

Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 10

Titolo nota

15/08/2014

30 marzo 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

INT. IMPROPRI - STUDIO CONVERGENZA (... CONTINUA...)

ES. 1 TROVARE $f, g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ T.C. $f(x) \approx g(x)$ PER $x \rightarrow +\infty$ MA $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE
MENTRE $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ DIVERGE.

SVOLGIMENTO

PRENDIAMO $f(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{x}$ E $g(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{x} + \frac{1}{x \ln x}$ SU $[4, +\infty)$

PER $x \rightarrow +\infty$ SI HA:

$g(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{x} + \frac{1}{x \ln x} = \frac{(-1)^{[x]}}{x} \left(1 + \frac{(-1)^{[x]}}{\ln x} \right) \approx \frac{(-1)^{[x]}}{x} = f(x)$

PERCHÉ $\rightarrow 0$ PER $x \rightarrow +\infty$

VEDIAMO CHE $\int_4^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE.

DOBBIAMO MOSTRARE CHE $\lim_{C \rightarrow +\infty} \int_4^C f(x) dx$ ESISTE FINITO.

SE PER COMODITÀ DI NOTAZIONE PONIAMO $F(x) = \int_4^x f(t) dt$. QUELLO CHE DOBBIAMO MOSTRARE

È CHE $F(x) \rightarrow l$ FINITO PER $x \rightarrow +\infty$. COME PRIMO PASSO MOSTRIAMO UN FATTO PIÙ DEBOLE,
CIOÈ CHE $F(2n) \rightarrow l \in \mathbb{R}$ PER $n \rightarrow +\infty$.

SI HA:

$$F(2n) = \int_4^{2n} \frac{(-1)^{[x]}}{x} dx = \sum_{k=2}^{n-1} \int_{2k}^{2k+2} \frac{(-1)^{[x]}}{x} dx = \sum_{k=2}^{n-1} \left(\int_{2k}^{2k+1} \frac{1}{x} dx + \int_{2k+1}^{2k+2} -\frac{1}{x} dx \right) =$$

$$= \sum_{k=2}^{n-1} \left(\ln \left(\frac{2k+1}{2k} \right) - \ln \left(\frac{2k+2}{2k+1} \right) \right) = \sum_{k=2}^{n-1} \ln \left(\frac{(2k+1)^2}{4k(k+1)} \right) = \sum_{k=2}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{1}{4k(k+1)} \right)$$

SICCOME $\ln \left(1 + \frac{1}{4k(k+1)} \right) > 0$ LA SOMMA È CRESCENTE IN n . DI CONSEGUENZA

$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(2n)$ ESISTE. RIMANE DA VEDERE CHE È FINITO. SI HA:

$$F(2n) = \dots = \sum_{k=2}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{1}{4k(k+1)} \right) \leq \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{4k(k+1)} = \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{8}$$

POICHÉ DUNQUE $F(2n) < \frac{1}{8}$ PER OGNI n , ALLORA ANCHE IL SUO LIMITE l (CHE ESISTE)

DEVE ESSERE MINORE O UGUALE A $\frac{1}{8}$, QUINDI FINITO.

ABBIAMO QUINDI DIMOSTRATO CHE $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(2n) = \ell$ FINITO. VOGLIAMO ORA DIMOSTRARE CHE

$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = \ell$. A TALE SCOPO RICORDIAMO CHE:

(1)

$\forall \alpha > 0$, $F(x)$ È LIPSCHITZIANA SU $[a, +\infty)$ CON COSTANTE $L = \sup_{x \geq a} |f(x)| = \frac{1}{\alpha}$

ORA, $\forall \varepsilon > 0$ PRENDIAMO $n_0 \in \mathbb{N}$ IN MODO CHE VALGANO DUE CONDIZIONI

1) SE $k \geq n_0$ ALLORA $|F(2k) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$

2) $\frac{1}{2n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$

DETTO CIÒ, $\forall x \geq 2n_0$, ESISTE SEMPRE $k \in \mathbb{N}$, CON $k \geq n_0$, TALE CHE $|2k - x| \leq 1$ E QUINDI

$$|F(x) - \ell| = |F(x) - F(2k) + F(2k) - \ell| \leq |F(x) - F(2k)| + |F(2k) - \ell| \leq \frac{1}{2n_0} |x - 2k| + |F(2k) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(1)

(1) + (2)

ABBIAMO QUINDI VERIFICATO CHE $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = \ell \in \mathbb{R}$, CIOÈ CHE $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE.

