Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 21

Titolo nota 15/08/2014

27 aprile 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

EQUAZIONI DIFFERENZIALI A VARIABILI SEPARABILI

DEF. 1 DATI $(a,b),(c,d)\subset\mathbb{R}$, $F\in C((c,d))$ E $G\in C((a,b))$ DEFINIAMO SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE A VARIABILI SEPARABILI:

$$y' = F(y)\,G(x)$$

UNA COPPIA (I,f) TALE CHE:

1) $I=(\alpha,\beta)\subset(a,b)$

2) $f: I\to(c,d)$ E' DI CLASSE C^1 E $\forall x\in I$ SODDISFA $f'(x)=F(f(x))\,G(x)$

INOLTRE, DATI $x_0\in(a,b)$ E $y_0\in(c,d)$, SE f SODDISFA L'ULTERIORE CONDIZIONE:

3) $f(x_0)=y_0$

DIREMO CHE (I,f) È SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = F(y)\,G(x) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

ES. 0 $(\mathbb{R}, e^{x^2})$ È SOLUZIONE DEL PR. DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0)=1 \end{cases}$$

PERCHÈ LA FUNZIONE $f(x)=e^{x^2}$ SODDISFA $f(0)=e^{0^2}=1$ E $f'(x)=(e^{x^2})'=2x\,e^{x^2}=2x\,f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

PIÙ IN GENERALE, $\forall A\in\mathbb{R}$ $(\mathbb{R}, Ae^{x^2})$ È SOLUZIONE DI:

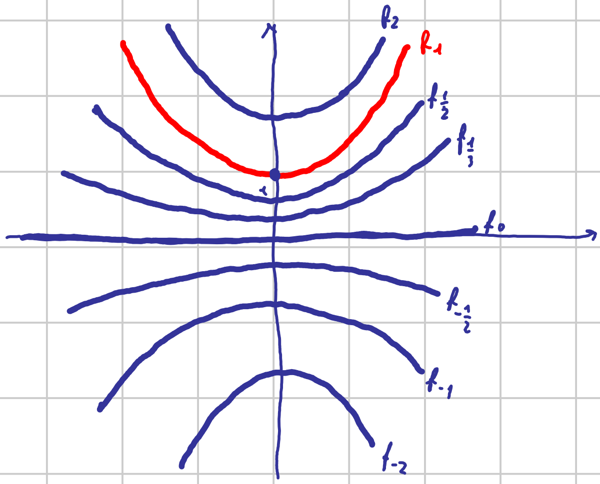
$$y' = 2xy$$

PERCHÈ LA FUNZIONE $f_A(x)=Ae^{x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ SODDISFA:

$$f_A'(x)=(Ae^{x^2})' = A\cdot 2x\,e^{x^2} = 2x\cdot(Ae^{x^2}) = 2x\,f_A(x)$$

SI NOTI CHE, AL VARIARE DI $A\in\mathbb{R}$, LA FAMIGLIA DI TUTTI I GRAFICI DELLE f_A "RIEMPIE" TUTTO $\mathbb{R}^2$

SENZA MAI AUTOINTERSECARSI:



RIEMPIE TUTTO $\mathbb{R}^2$ SENZA MAI AUTOINTERSECARSI SIGNIFICA CHE $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ESISTE UNA ED UNA SOLA f_A TALE CHE $f_A(x_0) = y_0$

IMPAREREMO CHE CIÒ ACCADE IN IPOTESI ABBASTANZA GENERALI

TEO. 1 (TEO. DI ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE PER EQ. DIFFERENZIALI A VAR. SEPARABILI)

DATE $F:(c,d) \to \mathbb{R}$ LIPSCHITZIANA, $G \in C([a,b])$, $x_0 \in (a,b)$ E $y_0 \in (c,d)$, ALLORA $\exists \delta > 0$ ED $\exists!\, f \in C^1([x_0-\delta, x_0+\delta])$ TALI CHE $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subset [a,b]$ ED f SODDISFA LE CONDIZIONI:

(1)
$$\begin{cases} f'(x) = F(f(x))\, G(x) \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

DIMO (FAREMO SOLO IL CASO PARTICOLARE $(c,d) = \mathbb{R}$)

BASTA OSSERVARE CHE SONO EQUIVALENTI I 2 PROBLEMI:

P.1 TROVARE $f \in C^1([x_0-\delta, x_0+\delta])$ CHE SODDISFA **(1)**.

