

Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 19

Titolo nota

15/08/2014

22 aprile 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

SUCCESSIONI DI FUNZIONI (...CONTINUA...)

DALLA LEZ. 18

SI È ENUNCIATO E DIMOSTRATO IL TEOREMA DEL DINI, CHE COMPARE COME TEOREMA 3 NELLA LEZ. 18, DOPODICHÉ LO SI È UTILIZZATO PER STUDIARE UNA SUCC. DI FUNZIONI CHE COMPARE COME ESEMPIO 2 NELLA LEZIONE 18.

ES. 1

DATA $(f_n)_{n \in \mathbb{N}-\{0\}}$ DOVE $f_n(x) = \ln\left(1 + \left(x + \frac{1}{n}\right)^2\right)$, STUDIARNE CONV. PUNTUALE E UNIFORME SU TUTTO $\mathbb{R}$.

SVOLGIMENTO

LA CONV. PUNTUALE È OVVIA PERCHÉ $\forall x \in \mathbb{R}$ SI HA:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \left(x + \frac{1}{n}\right)^2\right) = \ln(1 + x^2)$$

QUINDI, POSTO $f(x) = \ln(1 + x^2)$, SI HA CHE $f_n \rightarrow f$ PUNTUALMENTE $\forall x \in \mathbb{R}$.

PRIMA DI STUDIARE LA CONV. UNIFORME, OSSERVIAMO CHE $f(x)$ È LIPSCHITZIANA CON COSTANTE 1, PERCHÉ $|f'(x)| \leq 1$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$.

OSSERVIAMO ANCHE CHE $f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$. DI CONSEGUENZA, $\forall x \in \mathbb{R}$ SI HA:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right| \leq 1 \cdot \left|\left(x + \frac{1}{n}\right) - x\right| = \frac{1}{n}$$

QUINDI, PASSANDO AL SUP PER $x \in \mathbb{R}$, SI OTTIENE:

$$d(f_n, f) \leq \frac{1}{n}$$

QUINDI $f_n \rightarrow f$ UNIFORMEMENTE SU $\mathbb{R}$.

ES. 2

DATA $(f_n)_{n \in \mathbb{N}-\{0\}}$ DOVE $f_n(x) = \sqrt[3]{x + \frac{1}{n}}$, STUDIARNE CONV. PUNTUALE E UNIFORME SU TUTTO $\mathbb{R}$.

SVOLGIMENTO

IN MODO SIMILE A **ES. 1** SI TROVA CHE, POSTA $f(x) = \sqrt[3]{x}$, SI HA CHE $f_n \rightarrow f$ PUNTUALMENTE

SU TUTTO $\mathbb{R}$ E CHE $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$. PERÒ STAVOLTA f NON È LIPSCHITZIANA, MA SOLO UNIFORMEMENTE CONTINUA.

PER MOSTRARE CHE $f_n \rightarrow f$ UNIF. DOBBIAMO MOSTRARE CHE $\forall \varepsilon > 0$, DEF. IN n , SI HA $d(f_n, f) < \varepsilon$.

A TALE SCOPO, $\forall \varepsilon > 0$ PRENDIAMO $\delta > 0$ T.C. $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. POSSIAMO FARLO PERCHÈ f È UNIFORMEMENTE CONTINUA. SIA ORA $n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE $n_0 > \frac{1}{\delta}$, ALLORA $\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ SI HA:

$$|f_n(x) - f(x)| = |f(x + \frac{1}{n}) - f(x)| \leq \varepsilon$$

GRAZIE A UNIF. CONTINUITÀ DI f , PERCHÈ
 $|x + \frac{1}{n} - x| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \delta$

PASSANDO AL SUP PER $x \in \mathbb{R}$ SI OTTIENE

$$d(f_n, f) < \varepsilon$$

RIASSUMENDO $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $n \geq n_0 \Rightarrow d(f_n, f) < \varepsilon$.

CIÒ SIGNIFICA CHE $f_n \rightarrow f$ UNIF. SU $\mathbb{R}$.