PER VEDERE CHE INVECE $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ DIVERGE BASTA OSSERVARE CHE:

$$\lim_{C \rightarrow +\infty} \int_a^C g(x) dx = \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_a^C \left(f(x) + \frac{1}{x \ln x} \right) dx = \underbrace{\lim_{C \rightarrow +\infty} \int_a^C f(x) dx}_{(1)} + \underbrace{\lim_{C \rightarrow +\infty} \int_a^C \frac{1}{x \ln x} dx}_{(2)}$$

MA SAPPIAMO CHE (1) ESISTE FINITO PERCHÈ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE, MENTRE

(2) È $+\infty$ PERCHÈ SAPPIAMO CHE $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ DIVERGE.

QUINDI $\lim_{C \rightarrow +\infty} \int_a^C g(x) dx = +\infty$, CIOÈ $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ DIVERGE.

TEO. 1 (CRITERIO DI CAUCHY)

DATA $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ TALE CHE PER OGNI $c \in [a, b)$ SIA $f \in \mathcal{R}([a, c])$, ALLORA È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

(a) $\int_a^b f(x) dx$ CONVERGE.

(b) $\forall \varepsilon > 0 \exists c \in [a, b)$ T.C. $x_1, x_2 \in [c, b) \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| < \varepsilon$

DIMO PRESA $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, L'AFFERMAZIONE (a) EQUIVALE AD:

(a) $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ ESISTE FINITO

MENTRE LA (b) EQUIVALE A:

$$(\beta) \forall \varepsilon > 0 \exists c \in [a, b) \text{ TALE CHE } x_1, x_2 \in [c, b) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

A QUESTO PUNTO L'EQUIVALENZA TRA (α) E (β) È UN TEOREMA NOTO SUI LIMITI.

OSS. 1 IL TEO. 1 SI UTILIZZA SOPRATTUTTO IN NEGATIVO, CIOÈ PER DIMOSTRARE CHE UN INTEGRALE NON CONVERGE, COME VEDIAMO NELL'ESEMPIO SUCCESSIVO.

ES. 2 MOSTRARE CHE $\int_0^{+\infty} \sin \sqrt{x} \, dx$ NON CONVERGE

SVOLGIMENTO

$\forall k \in \mathbb{N}$ PRENDIAMO $a_k = (2k\pi)^2$ E $b_k = ((2k+1)\pi)^2$. SI HA

$$\begin{aligned} \int_{a_k}^{b_k} \sin \sqrt{x} \, dx & \stackrel{x=(t+2k\pi)^2}{=} \int_0^\pi \sin(t+2k\pi) \cdot 2(t+2k\pi) \, dt = \int_0^\pi 2 \cdot (2k\pi+t) \cdot \sin t \, dt \geq \\ & \geq 4k\pi \int_0^\pi \sin t \, dt = 8k\pi \end{aligned}$$

MA ALLORA PER $k \rightarrow +\infty$, PUR ESSENDO $a_k, b_k \rightarrow +\infty$, SI HA $\left| \int_{a_k}^{b_k} \sin \sqrt{x} \, dx \right| \rightarrow +\infty$.

QUINDI LA (a) DEL TEO. 1 È VIOLATA, QUINDI $\int_0^{+\infty} \sin \sqrt{x} \, dx$ NON CONVERGE.

