

SERIE NUMERICHE (...CONTINUA...) (SERIE A TERMINI DI SEGNO QUALSIASI)

DEF. 1 DATA $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ A VALORI IN $\mathbb{R}$, DIREMO CHE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ È ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE SE $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ CONVERGE.

TEO. 1 (CRITERIO DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA)

DATA $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ A VALORI IN $\mathbb{R}$, SE $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ È ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE ALLORA È ANCHE CONVERGENTE.

DIMO

SAPPIAMO CHE:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \text{ CONVERGE}$$

E VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ CONVERGE.

A TALE SCOPO DEFINIAMO LE SUCCESIONI (b_n) E (c_n) NEL MODO SEGUENTE:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = \max\{a_n, 0\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \max\{-a_n, 0\}$$

(b_n) E (c_n) SONO RISPETTIVAMENTE PARTE POSITIVA E PARTE NEGATIVA DI (a_n)

NE SEGUE CHE $\forall n \in \mathbb{N}$ VALGONO LE STIME:

$$0 \leq b_n \leq |a_n| \quad \text{E} \quad 0 \leq c_n \leq |a_n|$$

MA ALLORA, GRAZIE AL CRITERIO DEL CONFRONTO E AL FATTO CHE $\sum |a_n|$ CONVERGE

OTTENIAMO CHE:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \quad \text{E} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \text{ CONVERGONO.}$$

SI NOTI ORA CHE, $\forall n \in \mathbb{N}$, SI HA:

$$a_n = b_n - c_n$$

PERCHÉ SE $a_n \geq 0$ SI HA:

$$b_n - c_n = \max\{a_n, 0\} - \max\{-a_n, 0\} = a_n + 0 = a_n$$

MENTRE SE $a_n < 0$ SI HA:

$$b_n - c_n = \max\{a_n, 0\} - \max\{-a_n, 0\} = 0 - (-a_n) = a_n$$

QUINDI, DAL MOMENTO CHE $\sum b_n$ E $\sum c_n$ CONVERGONO, CONVERGE ANCHE $\sum (b_n - c_n)$, CIOÈ $\sum a_n$.

OSS.1 IL VICEVERSA DEL **TEO.1** NON VALE. INFATTI ESISTONO SERIE CONVERGENTI CHE NON SONO ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI, COME MOSTRA L'ESEMPIO CHE SEGUE.

ES.1 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ È CONVERGENTE MA NON ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE.

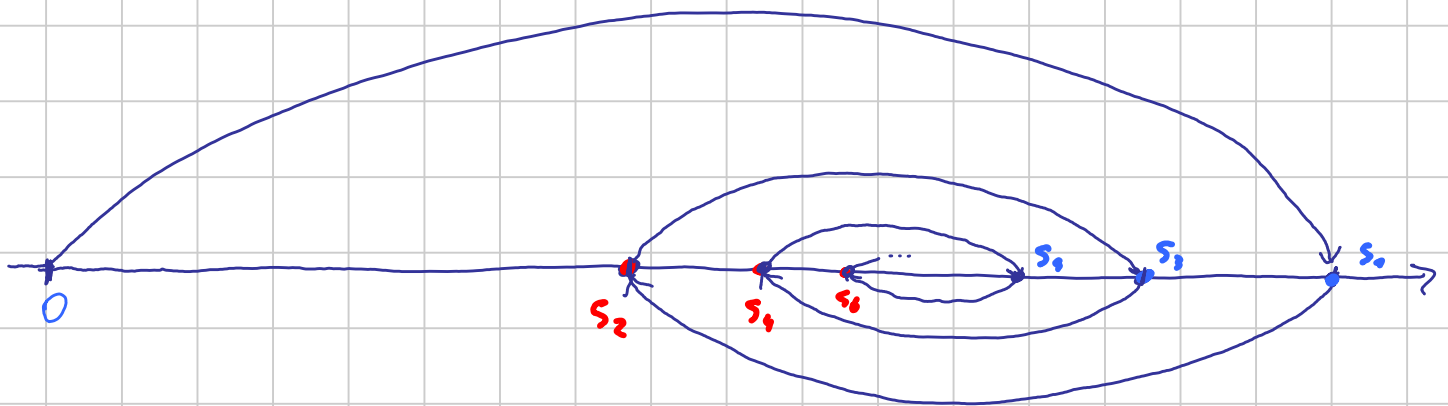
INFATTI LA SERIE DEI MODULI È $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, CHE SAPPIAMO DIVERGERE.

INVECE IL FATTO CHE $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ CONVERGA, SARÀ CONSEGUENZA IMMEDIATA DEL CRITERIO DI LEIBNIZ, CHE VEDIAMO TRA POCO.

