

Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 22

Titolo nota

15/08/2014

29 aprile 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

EQUAZIONI DIFFERENZIALI A VARIABILI SEPARABILI (...CONTINUA...)

DEF. 1 UNA SOLUZIONE $(I, y(x))$ DI UN PROBLEMA DI CAUCHY SI DICE MASSIMALE SE L'UNICO SUO PROLUNGAMENTO È LEI STESSA

TEO. 1 SIA DATO IL PROBLEMA DI CAUCHY:

$$(1) \quad \begin{cases} y' = F(y) G(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

CHE SODDISFI TUTTE LE IPOTESI DEL TEO. DI ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE.

ALLORA HA SEMPRE UNA SOLUZIONE MASSIMALE.

DINO

SI CONSIDERI LA FAMIGLIA $\mathcal{F} = \{(I_i, y_i(x))\}_{i \in \mathcal{I}}$ DI TUTTE LE SOLUZIONI DI (1), INDICIZZATA CON UN'OPPORTUNA FAMIGLIA DI INDICI $\mathcal{I}$. GRAZIE AL TEO. DI ES. E UNICITÀ LOCALE $\mathcal{F}$ È NON VUOTA.

DEFINIAMO:

$$I_M = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} I_i$$

POICHÉ TUTTI GLI I_i SONO INTERVALLI APERTI CONTENENTI x_0 , LO STESSO VALE PER I_M .

ORA DEFINIAMO $y_M: I_M \rightarrow \mathbb{R}$ NEL MODO SEGUENTE: $\forall x \in I_M$ PRENDO $i \in \mathcal{I}$ TALE

CHE $x \in I_i$ E DEFINISCO $y_M(x) = y_i(x)$. SI NOTI CHE y_M È BEN DEFINITA PERCHÉ

PER TUTTI GLI $i \in \mathcal{I}$ TALI CHE $x \in I_i$ I CORRISPONDENTI y_i HANNO TUTTI LO STESSO VALORE

IN x (PER LA **PROP. 1** DELLA **LEZ. 21**). SI NOTI INOLTRE CHE $y_M(x_0) = y_0$, VISTO CHE $\forall i \in \mathcal{I} \ y_i(x_0) = y_0$.

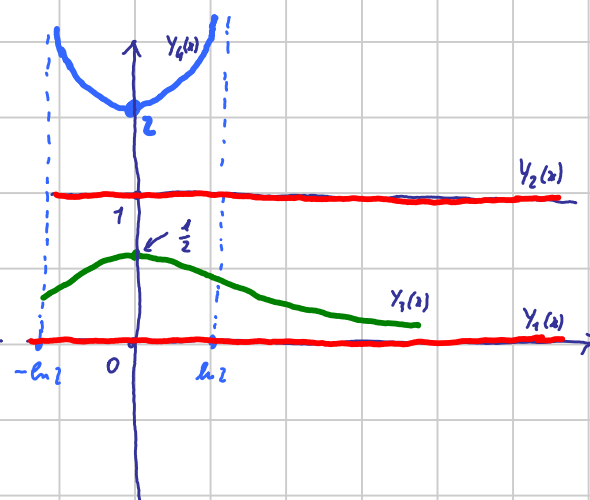
INFINE SI NOTI ANCHE CHE $\forall x \in I_M \ y'_M(x) = F(y_M(x)) G(x)$ VISTO CHE, PRESO $i \in \mathcal{I}$ TALE CHE $x \in I_i$, $y_M(x)$ COINCIDE CON $y_i(x)$ SU TUTTO I_i E $y_i(x)$ SODDISFA L'EQ. DIFF. SU TUTTO I_i E QUINDI ANCHE IN x .

QUESTO DIMOSTRA CHE $(I_M, y_M(x))$ È SOLUZIONE DI (1). INOLTRE, PER COME È STATO COSTRUITO,

$(I_M, y_M(x))$ È PROLUNGAMENTO DI OGNI $(I_i, y_i(x)) \in \mathcal{F}$, QUINDI $(I_M, y_M(x))$ È SOL. MASSIMALE.

