8 maggio 2020 (9.00-11.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma *Tor Vergata*

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI (...CONTINUA...)

LEMMA 1 SIA $\alpha \in \mathbb{C}$ E $\mathcal{L}: C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ TALE CHE $\mathcal{L}(y(x)) = y'(x) - \alpha y(x)$.

ALLORA $\mathcal{L}$ HA LE SEGUENTI PROPRIETÀ

(a) $\mathcal{L}(e^{\alpha x}) = 0$

(b) SE $P(x)$ È UN POLINOMIO DI GRADO m ALLORA IL MINIMO k TALE CHE

SIGNIFICA: $\underbrace{\mathcal{L}\circ\mathcal{L}\circ\dots\circ\mathcal{L}}_{k}$

$\boxed{\mathcal{L}^k}(P(x)e^{\alpha x}) = 0$ È $k = m+1$

(c) SE $\beta \neq \alpha$ E $P(x)$ È UN POLINOMIO ALLORA $\mathcal{L}(P(x)e^{\beta x}) = Q(x)e^{\beta x}$ CON $Q(x)$ POLINOMIO CHE HA LO STESSO GRADO DI $P(x)$.

DIMO

(a) $\mathcal{L}(e^{\alpha x}) = (e^{\alpha x})' - \alpha e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x} - \alpha e^{\alpha x} = 0$

(b) $\mathcal{L}(P(x)e^{\alpha x}) = (P(x)e^{\alpha x})' - \alpha P(x)e^{\alpha x} = P'(x)e^{\alpha x} + \cancel{P(x)\alpha e^{\alpha x}} - \cancel{\alpha P(x) e^{\alpha x}} = P'(x)e^{\alpha x}$

QUINDI:

$$\mathcal{L}^k(P(x)e^{\alpha x}) = (P(x))^{(k)} e^{\alpha x}$$

CIÒ SIGNIFICA CHE SE $P(x)$ HA GRADO m, IL MINIMO VALORE DI k CHE FA OTTENERE ZERO È $k = m+1$

(c) $\mathcal{L}(P(x)e^{\beta x}) = P'(x)e^{\beta x} + P(x)\beta e^{\beta x} - \alpha P(x)e^{\beta x} = (P'(x) + (\beta-\alpha)P(x))\, e^{\beta x}$

SE $\alpha \neq \beta$ IL GRADO DI $P(x)$ È LO STESSO DI $P'(x) + (\beta-\alpha)P(x)$.

TEO. 1 DATI $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, CON $a_n \neq 0$ SI CONSIDERI L'EQUAZIONE DIFF.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

SI SUPPONGA CHE LE RADICI DEL SUO POL. CARATTERISTICO $p(\lambda)$, SIANO $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ CON MOLTEPLICITÀ RISPETTIVAMENTE $m_1, \dots, m_k$.

ALLORA UNA BASE PER LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI S È DATA DA

$$\mathcal{B} = \{ e^{\alpha_1 x}, x e^{\alpha_1 x}, \dots, x^{m_1 - 1} e^{\alpha_1 x},$$
$$e^{\alpha_2 x}, x e^{\alpha_2 x}, \dots, x^{m_2 - 1} e^{\alpha_2 x},$$
$$\vdots$$
$$e^{\alpha_k x}, x e^{\alpha_k x}, \dots, x^{m_k - 1} e^{\alpha_k x} \}$$

DIMO

$\mathcal{B}$ È COMPOSTA DA $m_1+m_2+\dots+m_k$ ELEMENTI, MA GRAZIE AL TEO. FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA $m_1+m_2+\dots+m_k=n$. DI CONSEGUENZA, SICCOME $\dim(S)=n$, UNA VOLTA VERIFICATO CHE $\mathcal{B}\subset S$, BASTERÀ MOSTRARE L'INDIPENDENZA LINEARE PER AVERE CHE $\mathcal{B}$ È UNA BASE. DOBBIAMO QUINDI DIMOSTRARE 2 COSE:

(I) OGNI ELEMENTO DI $\mathcal{B}$ È UNA SOLUZIONE.

(II) $\mathcal{B}$ È UN INSIEME LINEARMENTE INDIPENDENTE.