P.2 TROVARE $f \in C([x_0-\delta, x_0+\delta])$ CHE SODDISFA:

(2)
$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(f(t)) \cdot G(t)\, dt \qquad \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta].$$

INFATTI SE f SODDISFA:

$$f'(t) = F(f(t))\, G(t)$$

INTEGRANDO TRA x_0 E x SI OTTIENE:

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} F(f(t))\, G(t)\, dt$$

CIOÈ:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} F(f(t))\, G(t)\, dt$$

DA CUI, RICORDANDO CHE $f(x_0) = y_0$, SEGUE LA **(2)**.

CIÒ DIMOSTRA CHE SE f È SOLUZIONE DI **P1** È ANCHE SOLUZIONE DI **P2**.

VICEVERSA, SE f È CONTINUA E SODDISFA:

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(f(t))\,G(t)\,dt \qquad \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta],$$

GRAZIE AL T.F.C.I. È ANCHE DERIVABILE E DERIVANDO IN AMBO I MEMBRI SI HA:

$$f'(x) = F(f(x))\,G(x)$$

INOLTRE:

$$f(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} F(f(t))\,G(t)\,dt = y_0 + 0 = y_0$$

QUINDI SODDISFA **(1)**.

CIÒ DIMOSTRA CHE SE f È SOLUZIONE DI $\boxed{P.2}$ È ANCHE SOLUZIONE DI $\boxed{P1}$.

A QUESTO PUNTO, GRAZIE AL $\boxed{\text{TEO. 1}}$ DELLA $\boxed{\text{LEZ.20}}$, SAPPIAMO GIÀ CHE SE $\delta > 0$ È SUFFICIENTEMENTE PICCOLO $\exists!\, f \in C([x_0-\delta, x_0+\delta])$ CHE SODDISFA **(2)**.

QUINDI, POICHÈ $\boxed{P1}$ E $\boxed{P2}$ SONO EQUIVALENTI, TALE f È ANCHE L'UNICA SOLUZIONE DI **(1)**.

$\boxed{\text{ES.1}}$ RISOLVERE IL PROBLEMA DI CAUCHY:

(3)
$$\begin{cases} y' = e^{x}\cos^2(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

NEI CASI: $\boxed{a}$ $y_0 = \frac{\pi}{2}$, $\boxed{b}$ $y_0 = \frac{\pi}{4}$, $\boxed{c}$ $y_0 = \frac{5}{4}\pi$.

$\boxed{\text{SVOLGIMENTO}}$

$\boxed{a}$ SI NOTI CHE $\cos^2(y)$ SI ANNULLA PER $y = \frac{\pi}{2}$, QUINDI LA FUNZIONE COSTANTE $y_1(x) = \frac{\pi}{2}$ È SOLUZIONE DEL PROB. DI CAUCHY. IL FATTO CHE SIA L'UNICA SEGUE SUBITO DAL TEO. DI ES. E UNIC. LOCALE. DIMOSTRIAMOLO IN DETTAGLIO (PER QUESTA VOLTA).

MOSTRIAMO CIOÈ CHE SE $y_2(x)$ È DEFINITA SU (α,β), CON $(\alpha,\beta) \ni 0$, E SU (α,β) SODDISFA IL PROB. **(3)** CON $y_0 = \frac{\pi}{2}$, ALLORA DEVE COINCIDERE CON $y_1(x)$ SU TUTTO (α,β).

BASTERÀ MOSTRARE CHE SONO VUOTI I DUE INSIEMI:

$$A^+ = \{x \in (\alpha,\beta) \mid y_2(x) \neq y_1(x),\ x > 0\} \qquad \text{E} \qquad A^- = \{x \in (\alpha,\beta) \mid y_2(x) \neq y_1(x),\ x < 0\}$$

SE D^+ NON FOSSE VUOTO, DETTO $\bar{x} = \inf A^+$, SI AVREBBE $\bar{x} \in [0,\beta)$.

MOSTRIAMO CHE $y_1(\bar{x}) = y_2(\bar{x})$. SE $\bar{x}=0$ CIÒ È OVVIO. SE $\bar{x}>0$ SEGUE DALLA CONTINUITÀ DI $y_1(x)$ E $y_2(x)$ E DAL FATTO CHE $y_1(x) = y_2(x)$ $\forall x \in [0, \bar{x})$.

MA A QUESTO PUNTO, INVOCANDO IL $\boxed{\text{TEO.1}}$, LA SOLUZIONE DI:

$$\begin{cases} y' = e^x \cos^2 y \\ y(\bar{x}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

DEVE ESSERE UNICA SU TUTTO UN INTORNO DI AMPIEZZA $\delta>0$ DI $\bar{x}$, DI CONSEGUENZA DEVE ESSERE $y_1(x) = y_2(x)$ ANCHE PER $x \in [\bar{x}, \bar{x}+\delta)$, IN CONTRADDIZIONE COL FATTO CHE $\bar{x} = \inf A^+$. QUINDI È ASSURDO SUPPORRE CHE A^+ NON SIA VUOTO.

