

Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 7

Titolo nota

23 marzo 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

INTEGRALI IMPROPRI (...CONTINUA)

OSS.1 (CON RIFERIMENTO ALLA DEF.1 DELLA LEZ. PRECEDENTE)

IL "CARATTERE" DI UN INTEGRALE IMPROPRIO NON CAMBIA SPOSTANDO L'ESTREMO "BUONO".
PIÙ PRECISAMENTE, SIA $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ T.C. $\forall c \in [a, b) \quad f \in \mathcal{R}([a, c])$ ALLORA,
COMUNQUE SI PRENDA $a' \in [a, b)$, SI HA:

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^{a'} f(x) dx + \int_{a'}^c f(x) dx = \int_a^{a'} f(x) dx + \lim_{c \rightarrow b^-} \int_{a'}^c f(x) dx$$

QUINDI:

$\square$ ESISTE FINITA $\Leftrightarrow$ $\square$ ESISTE FINITO

$= +\infty (-\infty) \Leftrightarrow = +\infty (-\infty)$

NON ESISTE $\Leftrightarrow$ NON ESISTE

CIÒ SIGNIFICA CHE IL CARATTERE DI $\int_a^b f(x) dx$ E DI $\int_{a'}^b f(x) dx$ È LO STESSO.

QUESTO FATTO È UTILE PERCHÉ SPESSO, PER STUDIARE LA CONVERGENZA DI UN INTEGRALE, CI CAPITA DI DOVER FARE CALCOLI E STIME CHE NON VALGONO SU TUTTO $[a, b)$ MA SOLO SU UN SOTTOINSIEME $[a', b)$. IL FATTO CHE IL CARATTERE DI $\int_a^b f(x) dx$ E $\int_{a'}^b f(x) dx$ SIA LO STESSO CI PERMETTE DI CONCLUDERE UGUALMENTE STUDIANDO IL SECONDO AL POSTO DEL PRIMO. LA COSA È CHIARITA NELL'ESEMPIO SUCCESSIVO.

ES.1 STUDIARE IL CARATTERE DI $\int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x} dx$.

PER GLI $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ VALE LA DISUGUAGLIANZA $\sin \alpha > \frac{\alpha}{2}$ E CI PIACEREBBE USARLA PER STIMARE DAL BASSO LA FUNZIONE INTEGRANDA SCRIVENDO:

(1) $\sin \frac{1}{x} > \frac{1}{2x}$.

FATTO CIÒ, $\int \frac{1}{2x} dx$ SI CALCOLA BENE.

IL PROBLEMA È CHE LA STIMA (1) CE L'ABBIAMO SOLO PER $x > \frac{2}{\pi}$, NON PER $x > \frac{1}{100}$.

PER FORTUNA, GRAZIE ALL' [OSS.1], INZICHÉ STUDIARE IL CARATTERE DI $\int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x} dx$, POSSIAMO STUDIARE IL CARATTERE DI $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \sin \frac{1}{x} dx$, CHE SONO UGUALI.

SI HA:

VALE PERCHÉ $x > \frac{2}{\pi}$

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \sin \frac{1}{x} dx = \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_{\frac{2}{\pi}}^C \sin \frac{1}{x} dx \geq \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_{\frac{2}{\pi}}^C \frac{1}{2x} dx = \lim_{C \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln x \right]_{\frac{2}{\pi}}^C = \lim_{C \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln C - \frac{1}{2} \ln \frac{2}{\pi} = +\infty$$

DA CUI SEGUE CHE $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \sin \frac{1}{x} dx$ DIVERGE A $+\infty$.

OSS.2 FATTI I DOVUTI CAMBIAMENTI, LA DEFINIZIONE DI INTEGRALE IMPROPRIO GIÀ DATA NEL CASO $[a, b)$ PUÒ ESSERE RISCritta PER $(a, b]$. FATTO CIÒ SIAMO PRONTI A DARE LA DEFINIZIONE NEL CASO (a, b) .

DEF.1 DATA $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ T.C. $\forall [c, d] \subset (a, b)$ SIA $f \in \mathcal{R}([c, d])$, DIREMO CHE:

1) $\int_a^b f(x) dx$ CONVERGE A $\lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists x_0 \in (a, b)$ T.C. $\int_a^{x_0} f(x) dx$ E $\int_{x_0}^b f(x) dx$ CONVERGONO RISPETTIVAMENTE A μ E ν , CON $\mu + \nu = \lambda$.

