

Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 26

Titolo nota

15/08/2014

11 maggio 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI (...CONTINUA...)

(... CONTINUA DA ES.3 LEZ. 25 ...)

2° MODO (METODO DELL'ANNICHILATORE)

LA NOSTRA EQUAZIONE:

$$y'' - y' - 2y = e^x$$

PUÒ ESSERE RISCritta:

(1) $\mathcal{L}(y) = e^x$

DOVE $\mathcal{L}$ È L'OPERATORE CON POL. CARATTERISTICO $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$.

MI SERVE ORA UN OPERATORE $\mathcal{L}_0$ TALE CHE $\mathcal{L}_0(e^x) = 0$. A TALE SCOPO BASTA PRENDERE $\mathcal{L}_0$ IN MODO CHE IL SUO POL. CARATTERISTICO SIA $p_0(\lambda) = \lambda - 1$.

APPLICANDO $\mathcal{L}_0$ IN AMBO I MEMBRI DELLA (1) OTTENGO:

$$\mathcal{L}_0(\mathcal{L}(y)) = \mathcal{L}_0(e^x)$$

CIDÈ:

(2) $(\mathcal{L}_0 \circ \mathcal{L})(y) = 0$

SI NOTI CHE OGNI SOLUZIONE DI (1) È ANCHE SOL. DI (2), MA NON VICEVERSA.

SICCOME $\mathcal{L}_0 \circ \mathcal{L}$ HA COME POLINOMIO CARATTERISTICO:

$$p_0(\lambda) \cdot p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

LA SOL. GENERALE DI (2) È:

(3) $y(x) = \alpha e^{-x} + \beta e^{2x} + \gamma e^x$

QUINDI BASTA CERCARE $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ IN MODO CHE (3) SODDISFI $\mathcal{L}(y) = e^x$.

NOTIAMO PERÒ CHE, SICCOME $\mathcal{L}(\alpha e^{-x} + \beta e^{2x}) = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, BASTERÀ CERCARE UNA SOL. DI $\mathcal{L}(y) = e^x$ TRA LE FUNZIONI DEL TIPO:

(4) $y(x) = \gamma e^x \quad \text{CON } \gamma \in \mathbb{R}.$

FACCIAMOLO:

$$(ye^x)'' - (ye^x)' - 2(ye^x) = e^x$$

$$ye^x - ye^x - 2ye^x = e^x$$

$$-2ye^x = e^x$$

$$-2y = 1$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

QUINDI UNA SOL. PARTICOLARE DELLA NON OMOGENEA È DATA DA $y_p(x) = -\frac{1}{2}e^x$.

QUINDI LA SOL. GENERALE È:

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^x + \alpha e^{-x} + \beta e^{2x} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

055.1 (METODO DELL'ANNICILATORE - CASO GENERALE)

DATA UN'EQUAZIONE DEL TIPO:

$$(5) \quad \mathcal{L}(y) = b(x)$$

CON $\mathcal{L}$ OPERATORE DIFF. LINEARE A COEFFICIENTI COSTANTI DI ORDINE n .

SE $b(x)$ È DI UNO DEI 3 TIPI:

- (6) $b(x) = q(x)e^{ax}$
- (7) $b(x) = q(x)e^{ax} \cos bx$
- (8) $b(x) = q(x)e^{ax} \sin bx$

$q(x)$ È UN POLINOMIO
DI GRADO k E
 $a, b \in \mathbb{R}$

SI RIESCE A TROVARE UN OPERATORE DIFFERENZIALE LINEARE A COEFF. COSTANTI $\tilde{\mathcal{L}}$

TALE CHE $\tilde{\mathcal{L}}(b(x)) = 0$. A QUESTO PUNTO APPLICO $\tilde{\mathcal{L}}$ AD AMBO I MEMBRI DI (5)

E OTTENGONO:

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(y)) = \mathcal{L}(b(x))$$

CIOÈ

$$(9) \quad (\tilde{\mathcal{L}} \circ \mathcal{L})(y) = 0$$

CHE È OMOGENEA E QUINDI SI RISOLVE.

SI NOTI CHE L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DI (5) È UN SOTTOINSIEME DELL'INSIEME DELLE SOLUZIONI DI (9), QUINDI BASTA CERCARE LA SOL. $y_p(x)$ TRA QUESTE ULTIME.