ES.1 TROVARE LA SOLUZIONE MASSIMALE DI $\begin{cases} y' = 2y(y-1)x \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ NEI CASI $y_0 = 0, y_0 = 1,$

$$y_0 = \frac{1}{2}, y_0 = 2, y_0 = -1.$$



SVOLGIMENTO

1 VISTO CHE $y_0 = 0$ ANNULLA $f(y) = y(y-1)$ LA SOLUZIONE DEL PROB. DI CAUCHY CON TALE DATO INIZIALE È $(\mathbb{R}, y_1(x))$ DOVE $y_1(x)$ È LA FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA SU TUTTO $\mathbb{R}$.

2 ANALOGAMENTE, COL DATO INIZIALE $y_0 = 1$ SI OTTIENE COME SOLUZIONE $(\mathbb{R}, y_2(x))$ DOVE $y_2(x)$ È LA FUNZIONE COSTANTE UGUALE A 1 SU TUTTO $\mathbb{R}$.

3 CERCHIAMO ORA LA SOLUZIONE PER $y_0 = \frac{1}{2}$, CHE INDICHIAMO CON $y_3(x)$.

SAPPIAMO CHE NON PUÒ INTERSECCARE NÈ $y_1(x)$ NÈ $y_2(x)$ (PERCHÈ ALTIRMENTI VIOLEREBBE L'UNICITÀ)

QUINDI, FINCHÈ $y_3(x)$ ESISTE, SI AVRÀ $0 < y_3(x) < 1$ E QUINDI DIRE CHE SODDISFA L'EQUAZIONE:

$$y_3'(t) = 2y_3(t)(y_3(t)-1) \cdot t$$

EQUIVALE A DIRE CHE SODDISFA:

$$\frac{y_3'(t)}{y_3(t)(y_3(t)-1)} = 2t$$

CHE INTEGRATA TRA 0 E x DIVENTA:

$$\int_0^x \frac{y_3'(t)}{y_3(t) \cdot (y_3(t)-1)} dt = \int_0^x 2t dt = x^2$$

GRAZIE AL CAMBIO DI VARIABILE $y = y_3(t)$

$$\begin{aligned} \int_{y_3(0)}^{y_3(x)} \frac{1}{y(y-1)} dy &= \int_{\frac{1}{2}}^{y_3(x)} \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} dy = \left[\ln(1-y) - \ln y \right]_{\frac{1}{2}}^{y_3(x)} \\ &= \left[\ln\left(\frac{1}{y}-1\right) \right]_{\frac{1}{2}}^{y_3(x)} = \ln\left(\frac{1}{y_3(x)}-1\right) - \ln 1 = \ln\left(\frac{1}{y_3(x)}-1\right) \end{aligned}$$

QUINDI, FINCHÈ ESISTE, $y_3(x)$ SODDISFA:

$$\ln\left(\frac{1}{y_3(x)}-1\right) = x^2$$

CIOÈ:

SICCOME L'INTERVALLO DI INTEGRAZ. $[\frac{1}{2}, y_3(x)] \subset (0, 1)$ QUANDO SI SCEGLIE LA PRIMITIVA DI $\frac{1}{y-1}$ SI SCEGLIE $\ln(1-y)$, NON $\ln(y-1)$. PER LO STESSO MOTIVO, PER $\frac{1}{y}$ SI SCEGLIE $\ln y$, NON $\ln(-y)$.

$$\frac{1}{y_3(x)} - 1 = e^{x^2}$$

CIOÈ:

(2)

$$y_3(x) = \frac{1}{e^{x^2} + 1}$$

SI NOTI CHE TALE FUNZIONE ESISTE SU TUTTO $\mathbb{R}$ E SODDISFA $0 < y_3(x) < 1$, QUINDI LA SOLUZIONE CERCATA È $(\mathbb{R}, y_3(x))$ CON $y_3(x)$ DATO DA (2).

d

DETTA $y_4(x)$ LA SOLUZIONE CERCATA, RAGIONANDO COME IN c SI OTTIENE CHE, FINCHÈ ESISTE SI HA $y_4(x) > 1$, VISTO CHE $y_4(0) = 2 > 1$.