A TALE SCOPO, DETTO $\mathcal{L}$ L'OPERATORE CHE HA COME POL. CARATTERISTICO LO STESSO $P(\lambda)$ DELL'EQUAZIONE. SAPPIAMO CHE

$$P(\lambda)=a_n(\lambda-\alpha_1)^{m_1}(\lambda-\alpha_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\alpha_k)^{m_k}$$

QUINDI, SE INDICHIAMO CON $\mathcal{L}_i$ L'OPERATORE

(1) $$\mathcal{L}_i(y(x))=y'(x)-\alpha_i y(x)$$

AVREMO CHE:

(2) $$\mathcal{L}(y)=a_n\cdot\mathcal{L}_1^{m_1}\circ\mathcal{L}_2^{m_2}\circ\cdots\circ\mathcal{L}_k^{m_k}$$

SI NOTI CHE, GRAZIE AL LEMMA 1, OGNI FUNZIONE DEL TIPO $x^p\cdot e^{\alpha_i x}$, CON $p<m_i$, SODDISFA:

$$\mathcal{L}_i^{m_i}(x^p e^{\alpha_i x})=0$$

QUINDI SODDISFA ANCHE:

$$\mathcal{L}(x^p e^{\alpha_i x})=0$$

PERCHÈ NELLA **(2)** POSSO SEMPRE CAMBIARE L'ORDINE DEGLI OPERATORI IN MODO CHE IL PRIMO AD AGIRE SIA $\mathcal{L}_i^{m_i}$.

QUINDI OGNI ELEMENTO DI $\mathcal{B}$ È SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE.

MOSTRIAMO CHE SONO INDIPENDENTI.

SE COSÌ NON FOSSE ESISTEREBBE UNA LORO COMB. LINEARE A COEFF. NON TUTTI NULLI UGUALE ALLA FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA, CIOÈ ESISTEREBBERO k POLINOMI $A_1(x), A_2(x),\dots,A_k(x)$ NON TUTTI IDENTICAMENTE NULLI TALI CHE

(3) $$A_1(x)e^{\alpha_1 x}+A_2(x)e^{\alpha_2 x}+\dots+A_k(x)e^{\alpha_k x}=0$$

CON $\text{grado}(A_i(x))<m_i$, PER OGNI $i=1,\dots,k$.

SUPPONIAMO CHE SIA $A_{i_0}(x)$ NON IDENTICAMENTE NULLO. SE GLI $\mathcal{L}_i$ SONO ANCORA GLI OPERATORI DEFINITI DA **(1)**, APPLICHIAMO AD AMBO I MEMBRI DI **(3)** L'OPERATORE OTTENUTO COMPONENDO TUTTI GLI OPERATORI $\mathcal{L}_i^{m_i}$, CON $i \neq i_0$.

IN TAL MODO, GRAZIE AL LEMMA 1, LA **(3)** DIVENTA

$$B_{i_0}(x) \cdot e^{a_{i_0} x} = 0$$

CON $\text{grado}\left(B_{i_0}(x)\right) = \text{grado}\left(A_{i_0}(x)\right)$. CHE È ASSURDO VISTO CHE $B_{i_0}(x)$ È UN POLINOMIO NON NULLO.

OSS. 1 NEL $\boxed{\text{TEO. 1}}$ GLI ELEMENTI DELLA BASE $\mathcal{B}$ SONO IN GENERALE FUNZIONI A VALORI IN $\mathbb{C}$ MENTRE, VISTO CHE I COEFFICIENTI DELL'EQUAZ. SONO TUTTI REALI, CI PIACEREBBE AVERE FUNZIONI A VALORI IN $\mathbb{R}$. VEDIAMO COME FARE.

PER COMODITÀ SCRIVIAMO:

(4)
$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\lambda_1} \cup \mathcal{B}_{\lambda_2} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{\lambda_k}$$

DOVE, PER OGNI $i = 0, 1, \ldots, k$, SI È POSTO:

$$\mathcal{B}_{\lambda_i} = \left\{ e^{\lambda_i x}, x e^{\lambda_i x}, \ldots, x^{m_i - 1} e^{\lambda_i x} \right\}$$

ABBIAMO GIÀ VISTO CHE, ESSENDO REALI I COEFF. DEL POL. CARATTERISTICO, PER OGNI λ_i, SE NON È REALE, CI SARÀ TRA LE ALTRE RADICI $\lambda_j = \bar{\lambda}_i$ CON $m_i = m_j$.

