8 aprile 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma *Tor Vergata*

SERIE NUMERICHE (...CONTINUA...)
(COMPLEMENTI E OSSERVAZIONI)

OSS. 1 (RELAZIONE TRA CR. DEL RAPPORTO E CR. DELLA RADICE)

DATA $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, A TERMINI STRETTAMENTE POSITIVI, LA CONDIZIONE $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to \ell$ È PIÙ FORTE DELLA CONDIZIONE $\sqrt[n]{a_n}\to\ell$. INFATTI SI HA:

1. SE $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to\ell\geq 0$ ALLORA ANCHE $\sqrt[n]{a_n}\to\ell$
2. ESISTONO CASI DI (a_n) TALI CHE $\sqrt[n]{a_n}\to\ell\geq 0$ MA $\frac{a_{n+1}}{a_n}\not\to\ell$.

DIM

1. BISOGNA MOSTRARE CHE:

(1) $\forall\varepsilon>0$ DEFINITIVAMENTE IN n $\ell-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<\ell+\varepsilon$

DIMOSTRIAMO PRIMA LA DISUGUAGLIANZA $\sqrt[n]{a_n}<\ell+\varepsilon$

A TALE SCOPO, SIA $n_0\in\mathbb{N}$ TALE CHE:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\ell+\frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{PER } n\geq n_0$$

PER $n>n_0$ SI HA:

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{a_{n_0}\cdot\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\cdot\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}}<$$

$$<\sqrt[n]{a_{n_0}\cdot\left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0}}=\sqrt[n]{a_{n_0}}\cdot\left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{n_0}{n}}\xrightarrow{\text{PER } n\to+\infty}\ell+\frac{\varepsilon}{2}$$

DI CONSEGUENZA, DEFINITIVAMENTE IN n $\sqrt[n]{a_n}<\ell+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\ell+\varepsilon$.

IN MODO DEL TUTTO ANALOGO SI DIMOSTRA CHE DEFINITIVAMENTE IN n SI HA $\sqrt[n]{a_n}>\ell-\varepsilon$, AVENDO CURA DI SCEGLIERE $\varepsilon>0$ IN MODO CHE $\ell-\varepsilon\geq 0$
(IN PARTICOLARE SE $\ell=0$ QUESTA SECONDA DISUGUAGLIANZA È GRATIS.)

QUINDI VALE **(1)**.

2 PRENDIAMO $a_n = \left(\rho + \frac{1+(-1)^n}{2n}\rho\right)^n$, CIOÈ:

$$a_n = \begin{cases} \rho^n & \text{SE } n \text{ È DISPARI} \\ \left(\rho + \frac{\rho}{n}\right)^n & \text{SE } n \text{ È PARI} \end{cases}$$

CHIARAMENTE SI HA:

$$\sqrt[n]{a_n} = \rho + \frac{1+(-1)^n}{2n}\rho \to \rho$$

PER $n \to +\infty$.

INVECE IL LIMITE DI $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ NON ESISTE PERCHÈ:

$$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \frac{\left(\rho + \frac{\rho}{2k}\right)^{2k}}{\rho^{2k-1}} = \rho \cdot \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k} \to \rho \cdot e$$

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{\rho^{2k+1}}{\left(\rho + \frac{\rho}{2k}\right)^{2k}} = \frac{\rho}{\left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k}} \to \frac{\rho}{e}$$

OSS. 2 ABBIAMO IMPARATO CHE IL CRITERIO DEL RAPPORTO NON CI AIUTA QUANDO $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ CRESCENDO. IN TAL CASO PUÒ AIUTARCI IL SEGUENTE:

TEO. 1 (CONFRONTO DI RAPPORTI)

DATE $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ E $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ A TERMINI STRETTAMENTE POSITIVI E TALI CHE,

(2) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \text{DEFINITIVAMENTE IN } n.$$

ALLORA:

1 $\sum b_n$ CONVERGE $\Rightarrow \sum a_n$ CONVERGE

2 $\sum a_n$ DIVERGE $\Rightarrow \sum b_n$ DIVERGE

DIMO

COME AL SOLITO POSSIAMO, SENZA PERDERE DI GENERALITÀ, SUPPORRE CHE LA **(2)** VALGA $\forall n \in \mathbb{N}$, INVECE CHE DEF. IN n.

IN TAL CASO $\forall n \in \mathbb{N}$ SI HA:

$$\frac{a_n}{a_0} = \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_1}{b_0} \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdot \ldots \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_n}{b_0}$$

DA CUI SEGUE:

$$\frac{a_n}{a_0} \leq \frac{b_n}{b_0}$$

CIOÈ:

$$a_n \leq \frac{a_0}{b_0} \cdot b_n$$

QUINDI, APPLICANDO IL CRITERIO DEL CONFRONTO, DALLA CONVERGENZA DI $\sum b_n$ SEGUE QUELLA DI $\sum a_n$ E, ANALOGAMENTE, DALLA DIVERGENZA DI $\sum a_n$ SEGUE QUELLA DI $\sum b_n$.

COROLLARIO 1

SIA $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ A TERMINI STRETTAMENTE POSITIVI E TALE CHE:

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} \geq 1 - \frac{1}{n} \qquad \text{DEFINITIVAMENTE IN } n$$

ALLORA $\sum B_n$ DIVERGE

DIMO

POSTO $A_n = \frac{1}{n-1}$, SI HA CHE $\sum A_n$ DIVERGE E INOLTRE:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

QUINDI, DEF. IN n SI HA:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = 1 - \frac{1}{n} \leq \frac{B_{n+1}}{B_n}$$

APPLICANDO IL TEO.1, DALLA DIVERGENZA DI $\sum A_n$ SEGUE QUELLA DI $\sum B_n$.

ES.1 STUDIARE LA CONVERGENZA DI $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!} A^n$ AL VARIARE DI $A>0$.

SVOLGIMENTO

APPLICHIAMO IL CR. DEL RAPPORTO

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot A^{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n^{2n}} \cdot \frac{1}{A^n} =$$

$$= \frac{(n+1)^{\cancel{2}} \cdot (n+1)^{2n}}{\underset{2}{\cancel{(2n+2)}}(2n+1)\cdot \cancel{(2n)!}} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{n^{2n}} \cdot \frac{A^{\cancel{n+1}}}{\cancel{A^n}}$$

$$= \frac{n+1}{2n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \cdot \frac{A}{2} = \frac{2n+2}{2n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} \cdot \frac{A}{4} \to \frac{A}{4} \cdot e^2 \begin{cases} <1 & \text{SE } 0<A<\frac{4}{e^2} \\ =1 & \text{SE } A=\frac{4}{e^2} \\ >1 & \text{SE } A>\frac{4}{e^2} \end{cases}$$

QUINDI PER $0<A<\frac{4}{e^2}$ LA SERIE CONVERGE E PER $A>\frac{4}{e^2}$ DIVERGE.

RIMANE DA STABILIRE IL COMPORTAMENTO PER $A=\frac{4}{e^2}$. IN TAL CASO SI HA:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+2}{2n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\cdot e^{-2} =$$

$$= \frac{2n+1+1}{2n+1}\cdot e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}\cdot e^{-2} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\cdot e^{2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-2} =$$

$$2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-2 = 2n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-2 = \cancel{2}-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\cancel{-2} = -\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\cdot e^{-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= 1+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$\frac{n+1}{(2n+1)n} = \frac{2n+1+1}{(2n+1)2n} = \frac{1}{2n}+\frac{1}{(2n+1)2n} = \frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1-\frac{n+1}{(2n+1)n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

QUINDI:

DEF. IN n

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) > 1-\frac{1}{n}$$

QUINDI POSSO APPLICARE IL COROLLARIO 1 E DIRE CHE PER $A=\frac{4}{e^2}$ LA SERIE DIVERGE.

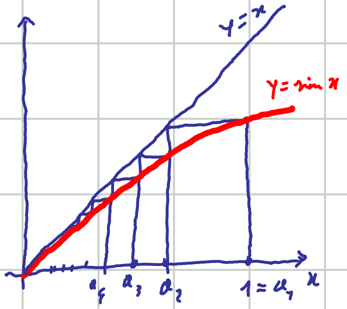
OSS. 3 (STUDIO DI $\sum a_n$ QUANDO (a_n) È DEFINITA PER RICORRENZA)

UN PROBLEMA DEL GENERE È GIÀ STATO TRATTATO IN ES. 9 DI LEZ. 12, IN UN CASO NON CRITICO CIOÈ CON UNA LEGGE RICORRENTE DEL TIPO $a_{n+1}=f(a_n)$ IN CUI f DI CLASSE C^1 SODDISFA $f(0)=0$ E $0<f'(0)<1$. VEDIAMO ORA COME SI PUÒ ATTACCARE IL PROBLEMA QUANDO $f'(0)=1$.

ES. 2 SIA (a_n) DEFINITA DA:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sin(a_n) \end{cases}$$

DIRE SE $\sum a_n$ CONVERGE.



SVOLGIMENTO

(3)

MOSTRIAMO PER INDUZIONE CHE $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}-\{0\}\quad 0<a_{n+1}<a_n<\frac{\pi}{2}.}$

PER $n=1$ È OVVIO PERCHÉ:

$$0<\sin 1<1<\frac{\pi}{2}$$

INOLTRE, VISTO CHE SU $[0,\frac{\pi}{2}]$ $\sin x$ È STRETTAMENTE CRESCENTE E SODDISFA $0<\sin x<x$, SE VALE $0<a_{k+1}<a_k<\frac{\pi}{2}$ ALLORA VALE ANCHE $0<\sin(a_{k+1})<\sin(a_k)<\frac{\pi}{2}$ CIOÈ:

$$0<a_{k+2}<a_{k+1}<\frac{\pi}{2}$$

QUINDI, PER INDUZIONE, VALE **(3)**.

QUINDI (a_n) È DECRESCENTE E LIMITATA QUINDI HA UN LIMITE FINITO ℓ.

MA ℓ DEVE SODDISFARE:

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sin(a_n) = \sin \ell$$

CIOÈ:

$$\ell = \sin \ell$$

DA CUI SEGUE $\ell = 0$.

QUINDI $a_n \to 0$ DECRESCENDO, IN PARTICOLARE È A TERMINI POSITIVI.

PER MOSTRARE CHE $\sum a_n$ DIVERGE BASTERÀ MOSTRARE CHE:

(4) $$a_n \geq \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}-\{0\}$$

E POI APPLICARE IL CR. DEL CONFRONTO

DIMOSTRIAMO **(4)** PER INDUZIONE.

PER $n=1$ È OVVIO PERCHÈ $a_1 = 1$.

SE POI VALE PER $n=k$, ALLORA SFRUTTANDO LA CRESCENZA DI $\sin x$ SU $[0,1]$ SI HA:

PERCHÈ: $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} \geq \frac{1}{k\cdot 2k} \geq \frac{1}{6k^2}$

$$\sin(a_k) \geq \sin\frac{1}{k} \geq \frac{1}{k} - \frac{1}{6k^2} \geq \frac{1}{k+1}$$

DA QUESTO, RICORDANDO CHE $a_{k+1} = \sin(a_k)$, SEGUE CHE $a_{k+1} \geq \frac{1}{k+1}$.

QUINDI, PER INDUZIONE, VALE LA **(4)**.

MA ALLORA, VISTO CHE $\sum \frac{1}{n}$ DIVERGE, PER IL CR. DEL CONFRONTO ANCHE $\sum a_n$ DIVERGE.

ES.3 DATA (a_n) DEFINITA DA:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = -\sin(a_n) \end{cases}$$

STUDIARE IL CARATTERE DI $\sum a_n$.

MOSTRIAMO CHE, POSTO $b_n = |a_n|$, ALLORA:

PERCHÈ $-1 \leq a_n \leq 1$ PER OGNI n E INOLTRE SU $[-1,1]$ $\sin x$ È DISPARI E CRESCENTE

$$b_{n+1} = |a_{n+1}| = |\sin a_n| = \sin|a_n| = \sin b_n$$

INOLTRE $b_1 = |a_1| = 1$.

QUINDI (b_n) SODDISFA

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = \sin b_n \end{cases}$$

DA $\boxed{\text{ES.2}}$ SAPPIAMO CHE $b_n \to 0$ DECRESCENDO.

MOSTRIAMO INFINE CHE $a_n = (-1)^{n+1} b_n$.

ANCHE QUESTO SI DIMOSTRA SUBITO PER INDUZIONE VISTO CHE PER $n=1$ È OVVIO E, SE VALE PER $n=k$, PER $n=k+1$ SI OTTIENE:

$$a_{k+1} = -\sin(a_k) = -\sin\left((-1)^{k+1} b_k\right) = (-1)^{k+2} \sin(b_k) = (-1)^{k+2} b_{k+1}$$

IN DEFINITIVA $\sum a_n$ È DELLA FORMA $\sum (-1)^{n+1} b_n$, CON $b_n \to 0$ DECRESCENDO. QUINDI CONVERGE GRAZIE AL CR. DI LEIBNIZ.