QUINDI L'EQUAZIONE:

$$y_4'(t) = 2 y_4(t) (y_4(t) - 1) \cdot t$$

EQUIVALE A:

$$\frac{y_4'(t)}{y_4(t)(y_4(t)-1)} = 2t$$

CHE INTEGRATA TRA 0 E x DIVENTA:

$$\int_0^x \frac{y_4'(t)}{y_4(t)(y_4(t)-1)} dt = \int_0^x 2t dt = x^2$$

GRAZIE AL CAMBIO
DI VARIABILE
 $y = y_4(t)$

$$\begin{aligned} \int_{y_4(0)}^{y_4(x)} \frac{1}{y(y-1)} dy &= \int_2^{y_4(x)} \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} dy = \left[\ln(y-1) - \ln y \right]_2^{y_4(x)} \\ &= \left[\ln\left(1 - \frac{1}{y}\right) \right]_2^{y_4(x)} = \ln\left(1 - \frac{1}{y_4(x)}\right) - \ln\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ANCHE QUI, COME AL PUNTO
PRECEDENTE IL FATTO
CHE $[2, y_4(x)] \subset (1, +\infty)$
INFLUISCE SULLA SCELTA
DELLA PRIMITIVA

QUINDI, FINCHÈ ESISTE, $y_4(x)$ SODDISFA:

$$\ln\left(1 - \frac{1}{y_4(x)}\right) = \ln\frac{1}{2} + x^2$$

CIOÈ:

$$1 - \frac{1}{y_4(x)} = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

CIOÈ:

(3)

$$y_4(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{x^2}}$$

CHE NON È DEFINITA PER $x = \pm \ln 2$. QUINDI LA SOL. CERCATA È $(I_4, y_4(x))$ CON $I_4 = (-\ln 2, \ln 2)$ E $y_4(x)$ DATA DA (3).

e) DETTA $y_5(x)$ LA SOLUZIONE CERCATA, RAGIONANDO COME IN c) SI OTTIENE CHE, FINCHÉ ESISTE SI HA $y_5(x) < 0$, VISTO CHE $y_5(0) = -1 < 0$.

QUINDI L'EQUAZIONE:

$$y_5'(t) = 2 y_5(t) (y_5(t) - 1) \cdot t$$

EQUIVALE A:

$$\frac{y_5'(t)}{y_5(t)(y_5(t)-1)} = 2t$$

CHE INTEGRATA TRA 0 E x DIVENTA:

$$\int_0^x \frac{y_5'(t)}{y_5(t)(y_5(t)-1)} dt = \int_0^x 2t dt = x^2$$

GRAZIE AL CAMBIO
DI VARIABILE
 $y = y_5(t)$

$$\int_{y_5(0)}^{y_5(x)} \frac{1}{y(y-1)} dy = \int_{-1}^{y_5(x)} \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} dy = \left[\ln(1-y) - \ln(-y) \right]_{-1}^{y_5(x)}$$

STESSA CONSIDERAZIONE
FATTA NEI PUNTI
PRECEDENTI

$$= \left[\ln\left(1 - \frac{1}{y}\right) \right]_{-1}^{y_5(x)} = \ln\left(1 - \frac{1}{y_5(x)}\right) - \ln 2$$

QUINDI, FINCHÉ ESISTE, $y_5(x)$ SODDISFA:

$$\ln\left(1 - \frac{1}{y_5(x)}\right) = \ln 2 + x^2$$

CIOÈ:

$$1 - \frac{1}{y_5(x)} = 2 \cdot e^{x^2}$$

CIOÈ:

(4)

$$y_5(x) = - \frac{1}{2e^{x^2} - 1}$$

CHE È DEFINITA SU TUTTO $\mathbb{R}$. QUINDI LA SOL. CERCATA È $(\mathbb{R}, y_5(x))$ CON $y_5(x)$ DEFINITO DA (4).