AD OGNI MODO NON GUASTA (ANZI CI AIUTERÀ A SEGUIRE MEGLIO LA DIMOSTRAZIONE DEL CRITERIO DI LEIBNIZ) SE CI FACCIAMO PRIMA UN'IDEA INTUITIVA DEL PERCHÉ QUESTA SERIE CONVERGE.

PER COMINCIARE IMMAGINIAMO I TERMINI DELLA SERIE COME SE FOSSERO DEI SALTI SULLA RETTA REALE, IN AVANTI SE POSITIVI E ALL'INDIETRO SE NEGATIVI.

CON TALE NOTAZIONE LA SOMMA DI n TERMINI, CIOÈ s_n È IL PUNTO IN CUI ARRIVO SE PARTO DA $x=0$ E FACCIO LA SEQUENZA DI n PASSI CHE CORRISPONDONO AI PRIMI n TERMINI DELLA SERIE (VEDI FIGURA)



IL FATTO CHE I PASSI SIANO ALTERNATIVAMENTE AVANTI E INDIETRO E DI LUNGHEZZA DECRESCENTE FA SÌ CHE IL PUNTO DI ARRIVO AL PASSO n -ESIMO SIA SEMPRE DENTRO LA ZONA SCAVALCATA DALL'ULTIMO PASSO. MA LA LUNGHETTA DEL PASSO TENDE A ZERO PER CUI CI SI ASPETTA CHE LA ZONA SCAVALCATA SI CONTRAGGA A UN PUNTO. TALE PUNTO SARÀ IL LIMITE DI s_n .

TEO. 2 (CRITERIO DI LEIBNIZ)

DATA (a_n) TALE CHE $a_n \rightarrow 0$ DECRESCENDO, ALLORA $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ CONVERGE.

DIMO

DETTA (S_n) LA SUCCESSIONE DELLE SOMME FINITE, VOGLIAMO MOSTRARE CHE $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ TALE CHE $S_n \rightarrow \lambda$.

A TALE SCOPO MOSTREREMO SEPARATAMENTE CHE

$$\exists \lambda_1 \in \mathbb{R} \text{ TALE CHE } S_{2k} \rightarrow \lambda_1$$

$$\exists \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ TALE CHE } S_{2k-1} \rightarrow \lambda_2$$

DOPODICHÉ MOSTREREMO CHE $\lambda_1 = \lambda_2$.

I° PASSO (S_{2k}) È CRESCENTE

INFATTI, $\forall k \in \mathbb{N} - \{0\}$, SI HA:

$$S_{2(k+1)} = S_{2k+2} = S_{2k} + a_{2k+1} - a_{2k+2} \geq S_{2k}$$

PERCHÉ (a_n) È DECRESCENTE
E QUINDI $a_{2k+1} - a_{2k+2} \geq 0$

II° PASSO (S_{2k-1}) È DECRESCENTE

INFATTI, $\forall k \in \mathbb{N} - \{0\}$, SI HA

$$S_{2(k+1)-1} = S_{2k+1} = S_{2k-1} - a_{2k} + a_{2k+1} \leq S_{2k-1}$$

PERCHÉ (a_n) È DECRESCENTE
E QUINDI $-a_{2k} + a_{2k+1} \leq 0$

III° PASSO (S_{2k}) ED (S_{2k-1}) SONO ENTRAMBE LIMITATE.

INFATTI $\forall k \in \mathbb{N} - \{0\}$ SI HA:

$$S_{2k} = S_{2k-1} - a_{2k} \leq S_{2k-1}$$

PERCHÉ $a_{2k} \geq 0$, VISTO CHE
 $a_n \rightarrow 0$ DECRESCENDO

DA CUI SEGUE:

PERCHÉ (S_{2k}) È CRESCENTE

$$S_2 \leq \dots \leq S_{2k} \leq S_{2k-1} \leq \dots \leq S_1$$

PERCHÉ (S_{2k-1}) È DECRESCENTE

QUINDI (S_{2k}) E (S_{2k-1}) SONO TUTTE CONTENUTE NELL'INTERVALLO $[S_2, S_1]$.

IV° PASSO CONCLUSIONE.

ESSENDO (S_{2k}) ED (S_{2k-1}) MONOTONE E LIMITATE, ENTRAMBE AVRANNO LIMITE FINITO. SIA λ_1 IL LIMITE DI (S_{2k}) E λ_2 QUELLO DI (S_{2k-1}) . AVREMO CHE:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} - \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (S_{2k} - S_{2k-1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 0$$

QUINDI $\lambda_1 = \lambda_2$. QUINDI TUTTA (S_n) TENDE A λ_1 .

PERCHÉ $a_n \rightarrow 0$

ES.2 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ CONVERGE.

SVOLGIMENTO

POSTO $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, SI HA BANALMENTE $a_n \rightarrow 0$.