PER A^- SI RAGIONA IN MODO ANALOGO.

RIASSUMENDO: SE $y_2(x)$ È SOLUZIONE DI **(3)** SU (α, β) ALLORA COINCIDE CON $y_1(x)$ SU TUTTO (α, β).

QUINDI LA SOLUZIONE COSTANTE $y_1(x) = \frac{\pi}{2}$ È L'UNICA SOL. DI **(3)** NON SOLO IN UN INTORNO DI 0, MA SU TUTTO $\mathbb{R}$.

$\boxed{b}$ VISTO CHE $y(0) = \frac{\pi}{4}$ SI HA:

$$\cos^2(y(0)) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} > 0.$$

QUINDI PER CONTINUITÀ SI HA:

(4) $$\cos^2(y(t)) > 0$$

SU TUTTO UN INTORNO I DI 0.

FINCHÈ VALE **(4)**, DIRE CHE $y(t)$ SODDISFA:

$$y'(t) = e^t \cos(y(t))$$

EQUIVALE A DIRE CHE SODDISFA:

$$\frac{y'(t)}{\cos^2(y(t))} = e^t$$

INTEGRANDO AMBO I MEMBRI DA 0 A x SI OTTIENE:

(5) $$\int_0^x \frac{y'(t)}{\cos^2(y(t))}\, dt = \int_0^x e^t\, dt$$

AL SECONDO MEMBRO SI OTTIENE:

$$\int_0^x e^t\, dt = \left[e^t\right]_0^x = e^x - 1$$

AL PRIMO MEMBRO DI **(5)** SI OTTIENE:

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{\cos^2(y(t))}\,dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{y(x)} \frac{1}{\cos^2 y}\,dy = \left[\tan y\right]_{\frac{\pi}{4}}^{y(x)} = \tan(y(x)) - 1$$

QUINDI LA **(5)** DIVENTA:

(6)
$$\tan(y(x)) = e^x$$

SI NOTI CHE $y(x)$ NON PUÒ MAI INTERSECARE LE SOLUZIONI COSTANTI $y_1(x) = \frac{\pi}{2}$ E $y_3(x) = -\frac{\pi}{2}$, QUINDI FINCHÈ $y(x)$ ESISTE, SI HA $-\frac{\pi}{2} < y(x) < \frac{\pi}{2}$, QUINDI LA **(6)** DIVENTA:

$$y(x) = \arctan(e^x)$$

VISTO CHE TALE $y(x)$ SODDISFA LA CONDIZIONE **(4)** SU TUTTO $\mathbb{R}$, I PASSAGGI CHE ABBIAMO FATTO VALGONO SU TUTTO $\mathbb{R}$, QUINDI $y(x) = \arctan(e^x)$ È SOLUZIONE SU TUTTO $\mathbb{R}$.

c PARTENDO DAL FATTO CHE $y(0) = \frac{5}{4}\pi$ E QUINDI $\cos^2(y(0)) = \frac{1}{2} > 0$, SI PROCEDE IN MODO ANALOGO AL PUNTO **b** FINO AD OTTENERE:

(7)
$$\tan(y(x)) = e^x$$

STAVOLTA PERÒ, VISTO CHE $y(0) = \frac{5}{4}\pi$, $y(x)$ RIMANE CONFINATA TRA $\frac{\pi}{2}$ E $\frac{3}{2}\pi$, QUINDI LA **(7)** DIVENTA:

$$y(x) = \pi + \arctan e^x$$

CHE È LA SOLUZIONE CERCATA.

OSS. 1 NELLA DISCUSSIONE CHE SEGUE GENERALIZZIAMO LA QUESTIONE POSTA NEL PUNTO **a** DELL'ES. 1 E CIOÈ SE IL FATTO CHE LA SOLUZIONE FOSSE UNICA IN UN INTORNO "PICCOLO" DEL PUNTO INIZIALE FOSSE SUFFICIENTE A GARANTIRE L'UNICITÀ SU UN INTERVALLO PIÙ AMPIO. LA RISPOSTA È AFFERMATIVA GRAZIE ALLA SEGUENTE PROPOSIZIONE:

PROP. 1 CON LE STESSE IPOTESI DEL TEO. 1, SI CONSIDERI IL PROB. DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = F(y)G(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

E SIANO $(I_1, y_1(x))$ E $(I_2, y_2(x))$ DUE SUE SOLUZIONI.