PROVA SIMULATA SU "INTEGRALI E INT. IMPROPRI"

P. 1 CALCOLARE $\int_0^{+\infty} \frac{3x}{x^4+5x^2+4} \, dx$

SVOLGIMENTO

SI HA:

$$\frac{3x}{x^4+5x^2+4} = \frac{3x}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{x^3+4x-x^3-x}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{x^3+4x}{(x^2+1)(x^2+4)} - \frac{x^3+x}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+4}$$

QUINDI:

$$\begin{aligned} \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_1^C \frac{3x}{x^4+5x^2+4} \, dx &= \lim_{C \rightarrow +\infty} \left(\int_1^C \frac{x}{x^2+1} \, dx - \int_1^C \frac{x}{x^2+4} \, dx \right) = \\ &= \lim_{C \rightarrow +\infty} \left(\left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_1^C - \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+4) \right]_1^C \right) = \end{aligned}$$

$$= \lim_{C \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \ln(C^2+1) - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(C^2+4) + \frac{1}{2} \ln 5 \right) =$$

$$= \lim_{C \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{C^2+1}{C^2+4} + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$$

P.2 STUDIARE AL VARIARE DI $\alpha > 0$ LA CONVERGENZA DI $\int_0^1 \left(\frac{e^x - \cos x}{\tan x - \sin x} \right)^\alpha dx$

SVOLGIMENTO

L'INTEGRALE È IMPROPRIO NEL PRIMO ESTREMO.

PER $x \rightarrow 0^+$ SI HA:

$$e^x - \cos x = 1 + x + o(x) - (1 + o(x)) = x + o(x)$$

$$E: \quad \tan x - \sin x = \tan x \cdot (1 - \cos x) = (x + o(x)) \cdot \left(1 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

QUINDI:

$$f(x) = \left(\frac{x + o(x)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} \right)^\alpha \approx 2^\alpha \cdot \frac{1}{x^{2\alpha}}$$

PER IL CRIT. DEL CONFRONTO ASINTOTICO IL CARATTERE DI $\int_0^1 f(x) dx$ È UGUALE A QUELLO DI $\int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha}} dx$, CHE CONVERGE PER $2\alpha < 1$.

QUINDI GLI $\alpha > 0$ CHE RENDONO CONVERGENTE $\int_0^1 f(x) dx$ SONO GLI α TALI CHE $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

P.3 STUDIARE LA CONVERGENZA DI $\int_0^{+\infty} \left(\frac{A + \sin x}{17 + \cos x} \right)^x dx$ PER $A=15$ E PER $A=16$.

SVOLGIMENTO

MOSTRIAMO CHE $\int_0^{+\infty} \left(\frac{15 + \sin x}{17 + \cos x} \right)^x dx$ CONVERGE

POICHÉ $|\sin x| \leq 1$ E $|\cos x| \leq 1$ SI HA

(2) $15 + \sin x \leq 16 \leq 17 + \cos x$

MA SICCOME $\sin x = 1$ E $\cos x = -1$ NON SI VERIFICANO MAI PER LO STESSO x , UNA DELLE DUE DISUGUAGLIANZE DELLA (2) È SEMPRE STRETTA QUINDI:

(3) $\frac{15 + \sin x}{17 + \cos x} < 1$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$

MA $\frac{15 + \sin x}{17 + \cos x}$ È CONTINUA E PERIODICA, QUINDI HA MASSIMO M SU $[0, 2\pi]$ E QUINDI SU $\mathbb{R}$.

DALLA (3) SEGUE CHE $M < 1$.

SI OTTIENE:

PERCHÉ $|\sin x| \leq 1$ E $|\cos x| \leq 1$

$$0 < \frac{15 + \sin x}{17 + \cos x} \leq M < 1$$

DA CUI SEGUE:

VALE DA UN CERTO $x_0 > 0$ IN POI
PERCHÉ $M < 1$ E QUINDI $M^x = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ PER $x \rightarrow +\infty$

$$0 < \left(\frac{15 + \sin x}{17 + \cos x} \right)^x \leq M^x < \frac{1}{x^2}$$

POICHÉ $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ CONVERGE, PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO CONVERGE ANCHE $\int_{x_0}^{+\infty} \left(\frac{15 + \sin x}{17 + \cos x} \right)^x dx$.

E QUINDI ANCHE $\int_0^{+\infty} \left(\frac{15 + \sin x}{17 + \cos x} \right)^x dx$.

MOSTRIAMO ORA CHE $\int_0^{+\infty} \left(\frac{16 + \sin x}{17 + \cos x} \right)^x dx$ DIVERGE.

OSSERVIAMO CHE:

$$(4) \quad \frac{16 + \sin x}{17 + \cos x} \geq 1 \Leftrightarrow 16 + \sin x \geq 17 + \cos x \Leftrightarrow \sin x - \cos x \geq 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$$

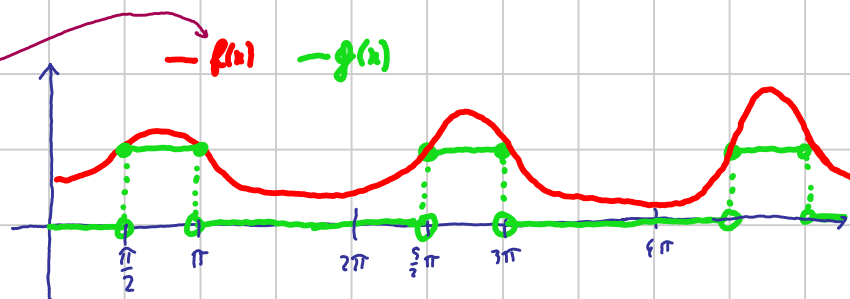
SE DEFINIAMO.

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi \right] \text{ PER QUALCHE } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

GRAZIE A (4) AVREMO:

$$0 \leq g(x) \leq \left(\frac{16 + \sin x}{17 + \cos x} \right)^x = f(x)$$

PER OGNI $x \in [0, +\infty)$.



PER AVERE LA TESI BASTERÀ DUNQUE MOSTRARE CHE $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ DIVERGE.

GRAZIE ALLA POSITIVITÀ DI $g(x)$ È SUFFICIENTE MOSTRARE CHE $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{a_n} g(x) dx = +\infty$

PER UNA SOLA $a_n \rightarrow +\infty$. PRENDIAMO DUNQUE $a_n = 2n\pi$. SI HA:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2n\pi} g(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} g(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} \cdot n \right) = +\infty$$

QUINDI $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ DIVERGE E DUNQUE, PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO, ANCHE $\int_0^{+\infty} \left(\frac{16 + \sin x}{17 + \cos x} \right)^x dx$.

P.9 DATA $F(x) = \int_1^x \sqrt{1 + \frac{1}{t^3}} dt$

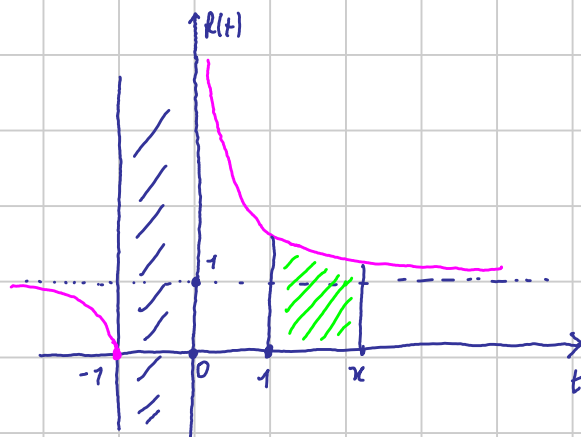
(a) TROVARNE IL DOMINIO, CIOÈ TROVARE PER QUALI $x \in \mathbb{R}$ $F(x)$ È BEN DEFINITO COME INTEGRALE DIRIEMANN O COME INTEGRALE IMPROPRIO CONVERGENTE.

