# Analisi Matematica (II modulo)- Lez. 9

Titolo nota

27 marzo 2020 (9.00-11.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma *Tor Vergata*

# INT. IMPROPRI - STUDIO CONVERGENZA (... CONTINUA..)

**LEMMA 1** SIA $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ CONTINUA E PERIODICA DI PERIODO $T>0$

ALLORA :

(a) $\forall x_0\in\mathbb{R}\quad \int_{x_0}^{x_0+T} f(t)\,dt=\int_0^T f(t)\,dt$

(b) SE $\int_0^T f(t)\,dt=0$ ALLORA $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ E PERIODICA CON PERIODO $T$.

(c) SE $\int_0^T f(t)\,dt=A\neq 0$ $F(x)=\int_0^x\left(f(t)-\frac{A}{T}\right)dt$ È PERIODICA CON PERIODO $T$.

**DIMO**

(a) $\forall x_0\in\mathbb{R}$

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(t)\,dt=\int_{x_0}^{T} f(t)\,dt+\underbrace{\int_{T}^{x_0+T} f(t)\,dt}_{}=\int_{x_0}^{T} f(t)\,dt+\underbrace{\int_0^{x_0} f(t)\,dt}_{}=\int_0^T f(t)\,dt$$

$$\int_T^{x_0+T} f(t)\,dt\underset{t=u+T}{=}\int_0^{x_0} f(u+T)\,du\underset{\text{PERIODICITÀ DI } f}{=}\int_0^{x_0} f(u)\,du$$

(b)
$$F(x+T)=\int_0^{x+T} f(t)\,dt=\int_0^x f(t)\,dt+\underbrace{\int_x^{x+T} f(t)\,dt=F(x)+\int_0^T f(t)\,dt}_{\text{GRAZIE A PUNTO (a)}}=F(x)+0=F(x)$$

(c) NOTIAMO CHE $f(t)-\frac{A}{T}$ È A MEDIA NULLA PERCHÉ:

$$\int_0^T f(t)-\frac{A}{T}\,dt=\int_0^T f(t)\,dt-\frac{A}{T}\cdot\int_0^T 1\,dt=A-\frac{A}{T}\cdot T=0$$

QUINDI BASTA APPLICARE IL PUNTO (b) USANDO $f(t)-\frac{A}{T}$ AL POSTO DI $f(t)$.

---

**TEO. 1** (GENERALIZZAZIONE DELL'ES 5 DELLA LEZ. 8)

DATE $f\in C^1([a,+\infty))$ T.C. $f(x)\to 0$ DECRESCENDO PER $x\to+\infty$, E $g\in C(\mathbb{R})$ PERIODICA DI PERIODO $T$, A MEDIA NULLA, CIOÈ T.C. $\int_0^T g(t)\,dt=0$. ALLORA $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ CONVERGE.

**DIMO**

~~SIA $F(x) = \int_0^x g(t)\,dt$. VISTO CHE $g(t)$ È A MEDIA NULLA, ANCHE $F(x)$ È PERIODICA, GRAZIE AL PUNTO (b) DEL LEMMA 1.~~

~~PRESA ORA $A = \int_0^T F(x)\,dx$ DEFINIAMO $G(x) = F(x) - \frac{A}{T}$.~~

QUINDI $G(x)$ È UNA PRIMITIVA DI $g(x)$, ~~PERIODICA E A MEDIA NULLA.~~

**ERRATA CORRIGE**

SOSTITUIRE

SIA $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$.

QUINDI:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x) g(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,G'(x)\,dx =$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \Big[ f(x) G(x) \Big]_a^c - \int_a^c f'(x)\,G(x)\,dx =$$

$$= \underbrace{\lim_{c\to+\infty} \Big( f(c)G(c) - f(a)G(a) \Big)}_{1} - \underbrace{\lim_{c\to+\infty} \int_a^c f'(x) G(x)\,dx}_{2}$$

BASTA QUINDI MOSTRARE CHE I LIMITI 1 E 2 ESISTONO FINITI.