VEDIAMO COSA SUCCEDDE IN DETTAGLIO NEI CASI (6), (7) E (8).

NEL SEGUITO $P(\lambda)$ INDICA SEMPRE IL POL. CAR. DI $\mathcal{L}$ E $\beta = \{v_1(x), \dots, v_n(x)\}$ INDICA LA BASE FATTA DI FUNZIONI REALI COSTRUITA A PARTIRE DALLE RADICI DI $P(\lambda)$ PER LO SPAZIO DELLE SOL. DI $\mathcal{L}(y) = 0$.

CASO (6) $b(x) = q(x)e^{ax}$ CON $a \in \mathbb{R}$ E $q(x)$ POL. DI GRADO k .

IN TAL CASO $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_a^{k+1}$ DOVE $\mathcal{L}_a(y) = y' - ay$, QUINDI OGNI SOL. DI

(10) $\mathcal{L}(y) = b(x)$

È ANCHE SOL. DI:

(11) $(\mathcal{L}_a^{k+1} \circ \mathcal{L})(y) = 0$

DISTINGUIAMO 2 SOTTOCASI:

I a NON COMPARE TRA LE RADICI DI $P(\lambda)$.

IN TAL CASO UNA BASE PER LO SPAZIO DELLE SOL. DI (11) È DATA DA:

$$\beta \cup \{e^{ax}, xe^{ax}, \dots, x^k e^{ax}\}$$

QUINDI LA SOLUZIONE GENERALE (11) È:

(12) $y(x) = \alpha_1 v_1(x) + \dots + \alpha_n v_n(x) + \beta_0 e^{ax} + \beta_1 x e^{ax} + \dots + \beta_k x^k e^{ax} \quad \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$

DI ESSE QUELLE CHE SODDISFANO $\mathcal{L}(y) = b(x)$ SONO TUTTE E SOLE QUELLE TALI CHE:

$$\mathcal{L}(\alpha_1 v_1(x) + \dots + \alpha_n v_n(x) + \beta_0 e^{ax} + \beta_1 x e^{ax} + \dots + \beta_k x^k e^{ax}) = b(x)$$

CIOÈ TALI CHE:

(13) $\mathcal{L}(\beta_0 e^{ax} + \beta_1 x e^{ax} + \dots + \beta_k x^k e^{ax}) = b(x)$

SICCOME SAPPIAMO GIÀ CHE LE SOL. DI $\mathcal{L}(y) = b(x)$ SONO TUTTE CONTENUTE IN (12)

ALLORA C'È ALMENO UN MODO DI SCEGLIERE $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$ IN MODO CHE VALGA (13).

TALE MODO IN REALTÀ È UNICO PERCHÈ SE CE NE FOSSE UN'ALTRO:

(14) $\mathcal{L}(\beta'_0 e^{ax} + \beta'_1 x e^{ax} + \dots + \beta'_k x^k e^{ax}) = b(x)$

ALLORA, SOTTRAENDO MEMBRO A MEMBRO (13) E (14) SI AVREBBE:

$$\mathcal{L}((\beta_0 - \beta'_0) e^{ax} + (\beta_1 - \beta'_1) x e^{ax} + \dots + (\beta_k - \beta'_k) x^k e^{ax}) = 0$$

CIOÈ CI SAREBBE UNA COMB. LINEARE DI $\{e^{ax}, xe^{ax}, \dots, x^k e^{ax}\}$ CON COEFF. NON TUTTI NULLI CHE SODDISFA $\mathcal{L}(y) = 0$ E QUINDI STA IN $\text{Span}(\beta)$. MA CIOÈ ASSURDO

PERCHÉ $B \cup \{e^{ax}, \dots, x^k e^{ax}\}$ È UN INSIEME DI ELEMENTI INDIPENDENTI.

QUINDI ESISTE ESATTAMENTE UN MODO DI SCEGLIERE $\beta_0, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$ IN:

$$(15) \quad y_0(x) = \beta_0 e^{ax} + \dots + \beta_k x^k e^{ax}$$

IN MODO CHE $\mathcal{L}(y_0(x)) = b(x)$

II

α È RADICE DI $p(\lambda)$ CON MOLTEPLICITÀ m .