OSS.1 IL PROCEDIMENTO VISTO NELL'ES.2 FUNZIONA SEMPRE QUANDO f_n È DELLA FORMA $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$ CON f UNIF. CONTINUA SU TUTTO $\mathbb{R}$.

ES.3 DATA $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ DOVE $f_n(x) = \sin((x + \frac{1}{n})^2)$, STUDIARNE CONV. PUNTUALE SU $\mathbb{R}$ UNIFORME SUI COMPATTI.

SVOLGIMENTO

IN MODO SIMILE A **ES.2** SI TROVA CHE, POSTA $f(x) = \sin(x^2)$, SI HA CHE $f_n \rightarrow f$ PUNTUALMENTE SU TUTTO $\mathbb{R}$ E CHE $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$. STAVOLTA PERÒ f NON È UNIF. CONTINUA SU TUTTO $\mathbb{R}$.

TUTTAVIA LO È SUI COMPATTI (PER IL T. DI HEINE CANTOR) E QUESTO CI PERMETTE DI DIMOSTRARE CHE $f_n \rightarrow f$ UNIF. SU $[-a, a]$ CON $a > 0$.

INFATTI $\forall \varepsilon > 0$ PRENDIAMO $\delta > 0$ T.C. $\forall x, y \in [-a, a+1] \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
DOPODICHE, PRESO $n_0 > \frac{1}{\delta}$, $\forall n \geq n_0$ E $\forall x \in [-a, a]$ SI HA:

$$|f_n(x) - f(x)| = |f(x + \frac{1}{n}) - f(x)| \leq \varepsilon$$

PERCHÈ SE $x \in [-a, a]$ ALLORA
 $(x + \frac{1}{n}) \in [-a, a+1]$

DA CIÒ SEGUE CHE $d(f_n, f) < \varepsilon$. QUINDI $f_n \rightarrow f$ UNIF. SU $[-a, a]$.

QUESITO PER CASA NELL'ES.3 POSSIAMO CHE $f_n \rightarrow f$ UNIF. SU $\mathbb{R}$?

ES.4 CALCOLARE $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x)^n dx$.

SVOLGIMENTO

POSTA $f_n(x) = (\sin x)^n$ E INDICATA CON $f(x)$ LA FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA, SI HA $f_n \rightarrow f$ UNIF. SU $[0, \frac{\pi}{4}]$ PERCHÉ, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ SI HA

$$|f_n(x) - f(x)| = |(\sin x)^n| \leq \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

PASSANDO AL SUP PER $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ SI OTTIENE:

$$d(f_n, f) \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

DA CUI SEGUE CHE $d(f_n, f) \rightarrow 0$, CIOÈ CHE $f_n \rightarrow f$ UNIF. SU $[0, \frac{\pi}{4}]$.

DI CONSEGUENZA:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f_n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = 0$$

ES.5 CALCOLARE $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$.

SVOLGIMENTO

POSTE $f_n(x) = (\sin x)^n$ E $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{PER } x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ 1 & \text{PER } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$. STAVOLTA $f_n \rightarrow f$ PUNTUALMENTE

MA NON UNIF. SU $[0, \frac{\pi}{2}]$, VISTO CHE f È DISCONTINUA E LE f_n NO.

QUINDI IL NOSTRO TEO. DI PASSAGGIO AL LIM. SOTTO IL SEGNO DI INT. NON VALE, QUINDI DOBBIAMO CALCOLARLO CON LA DEFINIZIONE. MOSTREREMO CHE VALE 0.

SICCOME $\forall n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx > 0$, BASTERÀ DIMOSTRARE CHE $\forall \varepsilon > 0$, DEF. IN n , $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx < \varepsilon$.