ALLORA $\forall x \in I_1 \cap I_2$ SI HA $y_1(x) = y_2(x)$.

DIMO

POSTO $I_1 \cap I_2 = I = (\alpha, \beta)$, OVVIAMENTE I È UN INTERVALLO APERTO CONTENENTE x_0, VISTO CHE LO SONO I_1 E I_2. DEFINIAMO:

$$A^+ = \{x \in I \mid y_1(x) \neq y_2(x),\ x > x_0\} \quad \text{E} \quad A^- = \{x \in I \mid y_1(x) \neq y_2(x),\ x < x_0\}$$

DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE A^+ E A^- SONO VUOTI.

SE PER ASSURDO A^+ NON LO FOSSE, DETTO $\bar{x} = \inf A^+$, SI AVREBBE $\bar{x} \in [x_0, \beta)$.

SI OTTERREBBE INOLTRE $y_1(\bar{x}) = y_2(\bar{x})$. QUESTO È OVVIO SE $\bar{x} = x_0$, MENTRE SE $\bar{x} > x_0$ SEGUE DALLA CONTINUITÀ DI $y_1(x)$ E $y_2(x)$ E DAL FATTO CHE $y_1(x) = y_2(x)$ SU $[x_0, \bar{x})$.

A QUESTO PUNTO, VISTO CHE $y_1(\bar{x}) = y_2(\bar{x}) = \bar{y}$ $y_1(x)$ E $y_2(x)$ SONO ENTRAMBE SOLUZIONI DEL PROB. DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = F(y)G(x) \\ y(\bar{x}) = \bar{y} \end{cases}$$

QUINDI, INVOCANDO IL TEO. 1, $\exists \delta > 0$ TALE CHE $y_1(x) = y_2(x)$ SU $[\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta]$, IN CONTRADDIZIONE COL FATTO CHE $\bar{x} = \inf A^+$. QUINDI È ASSURDO SUPPORRE CHE A^+ NON SIA VUOTO.

ANALOGAMENTE SI DIMOSTRA CHE È VUOTO ANCHE A^-.

CIÒ SIGNIFICA CHE $y_1(x)$ E $y_2(x)$ COINCIDONO SU TUTTO $I_1 \cap I_2$.

DEF. 2 DATI $G \in C((a,b))$, $F \in C((c,d))$, $x_0 \in (a,b)$ E $y_0 \in (c,d)$ SIANO $(I_1, y_1(x))$ E $(I_2, y_2(x))$ DUE SOLUZIONI DEL PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = F(y)G(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

DIREMO CHE $(I_2, y_2(x))$ È UN PROLUNGAMENTO DI $(I_1, y_1(x))$ SE:

1) $I_1 \subset I_2$
2) $y_1(x) = y_2(x)$ $\forall x \in I_1$

$\boxed{\text{OSS.2}}$ LA $\boxed{\text{PROP. 1}}$ CI GARANTISCE CHE, QUANDO F È LIPSCHITZIANA, NELLA $\boxed{\text{DEF. 2}}$ BASTA LA CONDIZIONE $I_1 \subset I_2$ PER AVERE AUTOMATICAMENTE CHE $(I_2, y_2(x))$ È UN PROLUNGAMENTO DI $(I_1, y_1(x))$.

$\boxed{\text{ES.2}}$ **(ESEMPIO CATTIVO)**

TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DEL PROB. DI CAUCHY

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

$\boxed{\text{SVOLGIMENTO}}$

SI OSSERVA SUBITO CHE LA FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA $y_1(x) = 0$ È SOLUZIONE. TUTTAVIA, VISTO CHE $F(y) = \sqrt[3]{y}$ NON È LIPSCHITZIANA IN ALCUN INTORNO DI 0, NON POSSIAMO APPLICARE IL TEO. 1 PER DIRE CHE È L'UNICA SOLUZIONE.