(b) STUDIARNE LA MONOTONIA.

(c) DIRE SE IL SUO GRAFICO INTERSECA LA RETTA $y=x$.

SVOLGIMENTO

(a) LA FUNZIONE INTEGRANDA $f(t) = \sqrt[4]{1 + \frac{1}{t^3}}$
È DEFINITA FUORI DALL'INTERVALLO $(-1, 0]$
ED HA UN GRAFICO APPROSSIMATIVO COME QUELLO
IN FIGURA. QUINDI SE IL PRIMO ESTREMO
DELL'INTEGRALE È -1 , IL SECONDO ESTREMO
 x PUÒ ESSERE PRESO NELL'INSIEME $(0, +\infty)$.



RIMANE DA DECIDERE SE VADA BENE ANCHE $x=0$, CIOÈ SE $\int_0^1 \sqrt[4]{1 + \frac{1}{t^3}} dt$ CONVERGA.
A TALE SCOPO SI OSSERVI CHE PER $t \rightarrow 0^+$ SI HA:

$$f(t) = \sqrt[4]{1 + \frac{1}{t^3}} \approx \sqrt[4]{\frac{1}{t^3}} = \frac{1}{t^{3/4}}$$

QUINDI, GRAZIE AL FATTO CHE $\int_0^1 \frac{1}{t^{3/4}} dt$ CONVERGE, PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO
ANCHE $\int_0^1 f(t) dt$ CONVERGE AD UNA QUANTITÀ FINITA $A > 0$. QUINDI:

$$F(0) = \int_{-1}^0 f(t) dt = - \int_0^1 f(t) dt = -A.$$

(b) PER IL T.F.C.2 SI HA:

$$F'(x) = f(x) = \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^3}} > 1 \quad \text{PER } x > 0$$

QUINDI F È STRETTAMENTE CRESCENTE.

INOLTRE:

$$F(-1) = \int_{-1}^{-1} f(t) dt = 0$$

QUINDI, DALLA MONOTONIA SEGUE CHE $F(x)$ È NEGATIVA SU $[-1, 0]$ E POSITIVA SU $(0, +\infty)$.

INOLTRE DAL FATTO CHE PER OGNI x SIA $F'(x) > 1$ SEGUE CHE $F(x)$ STA SOPRA ALLA
RETTA PASSANTE PER $(1, F(1))$ E CON PENDENZA 1. QUINDI $F(x) \rightarrow +\infty$ PER $x \rightarrow +\infty$.

(c) PER VEDERE SE $y=F(x)$ INTERSECA LA RETTA $y=x$, CERCHIAMO PRIMA SE HA
UN ASINTOTO OBLIQUO PER $x \rightarrow +\infty$. SI HA:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^3}} = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(F(x) - (x-1) - 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_1^x \sqrt[4]{1 + \frac{1}{t^3}} dt - \int_1^x 1 dt - 1 \right) =$$

PERCHÉ $\sqrt[4]{1+x} \leq 1 + \frac{x}{4}$

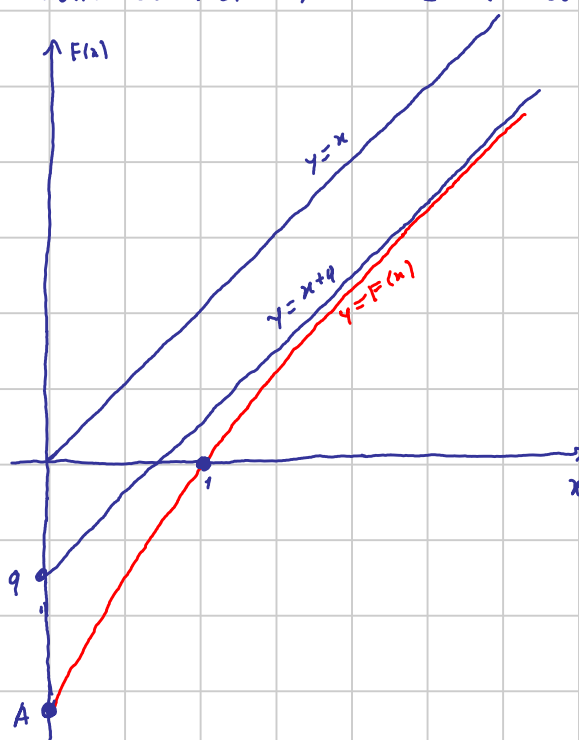
$$= -1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{t^3}} - 1 \right) dt \leq$$