QUINDI IN REALTÀ SE INDICHIAMO CON r_i LE RADICI REALI E CON c_i E $\bar{c}_i$ LE COPPIE DI RADICI COMPLESSE CONIUGATE, LA **(4)** PUÒ ESSERE SCRITTA:

(5)
$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{r_1} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{r_p} \cup \mathcal{B}_{c_1} \cup \mathcal{B}_{\bar{c}_1} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{c_q} \cup \mathcal{B}_{\bar{c}_q}$$

SI NOTI CHE PER OGNI $j = 1, \ldots, q$ SI HA:

$$\mathcal{B}_{c_j} \cup \mathcal{B}_{\bar{c}_j} = \left\{ e^{c_j x}, e^{\bar{c}_j x}, x e^{c_j x}, x e^{\bar{c}_j x}, \ldots, x^{m_j - 1} e^{c_j x}, x^{m_j - 1} e^{\bar{c}_j x} \right\}$$

ORA, VISTO CHE $c_j = a_j + i b_j$ E $\bar{c}_j = a_j - i b_j$, SI HA:

$$e^{c_j x} = 1 \cdot e^{a_j x} \cos b_j x + i \cdot e^{a_j x} \sin b_j x$$

E

$$e^{\bar{c}_j x} = 1 \cdot e^{a_j x} \cos b_j x - i \cdot e^{a_j x} \sin b_j x$$

D'ALTRA PARTE

$$e^{a_j x}\cos b_j x = \frac{1}{2} e^{c_j x} + \frac{1}{2} e^{\bar{c}_j x}$$

E

$$e^{a_j x}\sin b_j x = \frac{1}{2i} e^{c_j x} - \frac{1}{2i} e^{\bar{c}_j x}$$

DI CONSEGUENZA:

$$\operatorname{Span}\{\mathcal{B}_{c_j} \cup \mathcal{B}_{\bar{c}_j}\} = \operatorname{Span} \mathcal{B}_j$$

DOVE ABBIAMO DEFINITO:

(6)
$$\mathcal{B}_j = \{ e^{a_j x}\cos b_j x, x e^{a_j x}\cos b_j x, \dots, x^{m_j - 1} e^{a_j x}\cos b_j x,$$
$$e^{a_j x}\sin b_j x, x e^{a_j x}\sin b_j x, \dots, x^{m_j-1} e^{a_j x}\sin b_j x \}$$

ESSENDO a_j E b_j, RISPETTIVAMENTE, PARTE REALE E IMMAGINARIA DELLA RADICE c_j DEL POLINOMIO CARATTERISTICO.

DI CONSEGUENZA, PER GENERARE LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI, INVECE DI (5) POSSO PRENDERE:

(7)
$$\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_{r_1} \cup \dots \cup \mathcal{B}_{r_p} \cup \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$$

DOVE, PER OGNI $j = 1, \dots, q$, $\mathcal{B}_j$ È DEFINITO DA (6).

SICCOME $\tilde{\mathcal{B}}$ HA ESATTAMENTE n ELEMENTI E LO SPAZIO DA LUI GENERATO, CIOÈ LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI, HA DIMENSIONE n, GLI ELEMENTI DI $\tilde{\mathcal{B}}$ SONO PER FORZA LINEARMENTE INDIPENDENTI.

SI NOTI CHE, PUR ESSENDO $\tilde{\mathcal{B}}$ UNA BASE PER LO SPAZIO DELLE SOL. A VALORI COMPLESSI DELL'EQUAZIONE, LE n FUNZIONI CHE STANNO IN $\tilde{\mathcal{B}}$ SONO A VALORI REALI.

SI NOTI ANCHE CHE SE $\tilde{\mathcal{B}}$ È LINEARMENTE INDIPENDENTE PRENDENDO COME CAMPO DI SCALARI $\mathbb{C}$, LO È A MAGGIOR RAGIONE SU $\mathbb{R}$. QUINDI $\tilde{\mathcal{B}}$ È UNA BASE ANCHE PER LO SPAZIO DELLE SOL. A VALORI IN $\mathbb{R}$, CHE È CIÒ CHE CERCAVAMO.

$\boxed{\text{ES. 1}}$ TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DI: $y^{(5)} + 3y^{(4)} + 4y' + 12y = 0$

$\boxed{\text{SVOLGIMENTO}}$

IL POLINOMIO CARATTERISTICO È:

$$p(\lambda) = \lambda^5 + 3\lambda^4 + 4\lambda + 12 = (\lambda^4 + 4)(\lambda + 3)$$

LE CUI 5 RADICI SONO $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1+i$, $\lambda_3 = 1-i$, $\lambda_4 = -1+i$, $\lambda_5 = -1-i$.