PER 1 BASTA OSSERVARE CHE $G(x)$ È LIMITATA (PERCHÉ CONTINUA E PERIODICA) E $f(x)$ È INFINITESIMA PER $x \to +\infty$, QUINDI PER $c \to +\infty$ SI HA:

$$f(c)\cdot G(c) - f(a)\cdot G(a) \to 0 - f(a)\,G(a) = -f(a)\,G(a)$$

PER 2 INVECE, DIMOSTRARE CHE ESISTE FINITO EQUIVALE A DIMOSTRARE LA CONVERGENZA DELL'INTEGRALE:

$$\int_a^{+\infty} f'(x)\,G(x)\,dx$$

A TALE SCOPO, DETTA $B = \max\{|G(x)| \mid x \in [0,T]\}$, OSSERVIAMO CHE

(1) $$0 \leq |f'(x)\cdot G(x)| = -f'(x)\cdot |G(x)| \leq -B\cdot f'(x).$$

OSSERVIAMO ANCHE CHE:

(2) $$\int_a^{+\infty} -B\cdot f'(x)\,dx \quad \text{CONVERGE}$$

PERCHÉ:

$$\lim_{c\to+\infty} \int_a^c -B\cdot f'(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty} \Big[-Bf(x)\Big]_a^c = \lim_{c\to+\infty} \big(-B f(c) + B f(a)\big) = B f(a)$$

GRAZIE A E POSSIAMO APPLICARE IL CRIT. DEL CONFRONTO E CONCLUDERE

CHE: $$\int_a^{+\infty} |f'(x)\, G(x)|\, dx \quad \text{CONVERGE.}$$

A QUESTO PUNTO, APPLICANDO IL CRIT. DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA, OTTENGO

CHE: $$\int_a^{+\infty} f'(x)\, G(x)\, dx \quad \text{CONVERGE.}$$

E QUINDI ANCHE (2) ESISTE FINITO.

DAL FATTO CHE (1) E (2) ESISTANO FINITI SEGUE LA TESI

---

**ES.1** STUDIARE IL CARATTERE DI $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x+\sin x}\, dx$

**SVOLGIMENTO**

POSTO $f(x) = \dfrac{1}{1+x+\sin x}$ E $g(x) = \sin x$, L'INTEGRALE È DELLA FORMA RICHIESTA

PER USARE IL $\boxed{\text{TEO.1}}$ PERCHÉ:

1) $g(x) = \sin x$ È PERIODICA A MEDIA NULLA

2) $f(x) = \dfrac{1}{1+x+\sin x} \to 0$ DECRESCENDO PER $x \to +\infty$, PERCHÉ $1+x+\sin x \to +\infty$

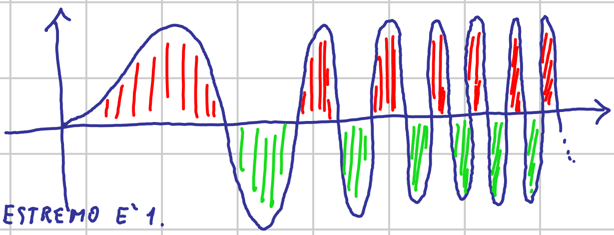
CRESCENDO.

---

# PATOLOGIE NEGLI INTEGRALI IMPROPRI

**ES.2** TROVARE $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ T.C. $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE MA $f(x) \not\to 0$ PER $x \to +\infty$.

**SVOLGIMENTO**



BASTA PRENDERE $f(x) = \sin x^2$.

OVVIAMENTE IL CARATTERE NON CAMBIA SE IL PRIMO ESTREMO È 1.

SI HA: $$\int_1^{+\infty} \sin(x^2)\, dx = \lim_{C\to+\infty} \int_1^{C} \sin(x^2)\, dx \overset{x=\sqrt{t}}{=} \lim_{C\to+\infty} \int_1^{C^2} \sin t \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}\, dx$$

BASTERÀ QUINDI MOSTRARE CHE:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\, dt \quad \text{CONVERGE.}$$

A TALE SCOPO BASTA OSSERVARE CHE $\sin t$ È PERIODICA A MEDIA NULLA E CHE

$\frac{1}{2\sqrt{t}} \to 0$ DECRESCENDO PER $t \to +\infty$. QUINDI SI PUÒ APPLICARE IL $\boxed{\text{TEO. 1}}$

---

**ES. 3** TROVARE $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ T.C. $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE MA $\forall a>0$ $f$ NON SIA LIMITATA SU $[a,+\infty)$