ES. 2

DATO IL PROB. DI CAUCHY

(5)

$$\begin{cases} y' = \arctan(y(y-1)) \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

DETERMINARE IL GRAFICO QUALITATIVO DELLA SUA SOL. MASSIMALE.

SVOLGIMENTO

SIA $(I, y(x))$ LA SOLUZIONE MASSIMALE DI (5), VISTO CHE IL PROCEDIMENTO DI CALCOLO CI PORTA AD INTEGRALI CHE NON SAPPIAMO RISOLVERE, PROVIAMO A RICAVARE INFORMAZIONI SU I E SU $y(x)$ DIRETTAMENTE DA (5).

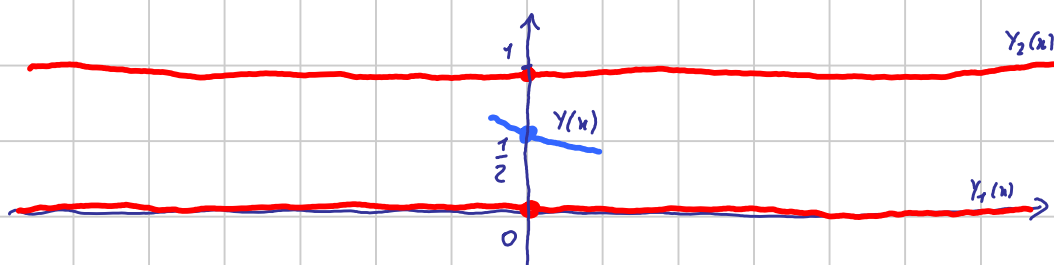
INFO 1

PER IL TED. DI ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE I CONTIENE TUTTO UN INTORNO DI 0.

INFO 2

FINCHÉ $y(x)$ ESISTE RIMANE CONFINATA NELLA STRISPIA $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < 1\}$

INFATTI LE FUNZIONI COSTANTI $y_1(x) = 0$ E $y_2(x) = 1$ SONO ANCH'ESSE SOLUZIONI DELLA STESSA EQ. DIFFERENZIALE E QUINDI NON POSSONO ESSERE INTERSEDATE DA $y(x)$.



INFO 3

FINCHÉ $y(x)$ ESISTE È DECRESCENTE E LIPSCHITZIANA CON COSTANTE $L = \arctan \frac{1}{4}$.

INFATTI FINCHÉ ESISTE SAPPIAMO CHE $0 < y(x) < 1$, QUINDI

$$-\frac{1}{4} \leq y(x) \cdot (y(x) - 1) < 0$$

QUINDI:

$$-\arctan \frac{1}{4} \leq \arctan(y(x) \cdot (y(x) - 1)) < 0$$

MA SICCOME $y(x)$ SODDISFA L'EQ. DIFF., SI OTTIENE:

$$-\arctan \frac{1}{4} \leq y'(x) < 0$$

DA CUI SEGUE **INFO 3**.

INFO 4

$I = \mathbb{R}$, CIOÈ POSTO $I = (a, b)$ SI HA $a = -\infty$ E $b = +\infty$.

MOSTRIAMO CHE $b = +\infty$.

SE PER ASSURDO COSÌ NON FOSSE SIA $y_0 = \lim_{x \rightarrow b^-} y(x)$ (y_0 ESISTE FINITO PERCHÉ $y(x)$ È CRESCENTE E LIMITATA).

CONSIDERO ORA LA SOL. $y_3(x)$ DI:

$$\begin{cases} y' = \arctan(y(y-1)) \\ y(b) = y_0 \end{cases}$$

SO CHE ESISTE IN UN INTERVALLINO $(b-\delta, b+\delta)$.