A PARTIRE DA ESSE COSTRUIAMO LE FUNZIONI CHE STANNO IN $\widetilde{\mathcal{B}}$.

$$\lambda_1 = -3 \longrightarrow e^{-3x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_2 = 1+i \\ \lambda_3 = 1-i\end{array}\right\} \longrightarrow e^x \cos x, \; e^x \sin x$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_4 = -1+i \\ \lambda_5 = -1-i\end{array}\right\} \longrightarrow e^{-x} \cos x, \; e^{-x} \sin x$$

QUINDI LA SOL. GENERALE DELLA NOSTRA EQUAZIONE È:

$$y(x) = A e^{-3x} + B e^x \cos x + C e^x \sin x + D e^{-x} \cos x + E e^{-x} \sin x \qquad A,B,C,D,E \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$ TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DI: $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 8y'' - 4y' + 4y = 0$

SVOLGIMENTO

IL POLINOMIO CARATTERISTICO È:

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 4\lambda + 4$$

SE SI PROVA A FATTORIZZARLO SI OTTIENE:

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 4\lambda + 4 = \ldots = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2$$

MA L'EQUAZIONE:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

HA SOLUZIONI $\lambda_1 = 1+i$ E $\lambda_2 = 1-i$

QUINDI λ_1 E λ_2 SONO ANCHE RADICI DI $p(\lambda)$, CON MOLTEPLICITÀ 2.

A PARTIRE DA ESSE COSTRUIAMO LE SOLUZIONI:

$$\text{MOLT.}=2 \quad \left.\begin{array}{l}\lambda_1 = 1+i \\ \lambda_2 = 1-i\end{array}\right\} \longrightarrow e^x \cos x, \; e^x \sin x, \; x e^x \cos x, \; x e^x \sin x$$

QUINDI LA SOL. GENERALE È:

$$y(x) = (A + Bx) e^x \cos x + (C + Dx) e^x \sin x$$

CASO NON OMOGENEO

ES. 3 TROVARE LA SOL. GENERALE DI

(8)
$$y'' - y' - 2y = e^x$$

SVOLGIMENTO

PRIMA RISOLVIAMO L'OMOGENEA ASSOCIATA:

(9)
$$y'' - y' - y = 0$$

IL CUI POLINOMIO CARATT. $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$ HA RADICI $\lambda_1 = -1$ E $\lambda_2 = 2$.

QUINDI LA SOL. GEN. DI **(9)** E':

(10)
$$y(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{2x} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

SAPPIAMO CHE SE TROVIAMO UNA SOL. $y_0(x)$ DELLA NON OMOGENEA ABBIAMO CONCLUSO, PERCHE LA SOL. GENERALE È:

$$y(x) = y_0(x) + \alpha e^{-x} + \beta e^{2x} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

CI SERVE QUINDI UN MODO PER TROVARE UNA SOL. PARTICOLARE $y_0(x)$ DELLA NON OMOGENEA.

NE FAREMO VEDERE 2.

1° MODO (METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI)

CONSISTE NEL CERCARE $y_0(x)$ TRA LE FUNZIONI DEL TIPO

(11)
$$y_0(x) = \alpha(x) e^{-x} + \beta(x) e^{2x}$$

CIOÈ TRA LE FUNZIONI FATTE COME LA SOLUZIONE GENERALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA MA CON LE COSTANTI α E β CHE DIVENTANO FUNZIONI. (DA QUI IL NOME DEL METODO)

CI CHIEDIAMO DUNQUE COME SCEGLIERE $\alpha(x)$ E $\beta(x)$ NELLA **(11)** AFFINCHÈ $y_0(x)$ SODDISFI L'EQUAZIONE **(8)**.

SI NOTI CHE IN QUESTO MODO LE INCOGNITE SONO 2: $\alpha(x)$ E $\beta(x)$.

TUTTAVIA L'EQUAZIONE CHE DEVONO SODDISFARE È UNA SOLA: QUELLA CHE SI OTTIENE SOSTITUENDO LA **(11)** IN **(8)**.