**SVOLGIMENTO** BASTA PRENDERE $f(x) = x \sin x^3$. IL CARATTERE NON CAMBIA SE COME PRIMO ESTREMO PRENDIAMO 1 ANZICHÈ 0. SI HA:

$$\int_1^{+\infty} x \sin x^3\,dx = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c x \sin x^3\,dx \overset{x=\sqrt[3]{t}}{=} \lim_{c \to +\infty} \int_1^{c^3} \sqrt[3]{t} \cdot \sin t \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\,dt =$$

$$= \lim_{c \to +\infty} \int_1^{c^3} \frac{\sin t}{3\sqrt[3]{t}}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{3\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

QUINDI IL CARATTERE DELL'INTEGRALE INIZIALE È LO STESSO DI:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{3\sqrt[3]{x}}\,dx$$

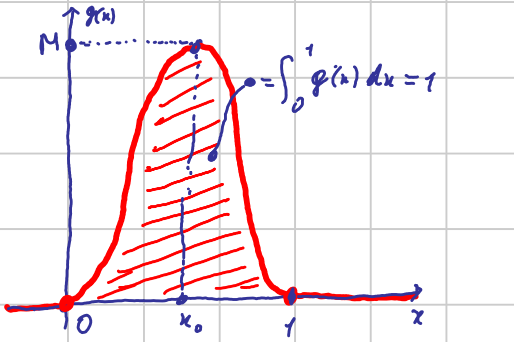
CHE CONVERGE GRAZIE AL $\boxed{\text{TEO. 1}}$.

---

**ES. 4** COME L'ES. 3 MA CON L'ULTERIORE CONDIZIONE CHE $f(x) \geq 0$ $\forall x > 0$.

PER COMINCIARE PRENDIAMO $g \in C(\mathbb{R})$ CON LE SEGUENTI CARATTERISTICHE:

1) $g(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$
2) $g(x) > 0$ SE E SOLO SE $x \in (0,1)$
3) $\int_0^1 g(x)\,dx = 1$




NON È IMPORTANTE TROVARE TALE $g$ ESPLICITAMENTE, L'IMPORTANTE È CHE TALE $g$ ESISTA. INDICHIAMO CON $M$ IL SUO MAX, CHE ESISTE SICURAMENTE PER T. WEIERSTRASS.

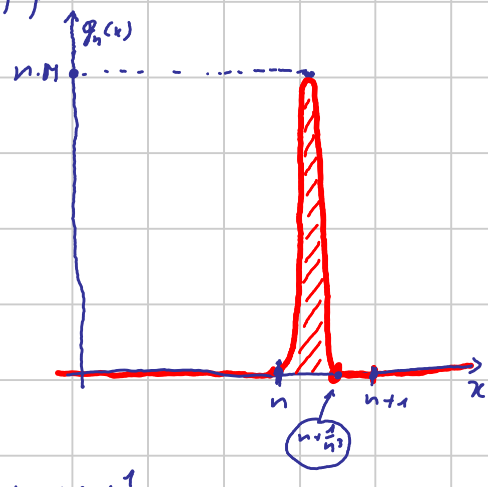
PER OGNI $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ DEFINIAMO $g_n = n\, g\left(n^3(x-n)\right)$, CHE HA LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

(a) $g_n(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

(b) $g_n(x) > 0$ SE E SOLO SE $x \in \left(n, n+\frac{1}{n^3}\right)$

(c) $\int_n^{n+1} g_n(x)\,dx = \frac{1}{n^2}$

(d) $\max\{g_n(x) \mid x \in [n,n+1]\} = n \cdot M$




(a) È OVVIA. PER MOSTRARE (b) SI OSSERVI CHE:

$$g_n(x) > 0 \iff 0 < n^3(x-n) < 1 \iff 0 < x-n < \frac{1}{n^3} \iff n < x < n+\frac{1}{n^3}$$

PER MOSTRARE (C) SI OSSERVI CHE:

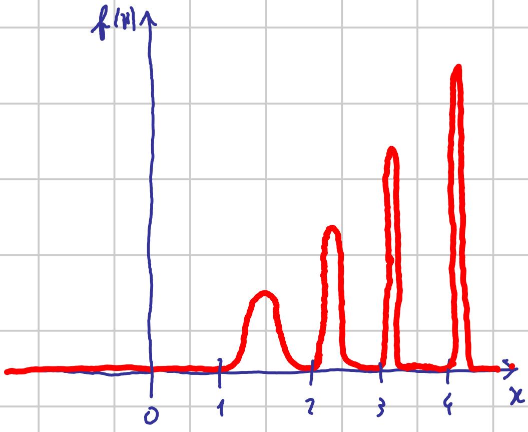
$$\int_n^{n+1} g_n(x)\,dx = \int_n^{n+\frac{1}{n^3}} g_n(x)\,dx = \int_n^{n+\frac{1}{n}} n\, g(n^3(x-n))\,dx \overset{\boxed{x=\frac{t}{n^3}+n}}{=} \int_0^1 n\, g(t)\cdot\frac{1}{n^3}\,dt = \frac{1}{n^2}\int_0^1 g(t)\,dt = \frac{1}{n^2}$$

INFINE MOSTRIAMO (d).

$$\mathrm{MAX}\left\{g_n(x)\,\middle|\, x\in[n,n+1]\right\} = \mathrm{MAX}\left\{g_n(x)\,\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\} = \mathrm{MAX}\left\{n\, g(n^3(x-n))\,\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\} = \mathrm{MAX}\left\{n\, g(y)\,\middle|\, y\in\mathbb{R}\right\} = n\cdot M$$

ORA DEFINIAMO $f$:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{PER } x<1 \\ g_n(x) & \text{PER } x\in[n,n+1) \quad \forall n\in\mathbb{N}-\{0\} \end{cases}$$




MOSTRIAMO CHE

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

CONVERGE, CIOÈ CHE ESISTE FINITO IL LIMITE:

$$\lim_{c\to+\infty}\int_0^c f(x)\,dx$$

VISTA LA POSITIVITÀ DI $f(x)$, BASTERÀ VERIFICARE CHE $\lim_{n\to+\infty}\int_0^n f(x)\,dx$ ESISTE FINITO.

SI HA:

$$\int_0^n f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} g_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} =$$

$$= 1+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k^2} \le 1+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k(k-1)} = 1+\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) =$$

$$= 1+\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cancel{\ }\cdots\cancel{\ }+\left(\cancel{\frac{1}{n-2}}-\frac{1}{n-1}\right) = 1+1-\frac{1}{n-1} < 2$$

MA ALLORA, $\lim_{n\to+\infty}\int_0^n f(x)\,dx$, CHE ESISTE PER MONOTONIA, È ANCHE FINITO.

LO STESSO VALE PER $\lim_{c\to+\infty}\int_0^c f(x)\,dx$. QUINDI $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE.

TUTTAVIA $f$ NON È LIMITATA IN ALCUNA SEMIRETTA DESTRA.

---

**ES. 5** TROVARE $f,g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ T.C. $f(x)\approx g(x)$ PER $x\to+\infty$ MA $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE MENTRE $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ DIVERGE.

**SVOLGIMENTO**

PRENDIAMO $f(x)=\frac{(-1)^{[x]}}{x}$ E $g(x)=\frac{(-1)^{[x]}}{x}+\frac{1}{x\ln x}$ SU $[4,+\infty)$

PERCHÉ $\to 0$ PER $x\to+\infty$

PER $x\to+\infty$ SI HA:

$$g(x)=\frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor}}{x}+\frac{1}{x\ln x}=\frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor}}{x}\left(1+\boxed{\frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor}}{\ln x}}\right)\approx\frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor}}{x}=f(x)$$

VEDIAMO CHE $\int_4^{+\infty}f(x)\,dx$ CONVERGE.

DOBBIAMO MOSTRARE CHE $\lim_{c\to+\infty}\int_4^c f(x)\,dx$ ESISTE FINITO.

SE PER COMODITÀ DI NOTAZIONE PONIAMO $F(x)=\int_4^x f(t)\,dt$, QUELLO CHE DOBBIAMO MOSTRARE È CHE $F(x)\to\ell$ FINITO PER $x\to+\infty$. COME PRIMO PASSO MOSTRIAMO UN FATTO PIÙ DEBOLE, CIOÈ CHE $F(2n)\to\ell\in\mathbb{R}$ PER $n\to+\infty$.