INOLTRE (a_n) È DECRESCENTE PERCHÉ VNEIN SI HA:

$$a_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = a_n$$

QUINDI LA CONVERGENZA SEGUE DAL CRITERIO DI LEIBNIZ.

ATTENZIONE: ERRORE FREQUENTE

QUANDO CORREGGO GLI SCRITTI, SPESSO TROVO QUESTO **ERRORE**:

$$(-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \approx (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \text{STUDIO } \sum (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ CHE CONVERGE PER LEIBNIZ}$$

NON SI PUÒ!!

PERCHÉ NON SONO A TERMINI POSITIVI

TALE AFFERMAZIONE, NON SOLO È FORMALMENTE SCORRETTA PERCHÉ SI APPLICA IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO TRA SERIE A SEGNO VARIABILE, HA PORTA IN CERTI CASI PROPRIO A RISULTATI ERRATI, COME SI VEDE NELL'ESEMPIO CHE SEGUE.

ES 3 STUDIARE IL CARATTERE DI $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$.

POSTA $a_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$, SI POTREBBE **ERRONEAMENTE** PENSARE CHE CONVERGA, VISTO

CHE $a_n \approx \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ E CHE $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ CONVERGE GRAZIE AL CR. DI LEIBNIZ.

MOSTRIAMO CHE INVECE $\sum a_n$ DIVERGE A $-\infty$.

SI RICORDI CHE:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{2}{(1+\xi)^3} \cdot x^3 \quad \left(\text{CON } \xi_x \text{ COMPRESO TRA } 0 \text{ E } x\right)$$

QUINDI:

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right) = \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}}_{A_n} - \underbrace{\frac{1}{2n}}_{B_n} + \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1+\xi_n)^3} \cdot \frac{(-1)^{3n+3}}{n\sqrt{n}}}_{C_n} \quad \left(\text{CON } \xi_n \text{ COMPRESO TRA } 0 \text{ E } \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$$

SI OSSERVI CHE PER $n \geq 2$ SI HA:

$$0 \leq \frac{1}{(1+\xi_n)^3} \leq \frac{1}{(1-\frac{1}{\sqrt{2}})^3} \leq \frac{1}{(1-\frac{2}{3})^3} = 27$$

QUINDI PER $n \geq 2$ SI HA:

$$|c_n| = \frac{1}{3} \cdot \left| \frac{1}{(1+\xi_n)^3} \right| \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{3} \cdot 27 \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}} = 9 \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

MA $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ CONVERGE, QUINDI $\sum |c_n|$ CONVERGE PER IL CR. DEL CONFRONTO.

QUINDI ANCHE $\sum c_n$ CONVERGE, PER IL CR. DELLA CONV. ASSOLUTA.

INOLTRE ANCHE $\sum a_n$ CONVERGE, GRAZIE AL CR. DI LEIBNIZ.

RIASSUMENDO, ABBIAMO TROVATO CHE

$$Q_n = A_n + B_n + C_n$$

CON $\sum a_n$ E $\sum c_n$ CHE CONVERGONO.

POSSIAMO QUINDI DIRE CHE $\sum Q_n$ E $\sum B_n$ HANNO LO STESSO CARATTERE.

MA $B_n = -\frac{1}{2^n}$, QUINDI $\sum B_n$ DIVERGE A $-\infty$. QUINDI ANCHE $\sum Q_n$ DIVERGE A $-\infty$.

TEO.3 (CRITERIO DI ABEL) DATE $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ E $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ SUCCESSIONI A VALORI IN $\mathbb{R}$ E SIA $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ LA SUCCESSIONE DELLE SOMME FINITE DI $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. SUPPONIAMO CHE:

(a) $a_n \rightarrow 0$ DECRESCENDO

(b) B_n È LIMITATA, CIOÈ $\sup_{n \in \mathbb{N}} |B_n| = M < +\infty$.

ALLORA $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ HA LO STESSO CARATTERE DI $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) B_n$, LA QUALE CONVERGE.

DIMO

MOSTRIAMO PRIMA CHE $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) B_n$ CONVERGE. SI NOTI CHE:

PERCHÉ (a_n) È DECRESCENTE

PERCHÉ $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} |B_n|$

(1)

$$|(a_n - a_{n+1}) B_n| = (a_n - a_{n+1}) \cdot |B_n| \leq M \cdot (a_n - a_{n+1})$$

MA $\sum_{n=0}^{+\infty} M \cdot (a_n - a_{n+1})$ CONVERGE A Ma_0 PERCHÉ:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n M(a_k - a_{k+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(M(a_0 - a_1) + M(a_1 - a_2) + M(a_2 - a_3) + \dots + M(a_n - a_{n+1}) \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} (Ma_0 - Ma_{n+1}) = Ma_0$$

PERCHÉ $a_n \rightarrow 0$

MA ALLORA, GRAZIE A (1) E AL CR. DEL CONFRONTO, ANCHE $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) B_n$ CONVERGE.