IN TAL CASO B CONTIENE GIÀ $e^{ax}, x e^{ax}, \dots, x^{m-1} e^{ax}$, QUINDI LA BASE PER LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DI (11) STAVOLTA È:

$$B \cup \{x^m e^{ax}, x^{m+1} e^{ax}, \dots, x^{m+k} e^{ax}\}$$

PROCEDENDO COME NEL PUNTO **I** SI TROVA CHE $\exists!$ $y_0(x)$ SOLUZIONE DI $\mathcal{L}(y_0) = b(x)$ DELLA FORMA:

$$(16) \quad y_0(x) = \beta_0 x^m e^{ax} + \beta_1 x^{m+1} e^{ax} + \dots + \beta_k x^{m+k} e^{ax}$$

CASO (2) $b(x) = q(x) e^{ax} \cos bx$ CON $a, b \in \mathbb{R}$ E $q(x)$ POLINOMIO DI GRADO k .

STAVOLTA, POSTO $\lambda_0 = a + ib$ (E QUINDI $\bar{\lambda}_0 = a - ib$), SIANO

$$\mathcal{L}_1(y) = y' - \lambda_0 y \quad \text{E} \quad \mathcal{L}_2(y) = y' - \bar{\lambda}_0 y.$$

SICCOME:

$$b(x) = q(x) e^{ax} \cos bx = q(x) \frac{e^{\lambda_0 x} + e^{\bar{\lambda}_0 x}}{2}$$

$$\text{SI HA: } \left(\mathcal{L}_1^{(k+1)} \circ \mathcal{L}_2^{(k+1)} \right) (b(x)) = 0$$

QUINDI, APPLICANDO AD AMBO I MEMBRI DI

$$(17) \quad \mathcal{L}(y) = b(x)$$

L'OPERATORE $\mathcal{L}_1^{(k+1)} \circ \mathcal{L}_2^{(k+1)}$, SI OTTIENE

$$(18) \quad \left(\mathcal{L}_1^{(k+1)} \circ \mathcal{L}_2^{(k+1)} \circ \mathcal{L} \right) (y) = 0$$

QUINDI TUTTE LE SOLUZIONI DI (17) SONO ANCHE SOL. DI (18).

ORA, DETTA m LA MOLTEPLICITÀ CON CUI $\lambda_0 = a + ib$ COMPARE TRA LE RADICI DI $p(\lambda)$ (INTENDENDO CHE, SE NON VI COMPARE, SIGNIFICA CHE $m=0$), AVREMO CHE ANCHE $\bar{\lambda}_0 = a - ib$ VI COMPARE CON LA STESSA MOLTEPLICITÀ m , QUINDI UNA BASE PER LO SPAZIO

DELLE SOLUZIONI DI (18) È DATA DA:

$$\mathcal{B} \cup \left\{ x^m e^{ax} \cos bx, x^{m+1} e^{ax} \cos bx, \dots, x^{m+k} e^{ax} \cos bx, \right. \\ \left. x^m e^{ax} \sin bx, x^{m+1} e^{ax} \sin bx, \dots, x^{m+k} e^{ax} \sin bx \right\}$$

RAGIONANDO COME NEI PUNTI PRECEDENTI SI TROVA CHE UNA È UNA SOLA

$Y_0(x)$ SOLUZIONE DI (17) DELLA FORMA:

$$Y_0(x) = \beta_0 x^m e^{ax} \cos bx + \dots + \beta_k x^{m+k} e^{ax} \cos bx + \gamma_0 x^m e^{ax} \sin bx + \dots + \gamma_k x^{m+k} e^{ax} \sin bx$$

CASO (8) $b(x) = q(x) e^{ax} \sin bx$ CON $a, b \in \mathbb{R}$ E $q(x)$ POLINOMIO DI GRADO k .

IDENTICO AL CASO (7)

RIASSUMIAMO QUANTO APPENA DIMOSTRATO NEI 2 SEGUENTI TEOREMI:

TEO. 1 DATA L'EQ. DIFF.

(19)
$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

CON $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ E $b(x) = q(x) e^{ax}$, CON $a \in \mathbb{R}$ E $q(x)$ POL DI GRADO k .

INDICHIAMO CON $P(\lambda)$ IL POL. CARATTERISTICO DELL'EQUAZIONE E SIA m LA MOLTEPLICITÀ CON CUI a COMPARE TRA LE RADICI DI $P(\lambda)$ (SI CONVIENE CHE $m=0$ SIGNIFICA CHE NON È RADICE DI $P(\lambda)$).