SI HA:

$$F(2n)=\int_4^{2n}\frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor}}{x}\,dx=\sum_{k=2}^{n-1}\int_{2k}^{2k+2}\frac{(-1)^{\lfloor x\rfloor}}{x}\,dx=\sum_{k=2}^{n-1}\left(\int_{2k}^{2k+1}\frac{1}{x}\,dx+\int_{2k+1}^{2k+2}-\frac{1}{x}\,dx\right)=$$

$$=\sum_{k=2}^{n-1}\left(\ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right)-\ln\left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)\right)=\sum_{k=2}^{n-1}\ln\left(\frac{(2k+1)^2}{4k(k+1)}\right)=\boxed{\sum_{k=2}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{4k(k+1)}\right)}$$

SICCOME $\ln\left(1+\frac{1}{4k(k+1)}\right)>0$ LA SOMMA È CRESCENTE IN $n$. DI CONSEGUENZA

$\lim_{n\to+\infty}F(2n)$ ESISTE. RIMANE DA VEDERE CHE È FINITO. SI HA:

$$F(2n)=\dots=\sum_{k=2}^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{4k(k+1)}\right)\le\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{4k(k+1)}=\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\cancel{\ }\cdots\cancel{\ }+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{8}$$

POICHÈ DUNQUE $F(2n)<\frac{1}{8}$ PER OGNI $n$, ALLORA ANCHE IL SUO LIMITE $\ell$ (CHE ESISTE) DEVE ESSERE MINORE O UGUALE A $\frac{1}{8}$, QUINDI FINITO.

ABBIAMO QUINDI DIMOSTRATO CHE $\lim_{n\to+\infty}F(2n)=\ell$ FINITO. VOGLIAMO ORA DIMOSRARE CHE $\lim_{n\to+\infty}F(x)=\ell$. A TALE SCOPO RICORDIAMO CHE:

(3) $\forall a\geq 4$ $F(x)$ È LIPSCHITZIANA SU $[a,+\infty)$ CON COSTANTE $L=\sup_{x\geq a}|f(x)|=\frac{1}{a}$

ORA, $\forall\varepsilon>0$ PRENDIAMO $n_0\in\mathbb{N}$ IN MODO CHE VALGANO DUE CONDIZIONI

1) SE $k\geq n_0$ ALLORA $|F(2k)-\ell|<\frac{\varepsilon}{2}$

2) $\frac{1}{2n_0}<\frac{\varepsilon}{2}$

DETTO CIÒ, $\forall x\geq 2n_0$, ESISTE SEMPRE $k\in\mathbb{N}$, CON $k\geq n_0$, TALE CHE $|2k-x|\leq 1$ E QUINDI

$$|F(x)-\ell|=|F(x)-F(2k)+F(2k)-\ell|\leq|F(x)-F(2k)|+|F(2k)-\ell|\underset{(3)}{\leq}\frac{1}{2n_0}|x-2k|+|F(2k)-\ell|\underset{1)\ e\ 2)}{<}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

ABBIAMO QUINDI VERIFICATO CHE $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \ell \in \mathbb{R}$, CIOÈ CHE $\int_4^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE.

PER VEDERE CHE INVECE $\int_4^{+\infty} g(x)\,dx$ DIVERGE BASTA OSSERVARE CHE:

$$\lim_{C \to +\infty} \int_4^C g(x)\,dx = \lim_{C \to +\infty} \int_4^C f(x) + \frac{1}{x \ln x}\,dx = \underbrace{\lim_{C \to +\infty} \int_4^C f(x)\,dx}_{1} + \underbrace{\lim_{C \to +\infty} \int_4^C \frac{1}{x \ln x}\,dx}_{2}$$

MA SAPPIAMO CHE 1 ESISTE FINITO PERCHÈ $\int_4^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE, MENTRE 2 È $+\infty$ PERCHÈ SAPPIAMO CHE $\int_4^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}\,dx$ DIVERGE.

QUINDI $\lim_{C \to +\infty} \int_4^C g(x)\,dx = +\infty$, CIOÈ $\int_4^{+\infty} g(x)\,dx$ DIVERGE.