DEFINISCO ORA $v(x)$ SU $I \cup [b+\delta)$ NEL MODO SEGUENTE:

(6)

$$v(x) = \begin{cases} y(x) & \text{PER } x \in I \\ y_3(x) & \text{PER } x \in [b+\delta) \end{cases}$$

PER MOSTRARE CHE $v(x)$ È SOL. DELL'EQ. DIFF. (E QUINDI UN PROLUNGAMENTO DI $(I, y(x))$) BASTA MOSTRARE CHE ANCHE PER $x=b$ SI HA:

(7)

$$v'(b) = \arctan(v(b) \cdot (v(b)-1))$$

PER $v'_+(b)$ CIÒ È OVVIO PERCHÉ $v|_{[b, b+\delta)} = y_3|_{[b, b+\delta)}$.

PER $v'_-(b)$ BASTA OSSERVARE CHE:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} v'(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} y'(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \arctan(y(x)(y(x)-1)) = \arctan(y_0(y_0-1)) = \arctan(v(b)(v(b)-1))$$

QUINDI ANCHE $v'_-(b) = \arctan(v(b)(v(b)-1))$.

QUINDI VALE (7).

CIÒ SIGNIFICA CHE $v(x)$ PROLUNGA $y(x)$, IN CONTRADDIZIONE COL FATTO CHE $(I, y(x))$ È MASSIMALE.

QUINDI È ASSURDO SUPPORRE CHE I SIA SUPERIORMENTE LIMITATO.

ANALOGAMENTE SI DIMOSTRA CHE I NON È INFERIORMENTE LIMITATO.

QUINDI $I = \mathbb{R}$.

INFO.5 PER $x \rightarrow +\infty$ $y(x)$ HA ASINTOTO ORIZZONTALE LA RETTA $y=0$.

VISTO CHE $y(x)$ È DECRESCENTE E LIMITATA L'ASINTOTO ORIZZONTALE PER $x \rightarrow +\infty$ ESISTE E SARÀ DEL TIPO:

$$y = \lambda \quad \text{CON } \lambda \in [0, \frac{1}{2})$$

VISTO CHE $y(0) = \frac{1}{2}$ E $y(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

PER AVERE LA TESI BASTA MOSTRARE CHE NON PUÒ ESSERE $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$

INFATTI, SE PER ASSURDO FOSSE $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ ALLORA:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \gamma(x) = \lambda \in (0, \frac{1}{2})$$

QUINDI:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \gamma'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(\gamma(x)(\gamma(x)-1)) = \arctan(\lambda(\lambda-1)) = m < 0$$

DI CONSEGUENZA $\exists \bar{x} > 0$ T.C. $x > \bar{x} \Rightarrow \gamma'(x) < \frac{m}{2} < 0$, QUINDI PER $x > \bar{x}$ SI HA

$$\gamma(x) = \gamma(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^x \gamma'(x) dx \leq \gamma(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^x \frac{m}{2} dx \leq \gamma(\bar{x}) + \frac{m}{2}(x - \bar{x}) \xrightarrow[\text{PER } x \rightarrow +\infty]{\downarrow} -\infty$$

QUINDI $\gamma(x) \rightarrow -\infty$ PER $x \rightarrow +\infty$ (ASSURDO).

QUINDI È ASSURDO CHE $\lambda \neq 0$. QUINDI L'ASINTOTO È $\gamma = 0$.

INFO 6 PER $x \rightarrow -\infty$ $\gamma(x)$ HA COME ASINTOTO ORIZZONTALE LA RETTA $\gamma = 1$.

LA VERIFICA È DEL TUTTO ANALOGA A **INFO 5**.

RIASSUMENDO, LE INFORMAZIONI RICAVATE CI PERMETTONO DI TRACCIARE IL SEGUENTE GRAFICO:

