

Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 24

Titolo nota

15/08/2014

6 maggio 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI (...CONTINUA...)

OSS. 1 PER AFFRONTARE CON MAGGIOR COMODITÀ LO STUDIO DELLE EQ. DIFF. LINEARI A COEFF. COSTANTI È CONVENIENTE PRIMA FAMILIARIZZARE COL CONCETTO DI DERIVATA DI UNA FUNZIONE $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. IN REALTÀ BASTA CONVINCERSI CHE NON CAMBIA NULLA, RISPETTO A CIÒ CHE GIÀ SI SA PER LE FUNZIONI A VALORI IN $\mathbb{R}$. (ALTRA COSA SAREBBE SE FOSSE $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, MA QUESTO LO STUDENTE LO IMPARERÀ AL TERZO ANNO) NELLE PROSSIME DEFINIZIONI O TEOREMI RICHIAMEREMO IL MINIMO CHE CI SERVE SAPERE

DEF 1 DATI $x_0 \in (a,b)$ E $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{C}$ DIREMO CHE f È DERIVABILE IN x_0 SE ESISTE FINITO IL LIMITE:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

TALE LIMITE SI INDICA CON $f'(x_0)$ E PRENDE IL NOME DI DERIVATA DI f NEL PUNTO x_0 .

PROP. 1 DATA $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{C}$, SIANO $a(x) = \operatorname{Re}(f(x))$ E $b(x) = \operatorname{Im}(f(x))$, CIOÈ SIA $f(x) = a(x) + i b(x)$. ALLORA f È DERIVABILE IN $x_0 \in (a,b)$ SE E SOLO SE LO SONO $a(x)$ E $b(x)$ E SI HA:

$$f'(x_0) = a'(x_0) + i b'(x_0)$$

DIMO BASTA OSSERVARE CHE:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x) + i b(x) - a(x_0) - i b(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x) - a(x_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{b(x) - b(x_0)}{x - x_0} = a'(x_0) + i b'(x_0) \end{aligned}$$

OSS. 2 VALGONO ANCORA LE PRINCIPALI PROPRIETÀ DELLA DERIVATA. NE ELENCHIAMO ALCUNE CHE CI SERVIRANNO, NELLE PROP. CHE SEGUONO.

PROP. 2 DATE $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$, ENTRAMBE DERIVABILI IN $x_0 \in (a, b)$. ALLORA VALGONO LE PROPRIETÀ:

- 1) f E g SONO CONTINUE IN x_0
- 2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $\alpha f + \beta g$ È DERIVABILE IN x_0 E $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$
- 3) $f \cdot g$ È DERIVABILE IN x_0 E $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

DIMO OMESSA PERCHÈ IDENTICA A QUELLA DEL CASO REALE.

PROP. 3 SIA $\lambda \in \mathbb{C}$ E $f(x) = e^{\lambda x}$. ALLORA $f'(x) = \lambda e^{\lambda x}$.

DIMO PER DEFINIZIONE, SE $\lambda = a + ib$ CON $a, b \in \mathbb{R}$, SI HA:

$$f(x) = e^{\lambda x} = e^{ax} \cdot (\cos bx + i \sin bx)$$

QUINDI:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{ax} \cdot (\cos bx + i \sin bx) \right)' = \\ &= a \cdot e^{ax} \cdot (\cos bx + i \sin bx) + e^{ax} \cdot (-b \sin bx + i b \cos bx) = \\ &= (a + ib) e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) = \lambda e^{\lambda x} \end{aligned}$$

OSS. 3 RICORDIAMO CHE, GRAZIE AL TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA,

OGNI POLINOMIO DI GRADO n , A COEFFICIENTI IN $\mathbb{C}$, È FATTORIZZABILE NEL PRODOTTO DI n POLINOMI DI 1° GRADO. PIÙ PRECISAMENTE, SE

(1)
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{CON } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C} \text{ E } a_n \neq 0,$$

ALLORA:

(2)
$$P(x) = a_n \cdot (x - x_1)^{n_1} \cdot (x - x_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (x - x_k)^{n_k} \quad \left(\begin{array}{l} \text{DOVE } x_1, \dots, x_k \in \mathbb{C} \\ \text{E } n_1 + n_2 + \dots + n_k = n \end{array} \right)$$

DIREMO CHE x_i È RADICE DI $P(x)$ CON MOLTEPLICITÀ n_i (PER OGNI $i = 1, \dots, k$)

OSSERVIAMO CHE SE, NELLA (1), I COEFFICIENTI DI $P(x)$ SONO TUTTI REALI,

ALLORA SE $\lambda \in \mathbb{C}$ È RADICE DI $P(x)$ CON MOLTEPLICITÀ n_λ , ANCHE IL SUO

CONIUGATO $\bar{\lambda}$ LO È, CON LA STESSA MOLTEPLICITÀ.

QUESTO PERCHÉ SE λ SODDISFA $P(\lambda)=0$, CIOÈ

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

FACENDO IL CONIUGATO DI AMBO I MEMBRI, E RICORDANDO CHE $\overline{a_i} = a_i$ PERCHÉ $a_i \in \mathbb{R}$, SI OTTIENE:

$$a_n (\bar{\lambda})^n + a_{n-1} (\bar{\lambda})^{n-1} + \dots + a_1 \bar{\lambda} + a_0 = 0$$

QUINDI TUTTE LE VOLTE CHE DA $P(\lambda)$ POSSO RACCOGLIERE IL FATTORE $(x-\lambda)$, POSSO ANCHE RACCOGLIERE IL FATTORE $(x-\bar{\lambda})$.

MA POICHÉ $(x-\lambda)(x-\bar{\lambda}) = (x^2 + |\lambda|^2)$, DOPO AVER RACCOLTO I DUE FATTORI $(x-\lambda)$ E $(x-\bar{\lambda})$

SI OTTIENE UN POLINOMIO ANCORA A COEFF. REALI, SUL QUALE SI PUÒ RIAPPLICARE IL PROCEDIMENTO.

QUESTO SIGNIFICA CHE SE POSSO RACCOGLIERE $(x-\lambda)^i$ ALLORA POSSO RACCOGLIERE ANCHE $(x-\bar{\lambda})^i$, CHE È QUANTO VOLEVAMO MOSTRARE.

DEF. 2 (CASO PARTICOLARE DELLA DEF. 1 DI LEZ 23)

UN'EQ. DIFF. LINEARE A COEFFICIENTI COSTANTI DI ORDINE n È UN'EQ. DEL TIPO:

$$(3) \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

DOVE $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ CON $a_n \neq 0$, E $b(x) \in C((a,b))$.

SE $b(x)$ È IDENTICAMENTE NULLA LA (3) SI DICE OMOGENEA, ALTRIMENTI SI DICE NON OMOGENEA. IN PARTICOLARE, DATA UN'EQ DI TIPO (3) NON OMOGENEA, L'EQUAZIONE OMOGENEA CHE HA LO STESSO 1° MEMBRO SI DICE OMOGENEA ADESSA ASSOCIATA. IL POLINOMIO AVENTE GLI STESSI COEFFICIENTI DI (3), CIOÈ

$$(4) \quad P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

PRENDE IL NOME DI POLINOMIO CARATTERISTICO DI (3).

INFINE L'OPERATORE:

$$(5) \quad \mathcal{L}: C^n(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$$
$$y(x) \mapsto a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x)$$

VIENE DETTO OPERATORE LINEARE ASSOCIATO A (3). DIREMO CHE (4) È POLINOMIO CARATTERISTICO ANCHE DI $\mathcal{L}$.

055.4 ABBIAMO GIÀ OSSERVATO IN UN CASO PIÙ GENERALE (**055.2** LEZ. 23) CHE $\mathcal{L}$ È LINEARE

E CHE LA (3) PUÒ ESSERE SCRITTA PIÙ SINTETICAMENTE COME:

$$\mathcal{L}(y) = b(x)$$

CIOÈ, LE SOLUZIONI DI (3) SONO LA CONTROIMMAGINE DI $b(x)$ TRAMITE $\mathcal{L}$.

ABBIAMO GIÀ DIMOSTRATO CHE TALE CONTROIMMAGINE È:

a) NEL CASO OMOGENEO, UN SSP. VETTORIALE DI DIM n DI $C^h(\mathbb{R})$ [TEO. 2, LEZ. 23]

b) NEL CASO NON OMOG., UN SSP. AFFINE DI DIM n DI $C^h(\mathbb{R})$ [TEO. 3, LEZ. 23]

ORA, NEL CASO PARTICOLARE DEI COEFF. COSTANTI, VOGLIAMO DARE UN METODO PER TROVARE ESPLICITAMENTE UNA BASE PER LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI.

ES. 1 TROVARE TUTTE LE SOLUZ. DI: $y'' - 8y' + 15y = 0$

SVOLGIMENTO

LO SPAZIO $\mathcal{S}$ DI TUTTE LE SOL. HA DIM. 2, PERCHÉ L'EQ È DEL SECONDO ORDINE. BASTERÀ QUINDI TROVARE 2 SOL. INDIPENDENTI, PER AVERE UNA BASE. IL POLINOMIO CARATTERISTICO È:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda - 3)(\lambda - 5)$$

HA 2 RADICI: $\lambda = 3$ E $\lambda = 5$.

