

Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 18

Titolo nota

15/08/2014

20 aprile 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

SUCCESIONI DI FUNZIONI (...CONTINUA...)

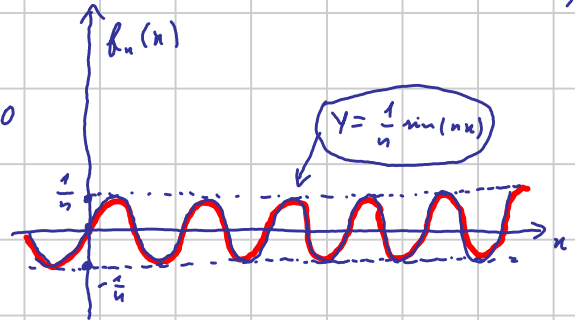
OSS.1 NON C'È UN TEOREMA DI PASSAGGIO AL LIMITE PER LA DERIVATA ANALOGO AL TEO.3 LEZ.17,

OVVERO: $f_n \rightarrow f$ UNIF. $\nRightarrow f'_n \rightarrow f'$,

AD ESEMPIO SE PRENDO $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$ E $f(x) \equiv 0$

SI HA $d(f_n, f) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ MA $f'_n(x) = \cos(nx)$

E QUINDI $d(f'_n, f') = 1 \nrightarrow 0$.



OSS.2 LA DERIVABILITÀ NON È UNA PROPRIETÀ

CHE SI MANTIENE PASSANDO AL LIMITE, OVVERO

$$\left((f_n \text{ DERIVABILE } \forall n) \text{ E } (f_n \rightarrow f \text{ UNIF.}) \right) \nRightarrow (f \text{ DERIVABILE})$$

AD ESEMPIO, PRESE $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$ E $f(x) = |x|$

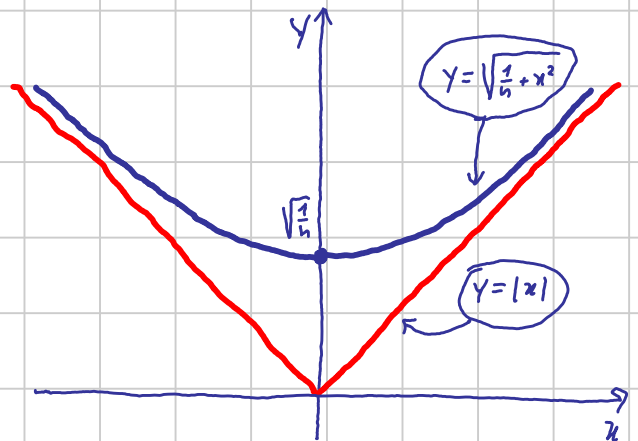
SU TUTTO $\mathbb{R}$, SI HA:

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sqrt{\frac{1}{n} + x^2} - |x| \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n} + x^2} + |x|} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad \text{PER } n \rightarrow +\infty$$

QUINDI $f_n \rightarrow f$ UNIF., TUTTAVIA $f(x) = |x|$ NON È DERIVABILE IN 0 MENTRE:

$$f'_n(x) = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{n} + x^2}}$$

QUINDI TUTTE LE f_n SONO DERIVABILI IN 0 E SI HA $f'_n(0) = 0$.



TEO. 1 DATE $g \in C([a, b])$ E $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ A VALORI IN $C^1([a, b])$ TALI CHE:

(1) $f'_n \rightarrow g$ UNIFORMEMENTE

(2) $\exists x_0 \in [a, b]$ TALE CHE $f_n(x_0) \rightarrow y_0 \in \mathbb{R}$

ALLORA $\exists f \in C^1([a, b])$ TALE CHE $f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE E $f' = g$.

DIMO

SIA $f(x) = y_0 + \int_{x_0}^x g(t) dt$, VISTO CHE $f'(x) = g(x)$, SE DIMOSTRIAMO CHE $f_n \rightarrow f$ UNIFORM.

ABBIAMO VINTO.