SICCOME PERÒ NON CI INTERESSA TROVARE TUTTE LE COPPIE $(\alpha(x), \beta(x))$ CHE VANNO BENE, MA CI BASTA UNA COPPIA SOLA, SIAMO LIBERI DI AGGIUNGERE UN'ALTRA EQUAZIONE AD ARBITRIO NOSTRO, CHE SCEGLIEREMO IN MODO DA RENDERE PIÙ FACILI I CALCOLI.

PER SOSTITUIRE $y_0(x)$ IN **(8)** COMINCIAMO A CALCOLARE $y_0'(x)$ E $y_0''(x)$.

COMINCIAMO DA $Y'(x_0)$. SI HA:

$$Y_0'(x) = \left(\alpha(x)\, e^{-x} + \beta(x)\, e^{2x} \right)' = \underbrace{\alpha'(x)\, e^{-x} + \beta'(x)\, e^{2x}}_{(*)} - \alpha(x)\, e^{-x} + 2\beta(x)\, e^{2x}$$

A QUESTO PUNTO DECIDO CHE L'EQUAZIONE IN PIÙ CHE POSSO AGGIUNGERE È:

(12)
$$\alpha'(x)\, e^{-x} + \beta'(x)\, e^{2x} = 0$$

IN TAL MODO SCOMPARE IL TERMINE (*) E SI OTTIENE:

$$Y_0'(x) = -e^{-x}\alpha(x) + 2e^{2x}\beta(x)$$

DA CUI RICAVO:

$$Y_0''(x) = e^{-x}\alpha(x) + 4e^{2x}\beta(x) - e^{-x}\alpha'(x) + 2e^{2x}\beta'(x)$$

SOSTITUENDO $Y_0(x)$, $Y_0'(x)$ E $Y_0''(x)$ IN **(8)** SI OTTIENE:

$$\cancel{e^{-x}\alpha(x)} + \cancel{4e^{2x}\beta(x)} - e^{-x}\alpha'(x) + 2e^{2x}\beta'(x) + \cancel{e^{-x}\alpha(x)} \cancel{- 2e^{2x}\beta(x)} \cancel{-2e^{-x}\alpha(x)} \cancel{-2e^{2x}\beta(x)} = e^{x}$$

CIOÈ:

(13)
$$-e^{-x}\alpha'(x) + 2e^{2x}\beta'(x) = e^{x}$$

QUEST'ULTIMA EQUAZIONE, ACCOPPIATA CON LA **(12)**, CHE ABBIAMO FISSATO NOI, CI PERMETTE DI TROVARE $\alpha'(x)$ E $\beta'(x)$. INFATTI IL SISTEMA CHE SI OTTIENE:

$$\begin{cases} e^{-x}\alpha'(x) + e^{2x}\beta'(x) = 0 \\ -e^{-x}\alpha'(x) + 2e^{2x}\beta'(x) = e^{x} \end{cases}$$

ESPLICITANDO RISPETTO AD $\alpha'(x)$ E $\beta'(x)$ CI FORNISCE:

$$\begin{cases} \alpha'(x) = -\frac{1}{3}\, e^{2x} \\ \beta'(x) = \frac{1}{3}\, e^{-x} \end{cases}$$

QUINDI UNA SCELTA POSSIBILE PER $\alpha(x)$ E $\beta(x)$ È:

$$\begin{cases} \alpha(x) = -\frac{1}{6}\, e^{2x} \\ \beta(x) = -\frac{1}{3}\, e^{-x} \end{cases}$$

QUINDI SI OTTIENE:

$$Y_0(x) = \alpha(x)\, e^{-x} + \beta(x)\, e^{2x} = -\frac{1}{6} e^{2x} \cdot e^{-x} - \frac{1}{3} e^{-x} e^{2x} = -\frac{1}{2} e^{x}$$

LA VERIFICA DIRETTA MOSTRA CHE TALE $Y_0(x)$ VA BENE:

$$\left(-\frac{1}{2}e^{x}\right)'' - \left(-\frac{1}{2}e^{x}\right)' - 2\left(-\frac{1}{2}e^{x}\right) = -\frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{x} + e^{x} = e^{x}$$

QUINDI LA SOL. GENERALE DELLA NON OMOGENEA È:

$$Y(x) = -\frac{1}{2}e^{x} + \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{2x} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$\boxed{2^{\circ}\ \text{MODO}}$ (METODO DELL'ANNICHILATORE)

(.... CONTINUA NELLA LEZ. 26 ...)