E IN EFFETTI NON LO È PERCHÉ, SE CERCHIAMO SOLUZIONI DEL TIPO $y(x) = A x^{\alpha}$, LA CONDIZIONE SU α E A È CHE SIA:

$$\left(A x^{\alpha}\right)' = \left(A x^{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}$$

CIOÈ:

$$A \cdot \alpha\, x^{\alpha - 1} = A^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{\alpha}{3}}$$

CIOÈ:

$$\begin{cases} \alpha - 1 = \dfrac{\alpha}{3} \\ A \cdot \alpha = A^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

DA CUI SEGUE:

$$\alpha = \frac{3}{2} \qquad \text{E} \qquad A = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

QUINDI SI TROVA:

$$y(x) = \left(\frac{2}{3} x\right)^{\frac{3}{2}}$$

PONIAMO DUNQUE:

$$y_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{SE } x < 0 \\ \left(\frac{2}{3} x\right)^{\frac{3}{2}} & \text{SE } x \geq 0 \end{cases} \tag{9}$$

SI OTTIENE:

$$y_2'(x) = \begin{cases} 0 & \text{SE } x<0 \\ 0 & \text{SE } x=0 \\ \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{1}{2}} & \text{SE } x>0 \end{cases}$$

OTTENIAMO QUINDI CHE ANCHE $y_2(x)$ È SOLUZIONE DI **(8)**.

SI OSSERVI POI CHE, $\forall a>0$ ANCHE $v_a(x) = y_2(x-a)$ È SOLUZIONE DI **(8)** PERCHÉ:

$$(v_a(x))' = (y_2(x-a))' = y_2'(x-a) = \sqrt[3]{y_2(x-a)} = \sqrt[3]{v_a(x)}$$

E

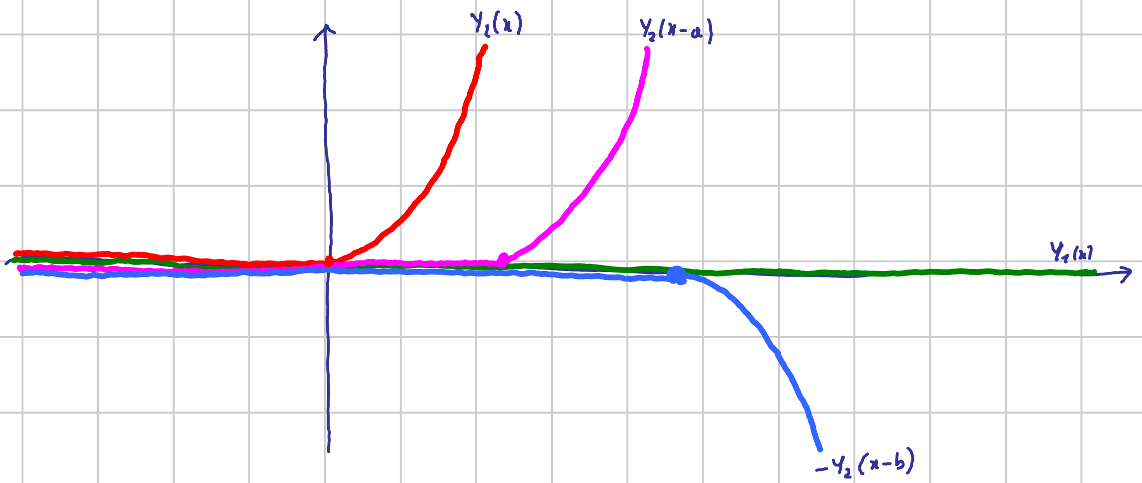
$$v_a(0) = y_2(0-a) = 0$$

INFINE SI OSSERVI CHE SE $y(x)$ È SOLUZIONE DI **(8)** ANCHE $v(x) = -y(x)$ LO È PERCHÉ:

$$(v(x))' = (-y(x))' = -y'(x) = -\sqrt[3]{y(x)} = \sqrt[3]{-y(x)} = \sqrt[3]{v(x)}$$

ABBIAMO QUINDI TROVATO INFINITE SOLUZIONI DI **(8)**, CHE ELENCHIAMO:

1) $y_1(x)$ (FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA)
2) $y_2(x)$ (FUNZIONE DEFINITA DA **(9)**)
3) TUTTE LE TRASLATE ORIZZONTALI IN AVANTI DI $y_2(x)$
4) TUTTE LE FUNZIONI OTTENUTE MOLTIPLICANDO PER -1 QUELLE DEL PUNTO (3).



PER MOSTRARE CHE NON CI SONO ALTRE SOLUZIONI DI **(8)** OLTRE A QUELLE TROVATE BASTA OSSERVARE CHE, FUORI DAI PUNTI DELL'ASSE X IL TEO. 1 VALE, QUINDI LE SOLUZIONI DI $y' = \sqrt[3]{y}$ NON SI POSSONO INTERSECARE TRA LORO FUORI DALL'ASSE X. CIÒ SIGNIFICA CHE NON CI SONO ALTRE SOL. OLTRE A QUELLE OTTENUTE TRASLANDO E "ROVESCIANDO" $y_2(x)$.