

SERIE NUMERICHE (...CONTINUA...) (SERIE A TERMINI POSITIVI)

TEO. 1 (CRITERIO DEL CONFRONTO)

DATE $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ E $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ TALI CHE PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ SI ABBIA

(1)
$$0 \leq a_n \leq b_n$$

ALLORA:

(1)
$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ CONVERGE} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ CONVERGE}$$

(2)
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ DIVERGE} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ DIVERGE}$$

DIMO

(1) SIA (S_n) LA SUCCESSIONE DELLE SOMME FINITE DI $\sum a_n$ E (σ_n) QUELLA DI $\sum b_n$. DA (1) SEGUE CHE SONO ENTRAMBE CRESCENTI E CHE:

(2)
$$S_n \leq \sigma_n \text{ PER OGNI } n \in \mathbb{N}$$

DALLA MONOTONIA DI (S_n) SEGUE CHE $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ ESISTE. PER MOSTRARE CHE È FINITO BASTA OSSERVARE CHE, GRAZIE A (2), SI HA:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n$$

E CHE $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n$ ESISTE FINITO PERCHÉ $\sum b_n$ CONVERGE.

QUINDI $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ ESISTE FINITO, CIOÈ $\sum a_n$ CONVERGE.

(2) SEGUE BANALMENTE DA (1) PERCHÉ, SE PER ASSURDO $\sum a_n$ DIVERGESSE E $\sum b_n$ CONVERGESSE, DA (1) E DALLA CONVERGENZA DI $\sum b_n$ SEGUIREBBE CHE ANCHE $\sum a_n$ CONVERGE (ASSURDO).

Oss.1 GRAZIE AL FATTO CHE, PER OGNI $n_0 \in \mathbb{N}$, IL CARATTERE DI $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ E $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ È UGUALE A QUELLO DI $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ E $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, L'IPOTESI DEL **TEO.1** PUÒ ESSERE INDEBOLITA. OVVERO NON C'È BISOGNO CHE (1) VALGA PER OGNI n , MA BASTA CHE VALGA "DEFINITIVAMENTE IN n ", CIOÈ DA UN CERTO n_0 IN POI. LA STESSA COSA SI POTRÀ DIRE PER TUTTI I TEOREMI CHE FAREMO OGGI.

ES.1 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\cos n}}{n}$ DIVERGE.

INFATTI, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ SI HA:

$$\frac{e^{\cos n}}{n} \geq \frac{e^{-1}}{n} = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{n} > 0$$

QUINDI, SICCOME $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ DIVERGE, ANCHE $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{n}$ DIVERGE, QUINDI $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\cos n}}{n}$ DIVERGE PER IL CRIT. DEL CONFRONTO

ES.2 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ CONVERGE.

INFATTI VALE LA STIMA:

$$0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{6}{(n+1)(n+2)}$$

INFATTI, PER $n \geq 1$, SI HA $6n^2 \geq (n+1)(n+2)$ PERCHÈ:

$$6n^2 = 2n \cdot 3n = (n+n)(n+2n) \geq (n+1)(n+2)$$

MA:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{(n+1)(n+2)} = 6 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

CONVERGE PERCHÈ È LA SERIE DI MENBOLI

QUINDI $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ CONVERGE PER IL CRIT. DEL CONFRONTO.

ES.3 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\ln n}}$ CONVERGE.

SI NOTI CHE NON APPENA $n > e^2$ SI HA $\ln n > 2$ QUINDI:

$$0 < \frac{1}{n^{\ln n}} < \frac{1}{n^2}$$

VALE PER $n > e^2$

QUINDI, DAL FATTO CHE $\sum \frac{1}{n^2}$ CONVERGE, SEGUE CHE CONVERGE ANCHE $\sum \frac{1}{n^{\ln n}}$.

ES.4 $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$ DIVERGE.