A TALE SCOPO $\forall \varepsilon > 0$ PRENDIAMO $n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE:

(1) $n \geq n_0 \Rightarrow d(f'_n, g) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ (POSSIAMO FARLO GRAZIE A (1))

E PRENDIAMO $n_1 \in \mathbb{N}$ TALE CHE:

(2) $n \geq n_1 \Rightarrow |f_n(x_0) - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ (POSSIAMO FARLO GRAZIE A (2))

ORA, SE $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ PER OGNI $x \in [a, b]$ SI HA:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt - y_0 - \int_{x_0}^x g(t) dt \right| =$$

$$= \left| f_n(x_0) - y_0 + \int_{x_0}^x (f'_n(t) - g(t)) dt \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{|f_n(x_0) - y_0|}_{\text{GRAZIE A (2)}} + \underbrace{\left| \int_{x_0}^x (f'_n(t) - g(t)) dt \right|}_{\text{GRAZIE A (1)}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_{x_0}^x \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dt \right| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

RIASSUMENDO:

$\forall \varepsilon > 0$ DEFINITIVAMENTE IN n $\forall x \in [a, b]$ SI HA $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

CIO' SIGNIFICA CHE $f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE.

MA VISTO CHE f ERA DEFINITA DA:

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^x g(t) dt$$

SI HA CHE $f \in C^1([a, b])$ ED $f' = g$.

ES. 1 DATA $(f_n)_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$ DEFINITA SU $[0, 2]$ DA $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$. STUDIARE LA CONVERGENZA:

- a PUNTUALE DI (f_n)
- b UNIFORME DI (f_n)
- c UNIFORME DI (f'_n)

SVOLGIMENTO

a SE $x \in [0, 1]$ SI HA:

$$1 \leq \sqrt[n]{1+x^n} \leq \sqrt[n]{2}$$

QUINDI, SICCOME $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$, ANCHE $\sqrt[n]{1+x^n} \rightarrow 1$.

SE $x \in (1, 2]$ SI HA:

$$x = \sqrt[n]{x^n} < \sqrt[n]{1+x^n} < \sqrt[n]{x^n+x^n} = \sqrt[n]{2} \cdot x$$

QUINDI, SEMPRE GRAZIE AL FATTO CHE $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$, SI HA $\sqrt[n]{1+x^n} \rightarrow x$.

PERCIÒ, POSTO:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \in [0, 1] \\ x & \text{SE } x \in (1, 2] \end{cases}$$

SI OTTIENE CHE $f_n \rightarrow f$ PUNTUALMENTE.

b PER OGNI $x \in [0, 1]$ SI HA:

$$|f_n(x) - f(x)| = |\sqrt[n]{1+x^n} - 1| = \sqrt[n]{1+x^n} - 1 \leq \sqrt[n]{1+1^n} - 1 = \sqrt[n]{2} - 1$$

INVECE, PER OGNI $x \in [1, 2]$, SI HA:

$$|f_n(x) - f(x)| = |\sqrt[n]{1+x^n} - x| = \sqrt[n]{1+x^n} - \sqrt[n]{x^n} = \frac{\sqrt[n]{1+x^n} - \sqrt[n]{x^n}}{(1+x^n) - (x^n)} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}} \leq \frac{1}{n}$$

QUINDI SU $[0, 2]$ SI HA:

$$0 \leq d(f_n, f) = \sup_{x \in [0, 2]} |f_n(x) - f(x)| \leq \max\{\sqrt[n]{2} - 1, \frac{1}{n}\} \rightarrow 0$$

QUINDI $d(f, f_n) \rightarrow 0$ E PERCIÒ $f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE

c (f'_n) NON PUÒ CONVERGERE UNIFORMEMENTE AD ALCUNA FUNZIONE g .

INFATTI, SE PER ASSURDO COSÌ FOSSE, VISTO CHE $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ $f'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{\sqrt[n]{(1+x^n)^{n-1}}}$

PERCHÈ, PER OGNI FISSATO n ,
 $\sqrt[n]{1+x^n}$ È CRESCENTE IN x

CON $\xi \in (x^n, x^n+1)$, GRAZIE AL
TEO. DI LAGRANGE APPLICATO ALLA
FUNZIONE $f(t) = \sqrt[n]{t}$

PERCHÈ $f'(\xi) = \frac{1}{n \sqrt[n]{\xi^{n-1}}}$

PER $n \rightarrow +\infty$

È CONTINUA, DOVREBBE ESSERE CONTINUA ANCHE g .

MA ALLORA, APPLICANDO IL TEO. 1, DOVREBBE ESSERE $f'(x) = g(x)$ SU TUTTO $[0,2]$,

MA QUESTO È ASSURDO PERCHÉ $f'(1)$ NON ESISTE

Oss. 3

ANCHE SE IN GENERALE LA CONVERGENZA PUNTUALE NON IMPLICA QUELLA UNIFORME
CI SONO CASI IN CUI, CON QUALCHE CONDIZIONE AGGIUNTIVA, LO FA.

