_0^c = \\ &= \lim_{c \rightarrow 2^-} \left(-2\sqrt{2-c} + 2\sqrt{2} \right) = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

**ES. 5**

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx \text{ DIVERGE A } +\infty$$

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} [\ln x]_1^c = \lim_{c \rightarrow +\infty} \ln(c) = +\infty$$

**ES. 6**

$$\int_0^{+\infty} \sin x dx \text{ È INDETERMINATO.}$$

SIA $F(x) = \int_0^x \sin t dt$ E SIANO (a_n) E (b_n) DUE SUCCESSIONI DEFINITE DA $a_n = 2\pi n$ E $b_n = \pi + 2\pi n$

ALLORA PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ SI HA:

$$F(a_n) = \int_0^{2\pi n} \sin t dt = [-\cos t]_0^{2\pi n} = -\cos 2\pi n + \cos 0 = -1 + 1 = 0$$

$$F(b_n) = \int_0^{\pi + 2\pi n} \sin t dt = [-\cos t]_0^{\pi + 2\pi n} = -\cos(\pi + 2\pi n) + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2$$

QUINDI PER $n \rightarrow +\infty$, SI HA $a_n \rightarrow +\infty$ E $b_n \rightarrow +\infty$ MA $F(a_n) \rightarrow 0$ E $F(b_n) \rightarrow 2$.

QUINDI $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ NON ESISTE ALTRIMENTI $F(a_n)$ E $F(b_n)$ DOVREBBERO AVERE LO STESSO LIMITE.

QUINDI $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ È INDETERMINATO.