STAVOLTA LA STIMA DA FARE È MENO OVVIA:

$$(\ln n)^{\ln(\ln n)} = e^{\ln((\ln n)^{\ln(\ln n)})} = e^{\ln(\ln n) \cdot \ln(\ln n)} < e^{\sqrt{\ln n} \cdot \sqrt{\ln n}} = e^{\ln n} = n$$

VALE DEFINITIVAMENTE IN n PERCHÉ
 $\ln x = o(\sqrt{x})$ PER $x \rightarrow +\infty$

MA ALLORA DEFINITIVAMENTE IN n SI HA:

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} > \frac{1}{n}$$

QUINDI, SICCOME $\sum \frac{1}{n}$ DIVERGE, ANCHE $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$ DIVERGE.

TEO.2 (CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO)

DATI $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ E $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ A TERMINI STRETTAMENTE POSITIVI E TALI CHE:

(3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in (0, +\infty)$

ALLORA $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ E $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ HANNO LO STESSO CARATTERE.

DIMO

DA (3) SEGUE CHE, DEFINITIVAMENTE IN n , SI HA:

$$\frac{1}{2}c \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2}c$$

CIOÈ:

(4) $\frac{1}{2}c \cdot b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2}c \cdot b_n$

MA ALLORA, SE $\sum a_n$ CONVERGE, DA $\frac{1}{2}c \cdot b_n \leq a_n$ E DAL CRITERIO DEL CONFRONTO SEGUE CHE ANCHE $\sum b_n$ CONVERGE.

VICEVERSA, SE CONVERGE $\sum b_n$, LA CONVERGENZA DI $\sum a_n$ SEGUE DA $a_n \leq \frac{3}{2}c \cdot b_n$.

QUINDI $\sum a_n$ CONVERGE SE E SOLO SE $\sum b_n$ CONVERGE.

VISTO CHE NON POSSONO ESSERE INDETERMINATE (PERCHÉ SONO A TERMINI POSITIVI) SI PUÒ CONCLUDERE CHE HANNO SEMPRE LO STESSO CARATTERE.

ES.5 $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$ DIVERGE

INFATTI, PER $n \rightarrow +\infty$ SI HA: $\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \approx \frac{1}{n+1} \approx \frac{1}{n}$ E $\sum \frac{1}{n}$ DIVERGE.

ES.6 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n - 2^n}$ CONVERGE

INFATTI, PER $n \rightarrow +\infty$ SI HA:

$$\frac{1}{3^n - 2^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} \approx \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

QUINDI LA NOSTRA SERIE SI COMPORTA COME $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$, CHE CONVERGE.

TEO.3 (CRITERIO DELL'INTEGRALE)

SIA $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ POSITIVA E DECRESCENTE. ALLORA $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ E $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ HANNO LO STESSO CARATTERE.

DIMO

DAL FATTO CHE f È DECRESCENTE, PER OGNI $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, SI HA:

$$f(k) \leq f(x) \leq f(k-1) \quad \forall x \in [k-1, k]$$

QUINDI INTEGRANDO SU $[k-1, k]$ SI OTTIENE:

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1)$$

CHE, SOMMATA PER $k=1, \dots, n$, FORNISCE:

$$\sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

OVVERO, SE INDICHIAMO CON (S_n) LA SUCCESIONE DELLE SOMME FINITE DI $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$:

(5)
$$S_n - f(0) \leq \int_0^n f(x) dx \leq S_{n-1}$$

ORA, GRAZIE ALLA POSITIVITÀ DI $f(x)$, CIASCUNO DEI 3 MEMBRI DI **(5)** HA LIMITE PER $n \rightarrow +\infty$

SE $\sum f(n)$ CONVERGE ALLORA $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1}$ È FINITO E QUINDI ANCHE $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(x) dx$

È FINITO (GRAZIE A **(5)**) E DACIÒ SEGUE CHE $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE.

VICEVERSA, SE CONVERGE $\int_0^{+\infty} f(x) dx$, ALLORA È FINITO $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(x) dx$ E QUINDI,

SEMPRE GRAZIE A **(5)**, ANCHE $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - f(0))$ È FINITO. QUINDI $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ È FINITO E

DUNQUE $\sum f(n)$ CONVERGE.