ALLORA $\exists!$ $Y_0(x)$ SOL. DI (19) DELLA FORMA:

$$Y_0(x) = \beta_0 x^m e^{ax} + \beta_1 x^{m+1} e^{ax} + \dots + \beta_k x^{m+k} e^{ax} \quad \text{CON OPPORTUNI } \beta_0, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$$

TEO. 2 DATA L'EQ. DIFF.

(20)
$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

CON $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ E $b(x) = q(x) e^{ax} \cos bx$ (OPPURE $b(x) = q(x) e^{ax} \sin bx$), DOVE $a, b \in \mathbb{R}$ E $q(x)$ È UN POLINOMIO DI GRADO k . INOLTRE, INDICATO CON $P(\lambda)$ IL POL. CARATTERISTICO DI (20), SIA m LA MOLTEPLICITÀ CON CUI $a \pm ib$ COMPARE TRA LE RADICI DI $P(\lambda)$ (SE NON È RADICE DI $P(\lambda)$ DIREMO CHE $m=0$).

ALLORA ESISTE UNA E UNA SOLA $Y_0(x)$, SOLUZ. DI (20), DELLA FORMA:

$$Y_0(x) = \beta_0 x^m e^{ax} \cos bx + \dots + \beta_k x^{m+k} e^{ax} \cos bx + \gamma_0 x^m e^{ax} \sin bx + \dots + \gamma_k x^{m+k} e^{ax} \sin bx.$$

CON OPPORTUNI $\beta_0, \dots, \beta_k, \gamma_0, \dots, \gamma_k \in \mathbb{R}$.

ES. 1 RISOLVERE

(21)

$$y^{(3)} + y'' + y' + y = e^{-x}$$

SVOLGIMENTO

L'OMOGENEA ASSOCIATA È:

$$y^{(3)} + y'' + y' + y = 0$$

È IL POL. CARATTERISTICO È:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda^2 + 1)(\lambda + 1)$$

LE CUI RADICI SONO:

$$\begin{array}{lcl} \lambda_1 = -1 & \text{CON } m_1 = 1 & \longrightarrow e^{-x} \\ \lambda_2 = i & \text{CON } m_2 = 1 & \longrightarrow \cos x, \sin x \\ \lambda_3 = -i & \text{CON } m_3 = 1 & \end{array}$$

BASE β PER LO
SPAZIO DELLE SOL.
DELL'OMOGENEA ASSOCIATA

QUINDI LA SOL. GENERALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA È:

$$y(x) = \alpha e^{-x} + \beta \sin x + \gamma \cos x$$

CERCHIAMO ORA $y_0(x)$ SOL. PARTICOLARE DELLA NON OMOGENEA.

SICCOME $b(x) = e^{-x}$ E -1 COMPARE GIÀ TRA LE RADICI DI $p(\lambda)$ CON MULT. 1,

IL **TEO. 1** MI GARANTISCE CHE $\exists!$ UNA SOL. DI (21) DELLA FORMA:

$$y_0(x) = c x e^{-x}$$

PER TROVARLA SOSTITUISCO IN (21). A TALE SCOPO TROVIAMO:

$$y_0'(x) = c(e^{-x} + x \cdot (-1)e^{-x}) = c(1-x)e^{-x}$$

$$y_0''(x) = c(-e^{-x} + (1-x) \cdot (-1)e^{-x}) = c(x-2)e^{-x}$$

$$y_0'''(x) = c(e^{-x} + (x-2) \cdot (-1)e^{-x}) = c(3-x)e^{-x}$$

SOSTITUENDO IN (21) OTTIENGO.

$$c(3-x)e^{-x} + c(x-2)e^{-x} + c(1-x)e^{-x} + cxe^{-x} = e^{-x}$$

CIÒ È:

$$2c e^{-x} = e^{-x}$$

DA CUI SEGUE $c = \frac{1}{2}$. DUNQUE LA SOL. PARTICOLARE DI (21) È $y_0(x) = \frac{1}{2} x e^{-x}$ E QUINDI LA

SOL. GENERALE È:

$$y_0(x) = \frac{1}{2} x e^{-x} + \alpha e^{-x} + \beta \sin x + \gamma \cos x \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