$$\leq -1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{4t^3} dt = -1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{8t^2} \right]_1^x = -1 + \frac{1}{8} = -\frac{7}{8}$$

QUINDI L'ASINTOTO OBLIQUO È $y = x + q$ CON $q \leq -\frac{7}{8}$.

INOLTRE $F(x)$ È CONCAVA PERCHÉ $F'(x)$ È DECRESCENTE, QUINDI $F(x)$ STA SOTTO AL SUO

ASINTOTO OBLIQUO E QUINDI ANCHE ALLA RETTA $y = x$. IL GRAFICO È IL SEGUENTE:



P.9 DATA $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, LIPSCHITZIANA,

(a) MOSTRARE CHE SE $\forall n \in \mathbb{N} \ f(\sqrt[n]{n}) = 0$ ALLORA $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE.

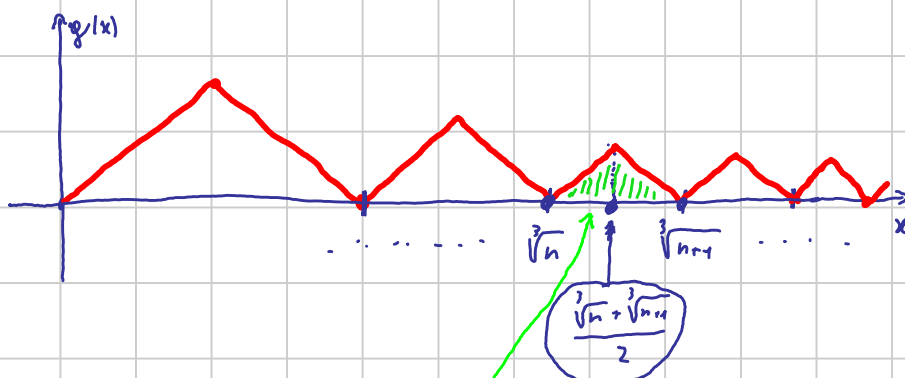
(b) COSA SUCCEDERÀ NEL PUNTO (a) LA CONDIZIONE $f(\sqrt[n]{n}) = 0$ VIENE SOSTITUITA DA $f(\sqrt{n}) = 0$?

SVOLGIMENTO

(a) DETTA L LA COSTANTE DI LIPSCHITZ DI f , DEFINIAMO $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ NEL MODO SEGUENTE:

$$g(x) = \begin{cases} L(x - \sqrt[n]{n}) & \text{SE } x \in [\sqrt[n]{n}, \frac{\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}}{2}] \\ -L(x - \sqrt[n]{n+1}) & \text{SE } x \in [\frac{\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}}{2}, \sqrt[n]{n+1}] \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

IL GRAFICO DI $g(x)$ È IL SEGUENTE:



IN PARTICOLARE SI NOTI CHE OGNI TRATTO DEL GRAFICO DI $g(x)$ HA PENDENZA L O $-L$.