2) $\int_a^b f(x) dx$ DIVERGE A $+\infty$ ^(-∞) $\Leftrightarrow \exists x_0 \in (a, b)$ T.C. $\int_a^{x_0} f(x) dx$ E $\int_{x_0}^b f(x) dx$ DIVERGONO ENTRAMBI A $+\infty$ ^(-∞) OPPURE UNO DIVERGE A $+\infty$ E L'ALTRO CONVERGE.

3) $\int_a^b f(x) dx$ È INDETERMINATO IN OGNI ALTRO CASO.

OSS.3 C'È UN PROBLEMA DI BUONA POSITURA NELLA DEFINIZIONE 1: SI POTREBBE SUSPETTARE CHE LA SCELTA DI x_0 INFLUISCA SU CIÒ CHE PUÒ SUCCEDERE. PER FORTUNA NON È COSÌ. AD ESEMPIO SE $\int_a^b f(x) dx$ SODDISFA IL PUNTO 1) CON UN CERTO x_0 , PRENDENDO UN ALTRO $x_1 \in (a, b)$ CON $x_1 \neq x_0$ SI HA CHE:

• $\int_a^{x_1} f(x) dx$ HA STESSO CARATTERE DI $\int_a^{x_0} f(x) dx$ (PER OSS.1) QUINDI CONVERGE

• $\int_{x_1}^b f(x) dx$ CONVERGE COME $\int_{x_0}^b f(x) dx$ (STESSO MOTIVO)

$$\bullet \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^b f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx$$

PERCHÉ:

$$\int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^{x_1} f(x) dx + \lim_{s \rightarrow b^-} \int_{x_1}^s f(x) dx =$$

$$= \lim_{c \rightarrow a^+} \left(\int_c^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \right) + \lim_{s \rightarrow b^-} \int_{x_1}^s f(x) dx =$$

SI PUÒ PERCHÉ
È UNA COSTANTE

$$= \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^{x_0} f(x) dx + \lim_{s \rightarrow b^-} \left(\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^s f(x) dx \right) =$$

$$= \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^{x_0} f(x) dx + \lim_{s \rightarrow b^-} \int_{x_0}^s f(x) dx =$$

$$= \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx$$

LA VERIFICA CHE ANCHE IL PUNTO 2) NON DIPENDE DALLA SCELTA DI x_0 È DEL TUTTO ANALOGA.

ES. 2

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}} dx \text{ CONVERGE A } \pi.$$

SI HA:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}} dx = \overbrace{\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}} dx}^{(A)} + \overbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}} dx}^{(B)}$$

$$\begin{aligned} (A) &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{2}{x+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[2 \arctan \sqrt{x} \right]_c^1 \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} - 2 \arctan \sqrt{c} \right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$(B) = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}} dx = \dots = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(2 \arctan \sqrt{c} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

QUINDI L'INTEGRALE CONVERGE A π

OSS. 4

A VOLTE SI POTREBBE ESSERE TENTATI DI NON SPEZZARE L'INTEGRALE SU (a, b) IN DUE INTEGRALI, AD ESEMPIO SCRIVERE $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ CON UN SOLO LIMITE $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c f(x) dx$.

QUESTO È **SBAGLIATO**, COME MOSTRA L'ESEMPIO SEGUENTE

ES. 3

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx \text{ È INDETERMINATO.}$$

INFATTI:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \overbrace{\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2} dx}^{(A)} + \overbrace{\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx}^{(B)}$$

$$(A) = \lim_{C \rightarrow -\infty} \int_C^0 \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} dx = \lim_{C \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_C^0 = \lim_{C \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} \ln(1) - \frac{1}{2} \ln(1+C^2) \right) = -\infty$$

$$(B) = \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_0^C \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} dx = \dots = +\infty$$

SICCOME I 2 PEZZI (A) E (B) DIVERGONO A INFINITI CON SEGNO DIVERSO,
NON RICADIAMO NEL PUNTO 2) DELLA DEF. 1 MA NEL PUNTO 3).
QUINDI L'INTEGRALE DIVERGE.

SE TUTTAVIA NON SI FOSSE SPEZZATO L'INTEGRALE, SI SAREBBE OTTENUTO:

$$\lim_{C \rightarrow +\infty} \int_{-C}^C \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{C \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{-C}^C = \lim_{C \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \ln(1+C^2) - \frac{1}{2} \ln(1+C^2) \right) = 0$$

COSA CHE, **SBAGLIANDO**, SI RISCHIAVA DI INTERPRETARE COME CONVERGENZA.

TRA L'ALTRO SI OSSERVI CHE MANDANDO I 2 ESTREMI A $+\infty$ E $-\infty$ CON VELOCITA'
DIVERSE SI PUO' OTTENERE QUALSIASI RISULTATO.

AD ESEMPIO:

$$\lim_{C \rightarrow +\infty} \int_{-C}^{2C} \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{C \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{-C}^{2C} = \lim_{C \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+4C^2}{1+C^2} \right) = \frac{1}{2} \ln 4 = \ln 2$$

$$\lim_{C \rightarrow +\infty} \int_{-e^C}^C \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{C \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{-e^C}^C = \lim_{C \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+C^2}{1+e^{2C}} \right) = -\infty$$

STUDIO DELLA CONVERGENZA

OSS. 5

QUANDO L'INTEGRANDA HA SEGNO COSTANTE L'INTEGRALE IMPROPRIO
NON E' MAI INDETERMINATO. QUESTO PERCHE' LA FUNZIONE INTEGRALE RISULTA MONOTONA
E QUINDI IL LIMITE (FINITO O INFINITO) ESISTE SEMPRE.

AD ESEMPIO, SE $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ E' IN $\mathcal{R}([a, c]) \forall c \in [a, b)$ ED E' POSITIVA, ALLORA

$\int_a^c f(t) dt$ E' UNA FUNZIONE CRESCENTE NEL SECONDO ESTREMO c , VISTO CHE,

$$\text{SE } c_1 < c_2 \text{ SI HA } \int_a^{c_2} f(t) dt - \int_a^{c_1} f(t) dt = \int_{c_1}^{c_2} f(t) dt \geq 0.$$

DI CONSEGUENZA IL $\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$ ESISTE SEMPRE, FINITO O INFINITO.

QUINDI $\int_a^b f(x) dx$ PUÒ ESSERE CONVERGENTE O DIVERGENTE A $+\infty$, MA MAI INDETERMINATO.

PER QUESTO MOTIVO VEDREMO CHE CI SONO MOLTI CRITERI DI CONVERGENZA PER IL CASO IN CUI L'INTEGRANDA HA SEGNO COSTANTE, MA POCCHI PER QUANDO IL SEGNO È QUALSIASI.

TEO. 1 (CRITERIO DEL CONFRONTO)

DATE $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ T.C. $\forall c \in [a, b)$ $f, g \in \mathcal{R}([a, c])$ E $\forall x \in [a, b)$ $0 \leq g(x) \leq f(x)$.

ALLORA SI HA:

$$1) \int_a^b f(x) dx \text{ CONVERGE} \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \text{ CONVERGE}$$

$$2) \int_a^b g(x) dx \text{ DIVERGE} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ DIVERGE}$$

DIMO

ESSENDO f E g FUNZIONI POSITIVE PER CIASCUN INTEGRALE CI SONO SOLO DUE

POSSIBILITÀ: CONVERGERE O DIVERGERE. CIÒ SIGNIFICA CHE IL PUNTO 2) SEGUE SUBITO DAL PUNTO 1). BASTA QUINDI DIMOSTRARE IL PUNTO 1).

DOBBIAMO QUINDI DIMOSTRARE CHE ESISTE FINITO IL LIMITE

(2)

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c g(x) dx$$

L'ESISTENZA SEGUE DAL FATTO CHE, ESSENDO $g \geq 0$, $\int_a^c g(x) dx$ È CRESCENTE IN c .

PER MOSTRARE CHE È FINITO SI OSSERVI CHE, ESSENDO $0 \leq g \leq f$, PER OGNI $c \in [a, b)$ SI HA:

$$0 \leq \int_a^c g(x) dx \leq \int_a^c f(x) dx$$

QUINDI:

$$0 \leq \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c g(x) dx \leq \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx < +\infty$$

PERCHÉ PER IPOTESI $\int_a^b f(x) dx$ CONVERGE

QUINDI (2) È FINITO, CIÒ È $\int_a^b g(x) dx$ CONVERGE.

099.6

LE IPOTESI SI POSSONO INDEBOLIRE: LA CONDIZIONE $0 \leq g(x) \leq f(x)$ NON C'È BISOGNO CHE VALGA SU TUTTO $[a, b)$ MA BASTA CHE ESISTA $x_0 \in [a, b)$ TALE CHE LA CONDIZIONE VALGA SU $[x_0, b)$. INFATTI, VISTO CHE IL CARATTERE DI $\int_a^b f(x) dx$ È

UGUALE A QUELLO DI $\int_{x_0}^b f(x) dx$, BASTA RESTRINGERSI A $[x_0, b)$ E RAGIONARE COME PRIMA

OSS. 1 OVVIAMENTE IL TEOR. 1 SI PUÒ RISCRIVERE ANCHE PER LE FUNZIONI NEGATIVE:
BASTA SOSTITUIRE $0 \leq g(x) \leq f(x)$ CON $f(x) \leq g(x) \leq 0$.

TEOR. 2 (CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO)

DATE $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ TALI CHE $\forall c \in [a, b)$ $f, g \in \mathcal{R}([a, c])$ ED $f, g > 0$ SU $[a, b)$.

SE INOLTRE $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = C \in (0, +\infty)$ ALLORA $\int_a^b f(x) dx$ E $\int_a^b g(x) dx$ HANNO LO STESSO CARATTERE.

DIMO SICCOME $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow C$ PER $x \rightarrow b^-$, ALLORA $\exists x_0 \in [a, b)$ TALE CHE:

$$\frac{1}{2}C < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}C \quad \text{PER } x \in [x_0, b)$$

POICHÉ $g(x) > 0$, QUESTO EQUIVALE A:

$$(3) \quad \frac{1}{2}C \cdot g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}C \cdot g(x) \quad \text{PER } x \in [x_0, b)$$

QUINDI, APPLICANDO IL TEOR. 1 SULL'INTERVALLO $[x_0, b)$, POSSO DIRE CHE:

$$\int_{x_0}^b f(x) dx \text{ CONVERGE} \Rightarrow \int_{x_0}^b \frac{1}{2}C \cdot g(x) dx \text{ CONVERGE} \Rightarrow \int_{x_0}^b g(x) dx \text{ CONVERGE}$$

$$\int_{x_0}^b f(x) dx \text{ DIVERGE} \Rightarrow \int_{x_0}^b \frac{3}{2}C \cdot g(x) dx \text{ DIVERGE} \Rightarrow \int_{x_0}^b g(x) dx \text{ DIVERGE}$$

QUINDI $\int_{x_0}^b f(x) dx$ E $\int_{x_0}^b g(x) dx$ HANNO SEMPRE LO STESSO CARATTERE.

MA ALLORA ANCHE $\int_a^b f(x) dx$ E $\int_a^b g(x) dx$ HANNO LO STESSO CARATTERE.

OSS. 2 I DUE CRITERI APPENA VISTI PERMETTONO DI STUDIARE IL CARATTERE DI $\int_a^b g(x) dx$ CONFRONTANDO CON $\int_a^b f(x) dx$, IL CUI CARATTERE DEVE ESSERCI GIÀ NOTO.

PER UTILIZZARLI BENE CI SERVONO QUINDI DEGLI INTEGRALI IMPROPRI "NOTEVOLI" GIÀ NOTI, CON CUI CONFRONTARE GLI ALTRI.

NEGLI ESEMPI CHE SEGUONO NE PREPARIAMO ALCUNI.

ES. 4 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ CONVERGE PER $\alpha > 1$ E DIVERGE PER $\alpha \leq 1$.

INFATTI PER $\alpha = 1$ SI HA:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} [\ln x]_1^c = \lim_{c \rightarrow +\infty} \ln c = +\infty.$$

MENTRE PER $\alpha \neq 1$ SI HA:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_1^c = \lim_{c \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{c^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1} = \begin{cases} \alpha > 1 & = \frac{1}{\alpha-1} \\ \alpha \leq 1 & = +\infty \end{cases}$$

ES.5

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} dx$$

SI HA: ① SE $\alpha > 1$ CONVERGE $\forall \beta \in \mathbb{R}$

② SE $\alpha < 1$ DIVERGE $\forall \beta \in \mathbb{R}$

③ SE $\alpha = 1$ CONVERGE SE $\beta > 1$ E DIVERGE SE $\beta \leq 1$

[...CONTINUA PROSSIMA LEZIONE...]