QUI DI SEGUITO NE RIPORTIAMO 2, IL PRIMO DEI QUALI PERMETTEVA DI SVOLGERE IN UNA
RIGA IL PUNTO **b** DELL'ES. PRECEDENTE.

TEO2

DATI $f \in C([a,b])$ E $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ A VALORI IN $B([a,b])$ TALE CHE $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n È

CRESCENTE. SUPPONIAMO INOLTRE CHE $f_n \rightarrow f$ PUNTUALMENTE.

ALLORA ANCHE f È CRESCENTE E $f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE.

DIMO

INTANTO f È CRESCENTE PERCHÉ $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ CON $x_1 > x_2$ SI HA:

$$f(x_1) - f(x_2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_1) - \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x_1) - f_n(x_2)) \geq 0$$

PERCHÉ $\forall n$ f_n È CRESCENTE
E QUINDI $f_n(x_1) - f_n(x_2) \geq 0$,
DI CONSEGUENZA ANCHE
IL LIMITE È ≥ 0

QUINDI, SE $x_1 > x_2$ SI HA $f(x_1) \geq f(x_2)$, CIOÈ f È CRESCENTE.

MOSTRIAMO ORA CHE LA CONVERGENZA È UNIFORME.

OSSERVIAMO CHE, GRAZIE AL TEO. DI HEINE-CANTOR, f È UNIFORMEMENTE CONTINUA.

ORA $\forall \varepsilon > 0$ SIA $\delta > 0$ TALE CHE

(3)

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

PRENDIAMO $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ UNA PARTIZIONE DI $[a,b]$ TALE CHE:

$$x_k - x_{k-1} < \delta$$

PER OGNI $k = 1, \dots, m$.

IN QUESTO MODO, SE x E y STANNO NELLO STESSO INTERVALLINO, DISTANO MENO DI δ
E QUINDI POSSO APPLICARE **(3)**. INSOMMA, $\forall k = 1, \dots, m$ VALE L'IMPLICAZIONE:

(4)

$$x, y \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ORA, GRAZIE AL FATTO CHE $f_n \rightarrow f$ PUNTUALMENTE, SI HA

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_k) = f(x_k) \quad \forall k=0,1,\dots,m$$

GRAZIE A QUESTO, E AL FATTO CHE GLI x_k SONO UN NUMERO FINITO, POSSO TROVARE $n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE, SE $n \geq n_0$ VALGONO SIMULTANEAMENTE TUTTE LE $m+1$ CONDIZIONI:

$$(5) \quad |f_n(x_k) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{PER } k=0,1,\dots,m$$

MOSTRIAMO CHE PER TALE n_0 VALE ANCHE CHE $n \geq n_0 \Rightarrow d(f_n, f) < \varepsilon$

INFATTI, $\forall x \in [a,b]$ PRENDIAMO k TALE CHE $x \in [x_{k-1}, x_k]$ E OTTIENIAMO PER $n \geq n_0$ LE STIME:

$$\begin{aligned} f_n(x) &\geq f_n(x_{k-1}) = \underbrace{f_n(x_{k-1}) - f(x_{k-1})}_{\text{GRAZIE A (5)}} + \underbrace{f(x_{k-1}) - f(x)}_{\text{PERCHÉ } f_n \text{ È CRESCENTE}} + \underbrace{f(x) - f(x_k)}_{\text{GRAZIE A (4)}} + f(x_k) \\ &> -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} + f(x) = f(x) - \varepsilon \end{aligned}$$

E:

$$\begin{aligned} f_n(x) &\leq f_n(x_k) = \underbrace{f_n(x_k) - f(x_k)}_{\text{GRAZIE A (5)}} + \underbrace{f(x_k) - f(x)}_{\text{PERCHÉ } f_n \text{ È CRESCENTE}} + \underbrace{f(x) - f(x_{k-1})}_{\text{GRAZIE A (4)}} + f(x_{k-1}) \\ &< +\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + f(x) = f(x) + \varepsilon \end{aligned}$$

DUNQUE, $\forall x \in [a,b]$, SE $n \geq n_0$ SI HA:

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

RIASSUMENDO: $\forall \varepsilon > 0$ SI PUÒ TROVARE $n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE SE $n \geq n_0$, $\forall x \in [a,b]$ SI HA $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

QUESTO SIGNIFICA CHE $f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE.