DI CONSEGUENZA, GRAZIE AL CR. DELLA ASSOLUTA CONVERGENZA, ANCHE $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) B_n$ CONVERGE.

MOSTRIAMO ORA CHE $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) B_n$ E $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ HANNO LO STESSO CARATTERE.

A TALE SCOPO INDICHIAMO CON (S_n) LA SUCCESSIONE DELLE SOMME FINITE DEL PRIMO E

CON (S_n) QUELLA DEL SECONDO.

SI HA:

$$\begin{aligned} S_n &= (a_0 - a_1)B_0 + (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + \dots + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + (a_n - a_{n+1})B_n = \\ &= a_0 B_0 + a_1(-B_0 + B_1) + a_2(-B_1 + B_2) + \dots + a_n(-B_{n-1} + B_n) - a_{n+1}B_n = \\ &= a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n - a_{n+1} b_n = \\ &= S_n - a_{n+1} b_n \end{aligned}$$

DA CUI SEGUE:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1} b_n + S_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

PERCHÉ $a_{n+1} b_n \rightarrow 0$, IN QUANTO
 $a_n \rightarrow 0$ E B_n È LIMITATA

ESISTE FINITO
PERCHÉ $\sum b_n (a_n - a_{n+1})$
CONVERGE

QUINDI $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ E $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) B_n$ CONVERGONO ALLO STESSO VALORE.

055.2 IL CR. DI LEIBNIZ SI OTTIENE COME CASO PARTICOLARE DEL CR. DI ABEL PONEENDO $b_n = (-1)^{n+1}$.

ES. 4 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(\frac{2}{3}n\pi)}{n}$ CONVERGE.

BASTA PORRE $a_n = \frac{1}{n}$ E $b_n = \cos(\frac{2}{3}n\pi)$. LE CONDIZIONI DEL CR. DI ABEL SONO VERIFICATE PERCHÉ:

1) $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ DECRESCENDO.

2) DA $b_n = \cos(\frac{2}{3}n\pi)$ SEGUE: $b_n = \begin{cases} 1 & \text{SE } n \text{ È MULTIPLO DI } 3 \\ -\frac{1}{2} & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$

QUINDI SE $B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ SI HA:

$$B_n = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{SE } n = 3k+1 \quad \text{CON } k \in \mathbb{N} \\ -1 & \text{SE } n = 3k+2 \quad \text{CON } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{SE } n = 3k \quad \text{CON } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

QUINDI (B_n) È LIMITATA

QUINDI POSSO APPLICARE IL T. DI ABEL E DIRE CHE LA SERIE CONVERGE.

ES. 5 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n}$ CONVERGE.

PONGO $a_n = \frac{1}{n}$ E $b_n = \cos n$.

CHE $a_n \rightarrow 0$ DECRESCENDO È OVVIO, RIMANE DA DIMOSTRARE CHE È LIMITATA (B_n) DEFINITA DA

$$B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n$$

A TALE SCOPO OSSERVIAMO CHE, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$, SI HA:

$$\cos n = \operatorname{Re}(e^{in})$$

QUINDI:

$$\begin{aligned} B_n &= \cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n = \operatorname{Re}(e^{i1}) + \operatorname{Re}(e^{i2}) + \dots + \operatorname{Re}(e^{in}) = \\ &= \operatorname{Re}(e^{i1} + (e^{i1})^2 + \dots + (e^{i1})^n) = \operatorname{Re}\left(e^{i1} \cdot (1 + e^{i1} + e^{i2} + \dots + e^{i(n-1)})\right) = \\ &= \operatorname{Re}\left(e^{i1} \cdot \underbrace{\frac{(e^{i1})^n - 1}{e^{i1} - 1}}_{z_n}\right) \end{aligned}$$

SI OTTIENE:

$$|z_n| = \left| e^{i1} \cdot \frac{(e^{i1})^n - 1}{e^{i1} - 1} \right| = \frac{|e^{i1}|}{|e^{i1} - 1|} \cdot |(e^{i1})^n - 1| \leq \frac{|e^{i1}|}{|e^{i1} - 1|} \cdot |e^{i1}|^n + 1 = \frac{2}{|e^{i1} - 1|}$$

DUNQUE, POSTO $M = \frac{2}{|e^{i1} - 1|}$, PER OGNI $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ SI HA $|z_n| < M$.

QUINDI, A MAGGIOR RAGIONE, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ SI HA $|\operatorname{Re}(z_n)| < M$, CIOE' $|B_n| < M$.

QUINDI POSSO APPLICARE IL CRITERIO DI ABEL E DIRE CHE LA SERIE CONVERGE