SE PRENDIAMO LE 2 FUNZIONI

$$v_1(x) = e^{3x} \text{ E } v_2(x) = e^{5x}$$

IL PERCHÉ ABBIAMO SCELTO PROPRIO QUESTE 2 FUNZIONI SARÀ CHIARO A FINE LEZIONE

SCOPRIAMO, SOSTITUENDOLE NELL'EQUAZIONE, CHE ENTRAMBE SONO SOLUZIONI.

AD ESEMPIO FACCIAMO IL CALCOLO CON $v_2(x)$:

$$(v_2(x))'' - 8 \cdot (v_2(x))' + 15 \cdot v_2(x) = (e^{5x})'' - 8(e^{5x})' + 15(e^{5x}) =$$

$$= (5e^{5x})' - 8 \cdot 5e^{5x} + 15 \cdot e^{5x} =$$

$$= 5^2 \cdot e^{5x} - 8 \cdot 5 e^{5x} + 15 e^{5x} =$$

$$= (5^2 - 8 \cdot 5 + 15) e^{5x} = p(5) e^{5x} = 0$$

DA QUESTI ULTIMI PASSAGGI SI PUÒ SOSPETTARE (CON TANTO SENNO DEL PAI) PERCHÉ SI SONO SCELTE LE RADICI DI $p(x)$

LA VERIFICA È IDENTICA PER $v_1(x)$. QUINDI $v_1(x)$ E $v_2(x)$ SONO ENTRAMBE SOLUZIONI.

PER CONVINCERSI CHE SONO INDIPENDENTI BASTA OSSERVARE CHE HANNO ORDINI DI INFINITO DIVERSI PER $x \rightarrow +\infty$.

QUINDI $\mathcal{B} = \{v_1(x), v_2(x)\}$ È UNA BASE PER LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI, OUVERO LE SOLUZIONI SONO TUTTE E SOLE LE FUNZIONI DEL TIPO:

$$y(x) = \alpha e^{\lambda x} + \beta e^{\mu x} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

OSS. 5

PER DIMOSTRARE IL TEO. PRINCIPALE DELLA LEZIONE, CI SERVONO ALCUNI LEMMI TECNICI SUGLI OPERATORI ASSOCIATI ALLE EQ DIFF LINEARI A COEFF. COSTANTI.

LEMMA 1

SIANO $\mathcal{L}_1$ E $\mathcal{L}_2$ DUE OPERATORI DIFFERENZIALI A COEFFICIENTI COSTANTI AVENTI COME POLINOMI CARATTERISTICI RISPETTIVAMENTE $p(\lambda)$ E $q(\lambda)$ DEFINITI DA:

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

$$q(\lambda) = b_m \lambda^m + b_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0$$

ALLORA L'OPERATORE $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$ HA COME POLINOMIO CARATTERISTICO $p(\lambda) \cdot q(\lambda)$.

DIMO

SI OSSERVI CHE $p(\lambda) \cdot q(\lambda)$ È DATO DA:

$$\begin{aligned} p(\lambda) \cdot q(\lambda) &= (a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_n \lambda^n) \cdot (b_0 + b_1 \lambda + b_2 \lambda^2 + \dots + b_m \lambda^m) = \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) \lambda + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) \lambda^2 + \dots + \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) \lambda^k + \dots + a_n b_m \lambda^{n+m} = \\ &= \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) \lambda^k \end{aligned}$$

ORA, COMUNQUE SI PRENDA $y(x) \in C^{n+m}(\mathbb{R})$ SI HA:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2)(y(x)) &= \mathcal{L}_1(\mathcal{L}_2(y(x))) = \mathcal{L}_1\left(\sum_{j=0}^m b_j y^{(j)}(x)\right) = \sum_{j=0}^m b_j \mathcal{L}_1(y^{(j)}(x)) = \\ &= \sum_{j=0}^m b_j \left(\sum_{i=0}^n a_i (y^{(j)}(x))^{(i)} \right) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n b_j a_i y^{(i+j)}(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) y^{(k)}(x) = \mathcal{L}(y(x)) \end{aligned}$$

OPERATORE AVENTE
COME POL. CARATTERISTICO
 $p(\lambda) \cdot q(\lambda)$

COROLLARIO 1

SIANO $\mathcal{L}_1$ E $\mathcal{L}_2$ COME NEL LEMMA 1. ALLORA $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2 \circ \mathcal{L}_1$.

DIMO

SEGUE SUBITO DAL FATTO CHE $p(\lambda) \cdot q(\lambda) = q(\lambda) \cdot p(\lambda)$.