Analisi Matematica (II modulo)- Lez. 15

Titolo nota 15/08/2014

10 aprile 2020 (9.00-11.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

SERIE NUMERICHE (...CONTINUA...)

(ESERCIZI)

SONO STATI SVOLTI I PROB. 2 - 5 - 9 - 3 - 10 - 12 DELLA LISTA PROPOSTA

$\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$ È CONVERGENTE MA NON ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE.

SVOLGIMENTO

NON È ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE PERCHÉ:

$$\left|\frac{(-1)^n}{n+\sin n}\right| = \frac{1}{n+\sin n} \approx \frac{1}{n}$$

E $\sum \frac{1}{n}$ DIVERGE.

PER LA CONVERGENZA SEMPLICE SI OSSERVI CHE È DELLA FORMA $\sum(-1)^n a_n$ CON:

$$a_n = \frac{1}{n+\sin n}$$

PER MOSTRARE CHE $a_n \to 0$ DECRESCENDO BASTA MOSTRARE CHE $f(x) = x + \sin x$ TENDE A $+\infty$ CRESCENDO. SI HA:

$$f(x) = x + \sin x \approx x \to +\infty \quad (\text{PER } x \to +\infty)$$

E

$$f'(x) = 1 + \cos x \geq 0 \Rightarrow f \text{ È CRESCENTE}$$

QUINDI $a_n \to 0$ DECRESCENDO E, DI CONSEGUENZA, $\sum(-1)^n a_n$ CONVERGE GRAZIE AL CR. DI LEIBNIZ.

OSS.1 NEL PR. $\boxed{2}$ PER STUDIARE LA MONOTONIA DI (a_n) SI È STUDIATA QUELLA DELLA

FUNZIONE $f(x)$ OTTENUTA DA (a_n) SCRIVENDO x AL POSTO DI n. OVVIAMENTE SE $f(x)$ È MONOTONA LO È ANCHE a_n. TUTTAVIA PUÒ ACCADERE CHE (a_n) SIA MONOTONA SENZA CHE $f(x)$ LO SIA. AD ESEMPIO SE NEL PR. $\boxed{1}$ FOSSE STATO:

$$a_n = \frac{1}{10n + \sin(n^2)}$$

LA (a_n) ERA UGUALMENTE DECRESCENTE PERCHÉ:

PERCHÉ $\blacksquare > 10 - 2 > 0$

$$a_{n+1} = \frac{1}{10(n+1) + \sin((n+1)^2)} = \frac{1}{10n + \sin(n^2) + \boxed{\left(10 + \sin((n+1)^2) - \sin(n^2)\right)}} < \frac{1}{10n + \sin(n^2)} = a_n$$

TUTTAVIA LA FUNZIONE $f(x) = 10x + \sin(x^2)$ NON È CRESCENTE PERCHÉ:

$$f'(x) = 10 + 2x\cos(x^2)$$

CHE PER $x \to +\infty$ È FREQUENTEMENTE NEGATIVA, PER COLPA DEL TERMINE $2x\cos(x^2)$ CHE FA OSCILLAZIONI SEMPRE PIÙ AMPIE.

$\boxed{5}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2+4n+8}{n^3+2n^2+7n}$ **È CONVERGENTE MA NON ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE.**

SVOLGIMENTO

POSTO $a_n = \dfrac{n^2+4n+8}{n^3+2n^2+7n}$ SI HA:

(1) $$a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2+4n+8}{n^2+2n+7} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2+2n+7+2n+1}{n^2+2n+7} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{2n+1}{n^2+2n+7}\right) \simeq \frac{1}{n}$$

QUINDI $|(-1)^n a_n| \simeq \frac{1}{n}$ E, DI CONSEGUENZA $\sum |(-1)^n a_n|$ DIVERGE.

PASSIAMO ALLA CONVERGENZA SEMPLICE.

SE VOGLIAMO APPLICARE IL CR. DI LEIBNIZ NON BASTA LA (1): ESSA CI DICE SOLO CHE $a_n \to 0$ DALL'ALTO, MA NON CHE a_n DECRESCE. PER POTER APPLICARE LEIBNIZ DOBBIAMO COMUNQUE ANCORA MOSTRARE LA MONOTONIA DI (a_n) FACENDO QUALCHE ULTERIORE CALCOLO. POSSIAMO PERÒ EVITARE QUESTI CALCOLI SE, INVECE DEL CR. DI LEIBNIZ, DECIDIAMO DI USARE UN ALTRO METODO.

PIÙ PRECISAMENTE RICORDIAMO CHE SE ALLA NOSTRA SERIE SOTTRAIAMO UNA SERIE CONVERGENTE, IL CARATTERE NON CAMBIA.

SCEGLIAMO PROPRIO QUESTA PERCHÉ $a_n \simeq \frac{1}{n}$

SCEGLIAMO COME SERIE DA SOTTRARRE $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, CHE CONVERGE GRAZIE A LEIBNIZ.

PER QUANTO OSSERVATO IL CARATTERE DI $\sum (-1)^n a_n$ È UGUALE A QUELLO DI:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^n a_n - (-1)^n \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(a_n - \frac{1}{n}\right) = \sum (-1)^n \frac{2n+1}{n^3+2n^2+7}$$

MA L'ULTIMA CONVERGE ASSOLUTAMENTE PERCHÈ $\left|(-1)^n \frac{2n+1}{n^3+2n^2+7}\right| \approx \frac{2}{n^2}$, QUINDI

È ANCHE CONVERGENTE. QUINDI CONVERGE ANCHE LA NOSTRA SERIE.

$\boxed{9}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n \ln n + 1}$ **È CONVERGENTE MA NON ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE.**

$\boxed{\text{SVOLGIMENTO}}$

LA SERIE È DELLA FORMA $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ CON

$$a_n = \frac{n}{n \ln n + 1} = \frac{1}{\ln n + \frac{1}{n}}$$

QUINDI $|(-1)^n a_n| \gtrsim \frac{1}{\ln n}$ E, DI CONSEGUENZA NON C'È LA CONVERGENZA ASSOLUTA

PER LA CONVERGENZA SEMPLICE INVECE SI OSSERVI CHE POSTO

$$f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$$

SI HA OVVIAMENTE CHE $f(x) \to +\infty$ PER $x \to +\infty$ E INOLTRE

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) > 0$$ PER $x > 1$

QUINDI $f(x) \to +\infty$ CRESCENDO E, DI CONSEGUENZA:

$$a_n = \frac{1}{\ln n + \frac{1}{n}} \to 0$$ DECRESCENDO

QUINDI $\sum (-1)^n a_n$ CONVERGE GRAZIE A LEIBNIZ

$\boxed{3}$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n \ln n}$ **È CONVERGENTE MA NON ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE**

$\boxed{\text{SVOLGIMENTO}}$

LA SERIE È DELLA FORMA $\sum (-1)^n a_n$ CON:

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n \ln n} = e^{n \ln n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

POSTO $f(x) = x \ln x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ SI HA

(2) $$f(x) = x \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = -\ln x + o\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

DA CUI SEGUE:

$$|(-1)^n a_n| = a_n = e^{-\ln n + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)} = \frac{1}{n}\cdot e^{O\left(\frac{\ln n}{n}\right)} \approx \frac{1}{n} e^0 = \frac{1}{n}$$

QUINDI LA SERIE NON È ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE.

PER LA CONVERGENZA SEMPLICE SI OSSERVI CHE DA **(2)** SEGUE CHE $f(x) \to -\infty$ PER $x \to +\infty$.

INOLTRE SI HA:

$$f'(x) = \left(x \ln x \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)' =$$

$$= \ln x \ln\left(1-\frac{1}{x}\right) + x\cdot\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) + x\ln x\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \ln x \ln\left(1-\frac{1}{x}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{x}\right) + \ln x\cdot\frac{1}{x-1} =$$

$$= \ln x\cdot\left(\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x-1}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{x}\right) =$$

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{x-x+1}{(x-1)x} = \frac{1}{(x-1)x} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \ln x\cdot\left(-\frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) =$$

DEFIN. IN n

$$= \ln x\cdot O\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x}\left(1+o(1)\right) < 0$$

QUINDI $f'(x)$ È DEFINITIVAMENTE NEGATIVA. CIÒ SIGNIFICA CHE $f(x)$ È DEFINITIVAMENTE DECRESCENTE.

RIASSUMENDO:

$$f(x) = x\ln x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) \to -\infty \quad \text{DECRESCENDO}$$

QUINDI:

$$e^{x\ln x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} \to 0 \quad \text{DECRESCENO.}$$

E QUINDI

$$a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n\ln n} = e^{n\ln n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} \to 0 \quad \text{DECRESCENDO.}$$

DI CONSEGUENZA $\sum(-1)^n a_n$ CONVERGE GRAZIE A LEIBNIZ.

OSS. 2 DURANTE LA LEZIONE È STATO PROPOSTO DA UNO STUDENTE UN PROCEDIMENTO ALTERNATIVO PIÙ CORTO PER DIMOSTRARE LA MONOTONIA DI a_n. SUL MOMENTO MI SEMBRAVA CORRETTO MA PURTROPPO, ALL'ATTO DI RIPORTARLO NELLE DISPENSE, MI SONO ACCORTO CHE AVEVA UN ERRORE DI SEGNO. LO RIPORTO COMUNQUE PER COMPLETEZZA, SEGNALANDO L' **ERRORE**.

SI TRATTAVA DI DIMOSTRARE CHE $F'(x)<0$ DOVE $F(x) = h(x)^{g(x)}$ CON $h(x) = 1-\frac{1}{x}$ E $g(x) = x\ln x$

SI HA:

$$F'(x) = \left(e^{g(x)\ln(h(x))}\right)' = F(x)\cdot\left(\underbrace{g'(x)\ln(h(x))}_{<0} + \underbrace{g(x)\frac{h'(x)}{h(x)}}\right) < 0 \quad ?$$

PERCHÉ $g'(x) > 0$ E $\ln(h(x)) < 0$

QUI È L'ERRORE: QUESTO PEZZO NON È < 0 MA DEFINITIVAMENTE > 0

SICCOME I DUE TERMINI HANNO SEGNO OPPOSTO NON SI PUÒ STABILIRNE IL SEGNO (DEF. IN x) SENZA STABILIRE CHI VINCE (CIOÈ USANDO GLI SVILUPPI

---

10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1\right)$ **DIVERGE A $+\infty$**

SVOLGIMENTO

PER $x \to 0$ SI HA:

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

QUINDI, PER $n \to +\infty$ SI HA:

$$a_n = e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

PERÒ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CONVERGE GRAZIE A LEIBNIZ MENTRE $\sum O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE PERCHÉ $\left|O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right| \leq \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$, PER UN'OPPORTUNA COSTANTE $C > 0$.

QUINDI IL CARATTERE DI $\sum a_n$, CIOÈ DI:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)$$

TOGLIENDO I 2 TERMINI LA CUI SERIE CONVERGE IL CARATTERE NON CAMBIA

È UGUALE AL CARATTERE DI: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n}$

CHE DIVERGE A $+\infty$.

---

12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+(-1)^n n}$ **DIVERGE A $-\infty$**

OSSERVIAMO CHE È DELLA FORMA $\displaystyle\sum_{n=1}^{n}(-1)^n a_n$ DOVE

$$a_n = \frac{1}{(2+(-1)^n)n} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{PER } n \text{ DISPARI} \\ \frac{1}{3n} & \text{PER } n \text{ PARI} \end{cases}$$

QUINDI $a_n \to 0$, MA NON È DECRESCENTE. PER QUESTO MOTIVO NON FUNZIONA IL CRITERIO DI LEIBNIZ.

PER STUDIARNE IL CARATTERE PROPONIAMO 2 METODI:

$\boxed{\text{PRIMO METODO}}$

LE 2 SERIE:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \qquad \text{E} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left((-1)^n a_n - (-1)^n \cdot \frac{1}{2n} \right)$$

HANNO LO STESSO CARATTERE, PERCHÈ $\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{2n}$ CONVERGE, QUINDI BASTA STUDIARE IL CARATTERE DELLA SECONDA. SI OSSERVI CHE:

$$(-1)^n a_n + \frac{(-1)^n}{2n} = (-1)^n \left(\frac{1}{2n+(-1)^n n} - \frac{1}{2n} \right) = \frac{(-1)^n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2+(-1)^n} - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{2-2-(-1)^n}{2\cdot(2+(-1)^n)} = -\frac{(-1)^{2n}}{2n} \cdot \frac{1}{2+(-1)^n} = \frac{-1}{2n(2 \pm (-1)^n)} = \begin{cases} -\frac{1}{2n} & \text{SE } n \text{ DISPARI} \\ -\frac{1}{6n} & \text{SE } n \text{ PARI} \end{cases}$$

QUINDI, IN OGNI CASO, SI HA:

$$(-1)^n a_n + \frac{(-1)^n}{2n} \leq -\frac{1}{6n}$$

DA CUI SEGUE CHE:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left((-1)^n a_n + \frac{(-1)^n}{n} \right) \quad \text{DIVERGE A } -\infty.$$

MA ALLORA, VISTO CHE $\sum (-1)^n a_n$ HA LO STESSO CARATTERE, ANCH'ESSA DIVERGE A $-\infty$.

$\boxed{\text{SECONDO METODO}}$

SIA (S_n) LA SUCCESSIONE DELLE SOMME FINITE DELLA NOSTRA SERIE.

VOGLIAMO MOSTRARE CHE $S_n \to -\infty$.

PER COMINCIARE MOSTRIAMO CHE LA SUA SOTTOSUCCESSIONE $S_{2n} \to -\infty$.

POSTO $a_k = \frac{1}{2k+(-1)^k \cdot k}$, SI HA:

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{2k-1} a_{2k-1} + (-1)^{2k} a_{2k} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(-a_{2k-1} + a_{2k} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{2(2k-1)-(2k-1)} + \frac{1}{2(2k)+2k} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{6k} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{-6k+2k-1}{(2k-1)6k} = \sum_{k=1}^{n} -\frac{4k+1}{12k^2-6k}$$

QUINDI, SICCOME $S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{4k+1}{12k^2-6k}\right)$, PER MOSTRARE CHE $S_{2n} \to -\infty$

BASTA VERIFICARE CHE:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{4k+1}{12k^2-6k} \quad \text{DIVERGE A } -\infty,$$

COSA CHE SEGUE SUBITO DAL FATTO CHE $-\frac{4k+1}{12k^2-6k} \approx -\frac{1}{3k}$.

RIMANE DA VERIFICARE CHE ANCHE $S_{2n+1} \to -\infty$.

A TALE SCOPO OSSERVIAMO CHE:

$$a_n = \frac{1}{2n+(-1)^n} \to 0$$

E QUINDI:

$$S_{2n+1} = S_{2n} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} \longrightarrow -\infty + 0 = -\infty$$

QUINDI SIA (S_{2n}) CHE (S_{2n+1}) TENDONO A $-\infty$ E PERCIÒ TUTTA (S_n) TENDE A $-\infty$

CIÒ SIGNIFICA CHE $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ DIVERGE A $-\infty$.