TEO 3 (DEL DINI)

DATI $f \in C([a,b])$ ED $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ A VALORI IN $C([a,b])$ TALE CHE $\forall x \in [a,b]$ $f_n(x) \rightarrow f(x)$ DECRESCENDO. ALLORA $f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE.

OVVIAMENTE C'È IL TEOREMA SPECULARE IN CUI $f_n(x) \rightarrow f(x)$ CRESCENDO

DIMO

SENZA PERDERE DI GENERALITÀ SI PUÒ SUPPORRE CHE f SIA IDENTICAMENTE

NULLA, VISTO CHE, SE COSÌ NON FOSSE, SI PUÒ SEMPRE PASSARE ALLA SUCCESSIONE $(f_n - f)$.

QUINDI SAPENDO CHE:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n È CONTINUA

(2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a, b] \quad f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

(3) $f_n \rightarrow 0$ PUNTUALMENTE

DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE:

(4) $f_n \rightarrow 0$ UNIFORMEMENTE

A TALE SCOPO, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ SIA $M_n = \max_{x \in [a, b]} f_n(x)$ ED $x_n \in [a, b]$

TALE CHE $f_n(x_n) = M_n$ (M_n E x_n ESISTONO SEMPRE GRAZIE A (1) E AL TEOREMA DI WEIERSTRASS).

SI NOTI CHE, GRAZIE A (2) LA SUCCESSIONE DEI MASSIMI (M_n) È DECRESCENTE.

SI NOTI INOLTRE CHE DIMOSTRARE (4) EQUIVALE A DIMOSTRARE CHE $M_n \rightarrow 0$, VISTO CHE

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - 0| \stackrel{\text{PERCHÉ } f \geq 0}{=} \sup_{x \in [a, b]} f_n(x) \stackrel{\text{PERCHÉ } f \text{ CONTINUA}}{=} \max_{x \in [a, b]} f_n(x) = M_n$$

PER ASSURDO SUPPONIAMO CHE $M_n \not\rightarrow 0$. IN TAL CASO, VISTA LA MONOTONIA E LA POSITIVITÀ DI (M_n) SI AVRÀ CHE $M_n \rightarrow \lambda > 0$.

SIA ORA (n_{k_0}) UNA SOTTOSEQUENZA DI (n_k) CHE CONVERGA A $x_0 \in [a, b]$.

POICHÉ $f_{n_{k_0}}(x_0) \rightarrow 0$, POSSIAMO PRENDERE $k_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE

$$f_{n_{k_0}}(x_0) < \frac{\lambda}{3}$$

DOPODICHÉ, ESSENDO $f_{n_{k_0}}$ CONTINUA, PRENDIAMO $\delta > 0$ TALE CHE

(6) $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f_{n_{k_0}}(x) < \frac{2}{3}\lambda$

MA ALLORA, DEFINITIVAMENTE IN $\mathbb{R}$, SI HA:

$$M_{n_{k_0}} = f_{n_{k_0}}(x_{n_{k_0}}) \stackrel{\text{GRAZIE A (2) NON APPENA } k \geq k_0}{\leq} f_{n_{k_0}}(x_{n_{k_0}}) \stackrel{\text{GRAZIE A (6) NON APPENA } |x_{n_{k_0}} - x_0| < \delta}{<} \frac{2}{3}\lambda$$

MA QUESTO CONTRADDICE IL FATTO CHE $M_n \rightarrow \lambda > 0$.

QUINDI DEVE ESSERE $M_n \rightarrow 0$.

ES.2 DATA $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ DEFINITA SU $[0, 100]$ DA $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. STUDIARNE LA CONVERGENZA PUNTUALE E UNIFORME.

SVOLGIMENTO

SAPPIAMO CHE PER OGNI FISSATO $x \in \mathbb{R}$ SI HA:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

QUINDI $f_n \rightarrow e^x$ PUNTUALMENTE.

INOLTRE $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ PERCHÉ, PER OGNI FISSATO $x \in [0, 100]$ SI HA:

USANDO IL FATTO
CHE LA FUNZIONE
 $\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ È CRESCENTE

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x \leq \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n+1}{x}}\right)^{\frac{n+1}{x}}\right)^x = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = f_{n+1}(x)$$

POSSO QUINDI APPLICARE IL TEO. 3 E DIRE CHE LA CONVERGENZA È UNIFORME.

OSS. 4 NELL' **ES.2** SI POTEVA ANCHE UTILIZZARE IL **TEO.2** PERCHÉ, PER OGNI FISSATO n , $f_n(x)$ È CRESCENTE IN x .