$\boxed{\text{OSS. 4}}$ TIPICO ERRORE CHE SI PUÒ FARE QUANDO SI STUDIANO LE SERIE È PENSARE CHE SODDISFINO AUTOMATICAMENTE TUTTE LE PROPRIETÀ DELLE SOMME FINITE. INVECE SPESSO NON È COSÌ, COME VEDIAMO TRA POCO.

$\boxed{\text{DEF. 1}}$ DATE DUE SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ E $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, DIREMO CHE $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ È UN RIARRANGIAMENTO DI $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ SE $\exists\ m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ BIUNIVOCA TALE CHE $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n = a_{m_n}$.

$\boxed{\text{ES. 4}}$ MOSTRARE CHE ESISTE UN RIARRANGIAMENTO $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ DI $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ TALE CHE $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ CONVERGE A 2020.

POSTO $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, DEFINIAMO LE DUE SUCCESSIONI (P_k) E (N_k) COSÌ.

$$P_k = a_{2k-1} = \frac{1}{2k-1} \qquad \text{E} \qquad N_k = a_{2k} = -\frac{1}{2k}$$

OVVERO (P_k) È LA SUCCESSIONE DEI TERMINI POSITIVI DI (a_n), PRESI NELL'ORDINE IN CUI STANNO, MENTRE (N_k) È QUELLA DEI TERMINI NEGATIVI.

SI NOTI CHE:

(5) $$\sum P_k = \sum \frac{1}{2k-1} = +\infty \qquad \text{E} \qquad \sum N_k = \sum -\frac{1}{2k} = -\infty .$$

SCELGO I TERMINI PER (b_n) RISPETTANDO LE SEGUENTI REGOLE (DOVE $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$):

1) $b_1 = P_1$

2) $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$, SE $\overset{(A)}{\boxed{S_n \leq 2020}}$ PRENDO b_{n+1} = TERMINE DI (P_k) CON INDICE PIÙ BASSO CHE NON È ANCORA STATO PRESO

SE $\overset{(B)}{\boxed{S_n > 2020}}$ PRENDO b_{n+1} = COME SOPRA MA DA (N_k)

SI NOTI CHE NON PUÒ SUCCEDERE CHE DEFINITIVAMENTE VALGA (A) (OPPURE (B)) GRAZIE A (5). QUESTO GARANTISCE CHE FREQUENTEMENTE IN n SI PRENDE UN TERMINE DA (P_k) E LO STESSO DA (N_k). QUINDI $\sum b_n$ È EFFETTIVAMENTE UN RIARRANGIAMENTO DI $\sum a_n$.

PER MOSTRARE CHE $\forall \varepsilon > 0$ DEFINIT. IN n SI HA $|S_n - 2020| < \varepsilon$ BASTA OSSERVARE CHE (P_k) E (N_k) SONO INFINITESIME E CHE:

$$N_{k_1} \leq S_n - 2020 \leq P_{k_2}$$

DOVE N_{k_1} E P_{k_2} SONO GLI ULTIMI TERMINI PRESI DA (N_k) E (P_k).

OSS.5 NELL'ESEMPIO 4 NON C'È NULLA DI SPECIALE NEL NUMERO 2020: PROCEDENDO IN MODO SIMILE SI POTEVA MOSTRARE CHE $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\exists$ UN RIARRANGIAMENTO DI $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ CHE CONVERGE A λ.
NON SOLO: SI POTEVANO ANCHE COSTRUIRE RIARRANGIAMENTI DIVERGENTI O INDETERMINATI.

OSS.6 ESSENZIALE PERCHÈ IL PROCEDIMENTO DELL'ESEMPIO 4 FUNZIONI È CHE LE SERIE (P_k) E (N_k) SIANO ENTRAMBE INFINITESIME E CHE $\sum P_k = +\infty$ E $\sum N_k = -\infty$.
EBBENE CIÒ ACCADE PER OGNI SERIE CHE SIA CONVERGENTE MA NON ASSOLUTAMENTE.
A TALI SERIE QUINDI SI ESTENDE IL RISULTATO.