E9.2 RISOLVERE

(22) $y^{(3)} + y'' + y' + y = \cos x$

SVOLGIMENTO

LA OMOGENEA ASSOCIATA È LA STESSA DI E9.1 QUINDI LE RADICI DEL POL. CARATTERISTICO SONO LE STESSA DI PRIMA. BASTA QUINDI TROVARE UNA SOL. PARTICOLARE DI (22). SICCOME $b(x)$ È DELLA FORMA:

$$b(x) = e^{\alpha x} \cos bx$$

CON $\alpha=0$ E $b=1$, LA CORRISPONDENTE RADICE COMPLESSA È $\lambda_0 = i$, CHE COMPARE COME RADICE DI $P(x)$ CON MOLTEPLICITÀ 1. GRAZIE AL TEO. 2, ESISTE UN'E UNICA SOLA $y_0(x)$, SOLUZIONE DI (22), DELLA FORMA:

$$y_0(x) = A x \cos x + B x \sin x$$

PER DETERMINARE A E B, DOBBIAMO CALCOLARE y_0' , y_0'' E y_0''' E SOSTITUIRE IN (22).

SI HA:

$$y_0'(x) = A \cos x + B \sin x - A x \sin x + B x \cos x$$

$$\begin{aligned} y_0''(x) &= -A \sin x + B \cos x - A \sin x + B \cos x - A x \cos x - B x \sin x = \\ &= -2A \sin x + 2B \cos x - A x \cos x - B x \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0'''(x) &= -2A \cos x - 2B \sin x - A \cos x - B \sin x + A x \sin x - B x \cos x = \\ &= -3A \cos x - 3B \sin x + A x \sin x - B x \cos x \end{aligned}$$

CHE, SOSTITUENDO IN (22) DANNO:

$$y_0'''(x) + y_0''(x) + y_0'(x) + y_0(x) = \cos x$$

CIOÈ, DOPO UN PÒ DI CALCOLI:

$$(2B - 2A) \cos x + (-2A - 2B) \sin x = \cos x$$

AFFINCHÈ AL PRIMO MEMBRO CI SIA LA STESSA FUNZIONE CHE AL SECONDO MEMBRO, BISOGNA (E BASTA) CHE:

$$\begin{cases} 2B - 2A = 1 \\ -2B - 2A = 0 \end{cases}$$

$$\text{CIOÈ } A = -\frac{1}{4} \text{ E } B = \frac{1}{4}.$$

QUINDI:

$$y_0(x) = -\frac{1}{4} x \cos x + \frac{1}{4} x \sin x$$

QUINDI LA SOL. GEN DI (22) È:

$$y(x) = -\frac{1}{4} x \cos x + \frac{1}{4} x \sin x + \alpha e^{-x} + \beta \sin x + \gamma \cos x \quad \text{CON } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

ES.3 RISOLVERE

(23)

$$y^{(3)} + y'' + y' + y = 4e^{-x} + 5 \cos x$$

SVOLGIMENTO

L'OMOGENEA ASSOCIATA È ANCORA LA STESSA DI **ES.1** E **ES.2**. INOLTRE SAPPIAMO GIÀ CHE, DETTO $\mathcal{L}$ L'OPERATORE ASSOCIATO AL 1° MEMBRO, SI HA:

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{2}x e^{-x}\right) = e^{-x}$$

E

$$\mathcal{L}\left(-\frac{1}{4}x \cos x + \frac{1}{4}x \sin x\right) = \cos x$$

DI CONSEGUENZA, PER OTTENERE $4 \cdot e^{-x} + 5 \cdot \cos x$ BASTERÀ PRENDERE

$$\mathcal{L}\left(4 \cdot \frac{1}{2}x e^{-x} + 5 \cdot \left(-\frac{1}{4}x \cos x + \frac{1}{4}x \sin x\right)\right) = 4e^{-x} + 5 \cdot \cos x$$

QUINDI, STAVOLTA, LA SOL. PARTICOLARE $y_0(x)$ È DATA DA:

$$y_0(x) = 2x e^{-x} - \frac{5}{4}x \cos x + \frac{5}{4}x \sin x$$

QUINDI LA SOL. GENERALE È:

$$y(x) = 2x e^{-x} - \frac{5}{4}x \cos x + \frac{5}{4}x \sin x + \alpha e^{-x} + \beta \sin x + \gamma \cos x \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$