QUINDI $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ CONVERGE SE E SOLO SE CONVERGE $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

SICCOME CI SONO SOLO 2 POSSIBILITÀ (PERCHÉ $f(x) \geq 0$) QUESTO BASTA PER POTER DIRE CHE HANNO SEMPRE LO STESSO CARATTERE.

059.2

IL CRITERIO DELL'INTEGRALE CI PERMETTE DI INCREMENTARE "GRATIS" GLI ESEMPI DI SERIE NOTEVOLI DA UTILIZZARE NEI CONFRONTI. AD ESEMPIO, D'ORA IN POI, POTREMMO DISPORRE ANCHE DI:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ CHE CONVERGE PER $\alpha > 1$

2) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ CHE CONVERGE QUANDO:

a) $\alpha > 1$ E $\beta \in \mathbb{R}$

b) $\alpha = 1$ E $\beta > 1$

INFATTI 1) E 2) SI COMPORTANO ESATTAMENTE COME:

A) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ CHE CONVERGE PER $\alpha > 1$

B) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$ CHE CONVERGE QUANDO:

a) $\alpha > 1$ E $\beta \in \mathbb{R}$

b) $\alpha = 1$ E $\beta > 1$

ES 7

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ DIVERGE.

INFATTI:

$$\frac{1}{\ln(n!)} \geq \frac{1}{\ln(n^n)} = \frac{1}{n \ln n}$$

QUINDI, SICCOME ADESSO SAPIAMO CHE $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ DIVERGE, GRAZIE AL CRITERIO DEL

CONFRONTO POSSIAMO DIRE CHE DIVERGE ANCHE $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$

TEO.4

(CRITERIO DELLA RADICE)

DATA (a_n) , A TERMINI NON NEGATIVI, ALLORA:

(1) SE $\exists \rho \in (0,1)$ TALE CHE, DEFINITIVAMENTE IN n , $\sqrt[n]{a_n} < \rho$, ALLORA $\sum a_n$ CONVERGE.

(2) SE, FREQUENTEMENTE IN n , $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, ALLORA $\sum a_n$ DIVERGE.

DIMO

(1) EQUIVALE A DIRE CHE, DEFINITIVAMENTE IN n , SI HA:

$$0 \leq a_n \leq \rho^n$$

MA, SICCOME $\rho \in (0,1)$, $\sum \rho^n$ È UNA SERIE GEOMETRICA CONVERGENTE, PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO ANCHE $\sum a_n$ CONVERGE.

(2) È COME DIRE CHE $a_n \geq 1$ FREQUENTEMENTE IN n , QUINDI $a_n \not\rightarrow 0$ E PERCIÒ $\sum a_n$ NON CONVERGE.

DSS.9 NEL CASO IN CUI $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$ CRESCENDO, IL CRITERIO DELLA RADICE NON PERMETTE DI DIRE NULLA

TEO.9 (CRITERIO DEL RAPPORTO)

DATA (a_n) A TERMINI POSITIVI, ALLORA:

(1) SE $\exists p \in (0,1)$ TALE CHE DEFINITIVAMENTE IN n $\frac{a_{n+1}}{a_n} < p$ ALLORA $\sum a_n$ CONVERGE

(2) SE DEFINITIVAMENTE IN n $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ ALLORA $\sum a_n$ DIVERGE.

DIMO

(1) SAPPIAMO CHE SE MODIFICHIAMO UN NUMERO FINITO DI TERMINI DI UNA SERIE, IL CARATTERE NON CAMBIA.

QUINDI, SENZA PERDERE DI GENERALITÀ POSSIAMO SUPPORRE CHE LA DISUGUGLIANZA:

(6)
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < p$$

VALGA $\forall n \in \mathbb{N}$, ANZICHÈ SOLO DEFINITIVAMENTE.