A TALE SCOPO SI OSSERVI CHE SU $[0, \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}]$ LA CONV. È UNIFORME, QUINDI

(1)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}} (\sin x)^n dx = 0$$

DI CONSEGUENZA, $\forall \varepsilon > 0$ SI HA:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}} (\sin x)^n dx + \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx \leq \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}} (\sin x)^n dx + \frac{\varepsilon}{2} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

PERCHÉ $(\sin x)^n \leq 1$

LA DISUG. VALE DEF. IN n GRAZIE A (1)

RIASSUMENDO ABBIAMO DIMOSTRATO CHE:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ DEF. IN } n \text{ SI HA } 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx \leq \varepsilon$$

$$\text{DA CIÒ SEGUE CHE } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx \rightarrow 0.$$

ES. 6 CALCOLARE $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x + \frac{1}{n} \right)^n dx$

SVOLGIMENTO

POSTO $f_n(x) = \left(\sin x + \frac{1}{n} \right)^n$ E $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{PER } x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ e & \text{PER } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$. ANCHE STAVOLTA ABBIAMO LA

CONV. PUNTUALE SU $[0, \frac{\pi}{2}]$ E UNIFORME SUGLI INTERVALLI DEL TIPO $[0, a]$ CON $a < \frac{\pi}{2}$.

QUINDI $\forall \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x + \frac{1}{n} \right)^n dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2e}} \left(\sin x + \frac{1}{n} \right)^n dx + \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2e}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x + \frac{1}{n} \right)^n dx \leq \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2e}} \left(\sin x + \frac{1}{n} \right)^n dx + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

PERCHÉ $f_n \rightarrow 0$ UNIF. SU $[0, \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2e}]$

PERCHÉ $\forall n \in \mathbb{N} \cdot \{0\}$ $\left(\sin x + \frac{1}{n} \right)^n \leq e$

ES. 7 CALCOLARE $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x + \frac{2}{n} \right)^{n \ln n} dx$

SVOLGIMENTO

POSTO $f_n(x) = \left(\sin x + \frac{2}{n} \right)^{n \ln n}$, STAVOLTA $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow +\infty$. TUTTAVIA RIMANE VERO CHE

$f_n \rightarrow 0$ PUNTUALMENTE SU $[0, \frac{\pi}{2})$ E UNIFORMEMENTE SUGLI INSIEMI DEL TIPO $[0, a]$ CON $a < \frac{\pi}{2}$.

MOSTRIAMO CHE IL LIMITE CERCATO È $+\infty$.

A TALE SCOPO OSSERVIAMO CHE:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x + \frac{2}{n} \right)^{n \ln n} dx &\geq \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x + \frac{2}{n} \right)^{n \ln n} dx \geq \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \frac{2}{n} \right)^{n \ln n} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n} \right)^{n \ln n} \end{aligned}$$

PERCHÉ $f_n(x)$ È CRESCENTE SU $[0, \frac{\pi}{2}]$

OSSERVIAMO CHE:

$$\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{2}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \rightarrow e^{\frac{3}{2}} > e$$

QUINDI DEF. IN n SI HA:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2}{n}\right)^{n \ln n} > \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot e^{\ln n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n = \sqrt{n}$$

QUINDI, DEFIN IN n SI HA:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx \geq \sqrt{n}$$

QUINDI IL LIMITE CERCATO È $+\infty$.

ES. 8 DEFINIAMO $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ A VALORI IN $C([0, 2])$ NEL MODO SEGUENTE:

$$\begin{cases} f_0(x) = 1 & \forall x \in [0, 2] \\ f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t) dt & \forall x \in [0, 2] \end{cases}$$

STUDIARE LA CONVERGENZA DI (f_n) .

SVOLGIMENTO

OSSERVANDO CHE $\forall k \in \mathbb{N} \quad \int_0^x \frac{t^k}{k!} dt = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$, E APPLICANDO LA DEFINIZIONE RICORSIVA

SI OTTIENE:

$$f_1(x) = 1 + x$$

$$f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$\vdots$

$$f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

SAPPIAMO GIÀ CHE TALE SEQUENZA TENDE A e^x UNIFORMEMENTE SUI COMPATTI.

LO STUDENTE OSSERVI CHE $f(x) = e^x$ È UN PUNTO FISSO PER L'APPLICAZIONE:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}: C([0, 2]) &\rightarrow C([0, 2]) \\ f &\mapsto 1 + \int_0^x f(t) dt \end{aligned}$$

INFATTI:

$$\mathcal{I}(e^x) = 1 + \int_0^x e^t dt = 1 + [e^t]_0^x = 1 + e^x - 1 = e^x$$