INOLTRE, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$, SI HA:

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt[n]{n}}^{\sqrt[n]{n+1}} g(x) dx &= \text{AREA DI } \text{■} = \frac{1}{2} \cdot \overbrace{(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})}^{\text{BASE TRIANGOLINO}} \cdot \overbrace{\frac{L}{2}(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})}^{\text{ALTEZZA TRIANGOLINO}} = \frac{L}{4}(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})^2 = \\ &= \frac{L}{4}(\sqrt[n]{n})^2 \cdot (\sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} - 1)^2 \leq \frac{L}{4} \cdot n^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{3n}\right)^2 = \frac{L}{36} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

QUINDI $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ CONVERGE PERCHÉ:

$$\lim_{C \rightarrow +\infty} \int_0^C g(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt[n]{n}} g(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\sqrt[k]{k}}^{\sqrt[k+1]{k+1}} g(x) dx =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 g(x) dx + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\sqrt[k]{k}}^{\sqrt[k+1]{k+1}} g(x) dx \right) =$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{L}{4} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{L}{36} \cdot \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}} \right) =$$

$$= \frac{L}{4} + \frac{L}{36} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{L}{4} + \frac{L}{36} + \frac{L}{36} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{n-1} \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{1}{2}} dx \leq$$

$$\leq \frac{L}{4} + \frac{L}{36} + \frac{L}{36} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{n-1} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx = \text{ESISTE FINITO PERCHÉ} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx \text{ CONVERGE}$$

A QUESTO PUNTO, SE AVESSIMO GIÀ FATTO LE SERIE AVREMMO FINITO PERCHÉ $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ CONVERGE, INVECE SIAMO COSTRETTI A CAVARCELA IN ALTRO MODO

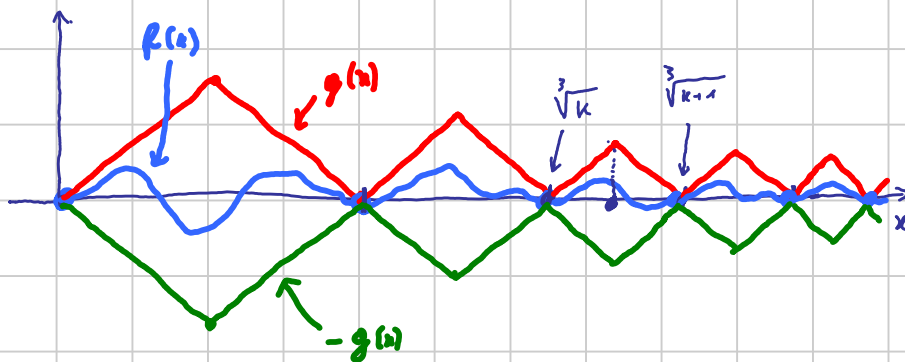
QUINDI $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ CONVERGE.

ORA, DAL FATTO CHE f È LIPSCHITZIANA CON COSTANTE DI LIPSCHITZ L , SEGUE CHE

(5)

$$|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in [0, +\infty)$$

COME EVIDENZIATO NELLA FIGURA SEGUENTE:



INFATTI SE $f(x)$ USCISSE DALLA ZONA DELIMITATA DA $g(x)$ E $-g(x)$, VISTO CHE

$f(\sqrt[3]{k}) = 0$ È FORZATO CI SAREBBE NECESSARIAMENTE UN RAPPORTO INCREMENTALE CON MODULO MAGGIORE DI L , IN CONTRASTO COL FATTO CHE L È COSTANTE DI LIPSCHITZ DI $f(x)$.

DUNQUE VALE (5) E QUINDI, PER IL T. DEL CONFRONTO, $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx$ CONVERGE. MA ALLORA, PER IL CRITERIO DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA, ANCHE $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE.

(6) COSTRUIENDO $g(x)$ IN ANALOGIA A QUANTO FATTO NEL PUNTO (a) MA USANDO $\sqrt{n}$ AL POSTO DI $\sqrt[3]{n}$, SI OTTIENE CHE $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ STAVOLTA DIVERGE. QUINDI TALE $g(x)$ FORNISCE IL CONTROESEMPIO CHE SERVE.