SI NOTI CHE LA (6) EQUIVALE A

(7)
$$a_{n+1} < p \cdot a_n$$

APPLICANDO RIPETUTAMENTE LA (7) SI OTTIENE

$$a_n < p a_{n-1} < p^2 a_{n-2} < p^3 a_{n-3} < \dots < p^n a_0$$

QUINDI, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$, ABBIAMO LA STIMA:

$$0 < a_n < a_0 \cdot p^n.$$

LA CONVERGENZA DI $\sum a_n$ SEGUE DUNQUE DAL CRITERIO DEL CONFRONTO E DAL FATTO CHE

$\sum p^n$ CONVERGE IN QUANTO $p \in (0,1)$.

(2) SI NOTI CHE, ESSENDO $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$, DIRE $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ EQUIVALE A DIRE $a_{n+1} \geq a_n$.

QUINDI SE TALE DISUGUGLIANZA VALE DA UN CERTO $n_0 \in \mathbb{N}$ IN POI QUESTO SIGNIFICA CHE

(a_n) È DEBOLMENTE CRESCENTE DA n_0 IN POI. QUINDI, ESSENDO $a_{n_0} > 0$, SI HA CHE $a_n \not\rightarrow 0$.

QUINDI $\sum a_n$ NON PUÒ CONVERGERE.

DSS.4 NEL CASO IN CUI $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$ CRESCENDO, IL CRITERIO DEL RAPPORTO NON PERMETTE DI DIRE NULLA

ES.8 DIRE PER QUALI $A > 0$ CONVERGE LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot n^{n+1}}{(2n)!} \cdot A^n$.

USIAMO IL CRITERIO DEL RAPPORTO.

POICHÈ $a_n = \frac{n! \cdot n^{n+1}}{(2n)!} \cdot A^n$ SI HA:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)! \cdot (n+1)^{n+2}}{(2n+2)!} \cdot A^{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n! \cdot n^{n+1}} \cdot \frac{1}{A^n} = \\ &= \frac{(n+1) \cdot (n+1) \cdot (n+1)^{n+1}}{(2n+2)(2n+1)} \cdot A \cdot \frac{1}{n^{n+1}} = \\ &= \frac{A}{4} \cdot \frac{n+1}{n+\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{A}{4} \cdot \frac{n+1}{n+\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \rightarrow \frac{A}{4} \cdot e\end{aligned}$$

TENDE A 1 DECRESCENDO
 TENDE AD e DECRESCENDO
 PER $n \rightarrow \infty$

< 1 SE $0 < A < \frac{4}{e}$
 $= 1$ SE $A = \frac{4}{e}$
 > 1 SE $A > \frac{4}{e}$

QUINDI SE $0 < A < \frac{4}{e}$ SI APPLICA IL PUNTO (1) DEL CRITERIO DEL RAPPORTO E SI OTTIENE CHE $\sum a_n$ CONVERGE

SE INVECE $A > \frac{4}{e}$ SI APPLICA IL PUNTO (2) DEL CR. DEL RAPPORTO E SI OTTIENE CHE $\sum a_n$ DIVERGE

SE INFINE $A = \frac{4}{e}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$ MA, PER FORTUNA, CITENDE DECRESCENDO (VEDI NOTE) QUINDI SI RICADE LO STESSO NEL PUNTO (2) DEL CRITERIO DEL RAPPORTO E QUINDI $\sum a_n$ DIVERGE.

RIASSUMENDO: $\sum a_n$ CONVERGE SE E SOLO SE $0 < A < \frac{4}{e}$.

ES. 9 SIA (a_n) DEFINITA PER RICORRENZA DA $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} - 1 \end{cases}$. DIRE SE $\sum a_n$ CONVERGE.

LA RISPOSTA È SÌ PERCHÉ PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ SI HA:

- 1) $a_n > 0$ (PER INDUZIONE, PERCHÉ $a_0 = 1 > 0$ E SE $a_n > 0$ ANCHE $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} - 1 > 0$)
- 2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}$ (PERCHÉ $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} - 1 < \frac{1}{2} a_n$)

QUINDI PER IL CRITERIO DEL RAPPORTO $\sum a_n$ CONVERGE.