18 maggio 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

# TOPOLOGIA IN $\mathbb{R}^n$

**OSS. 0** TUTTE LE PRINCIPALI DEFINIZIONI CHE ABBIAMO DATO IN $\mathbb{R}$ (PROPRIETÀ TOPOLOGICHE DI INSIEMI, LIMITI, CONTINUITÀ, ECC..) DIPENDEVANO ESSENZIALMENTE DAL CONCETTO DI INTORNO, CHE A SUA VOLTA DIPENDEVA DA QUELLO DI DISTANZA. QUELLO CHE FAREMO ORA SARÀ DI DEFINIRE "DISTANZA" E "INTORNO" SU $\mathbb{R}^n$, DOPODICHÉ LA TEORIA SI SVILUPPA FORMALMENTE IN MODO QUASI IDENTICO A QUANTO FATTO IN $\mathbb{R}$, NEL SENSO CHE I TEOREMI E LE DEFINIZIONI SPESSO SEMBRANO IDENTICI, MA NON BISOGNA DIMENTICARE CHE LA PAROLA "INTORNO" HA UN SIGNIFICATO DIVERSO.

---

**DEF. 1** PER OGNI $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ DEFINIAMO

$$\|x\|_1 = |x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}$$

$$\|x\|_\infty = \mathrm{MAX}\{|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|\}$$

**OSS. 1** $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ SONO DELLE "NORME", CIOÈ DELLE APPLICAZIONI DA $\mathbb{R}^n$ IN $\mathbb{R}$ AVENTI LE PROPRIETÀ:

1) $\forall x\in\mathbb{R}^n$ $\|x\|\geq 0$, CON L'UGUAGLIANZA CHE VALE SE E SOLO SE $x=0$.

2) $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$ $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$

3) $\forall x,y\in\mathbb{R}$ $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (DISUG. TRIANGOLARE)

IL FATTO CHE SIA $\|\cdot\|_1$, SIA $\|\cdot\|_2$, SIA $\|\cdot\|_\infty$ SODDISFINO TUTTE LE PROPRIETÀ (1), (2) E (3) È DI DIMOSTRAZIONE MOLTO SEMPLICE E VIENE LASCIATA ALLO STUDENTE. CI LIMITIAMO A RIPORTARE SOLO LA DIMOSTRAZIONE DELLA DISUG. TRIANGOLARE PER $\|\cdot\|_2$.

**DIMO. DI (3) PER $\|\cdot\|_2$**

SE INDICHIAMO CON $\langle\,,\rangle$ IL PRODOTTO SCALARE CANONICO DI $\mathbb{R}^n$, SI HA

$$\|x+y\|_2^2 = \langle x+y,x+y\rangle = \langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle+2\langle x,y\rangle = \|x\|_2^2+\|y\|_2^2+2\langle x,y\rangle \leq$$

PER LA DISUG. DI CAUCHY-SCHWARZ

$$\leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2 \cdot \|y\|_2 = \left(\|x\|_2 + \|y\|_2\right)^2$$

QUINDI $\|x+y\|_2^2 \leq \left(\|x\|_2 + \|y\|_2\right)^2$ DA CUI LA TESI.

---

**DEF. 2** PER OGNI $x, y \in \mathbb{R}^n$ DEFINIAMO

$$d_1(x,y) = \|x-y\|_1$$

$$d_2(x,y) = \|x-y\|_2$$

$$d_\infty(x,y) = \|x-y\|_\infty$$

**OSS. 2** GRAZIE AL FATTO CHE $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ E $\|\cdot\|_\infty$ SONO DELLE NORME, È MOLTO SEMPLICE MOSTRARE CHE $d_1, d_2, d_\infty$ SONO DELLE DISTANZE SU $\mathbb{R}^n$, CIOÈ DELLE APPLICAZIONI DA $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ IN $\mathbb{R}$ CON LE PROPRIETÀ:

1) $\forall x,y \in \mathbb{R}^n \quad d(x,y) \geq 0$ CON L'UGUAGLIANZA CHE VALE SE E SOLO SE $x=y$.

2) $\forall x,y \in \mathbb{R}^n \quad d(x,y) = d(y,x)$

3) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (DISUG. TRIANGOLARE)

(LE DIMOSTRAZIONI SONO SEMPLICISSIME E VENGONO LASCIATE ALLO STUDENTE)

---

**DEF. 3** DATO $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ E $r > 0$ DEFINIAMO:

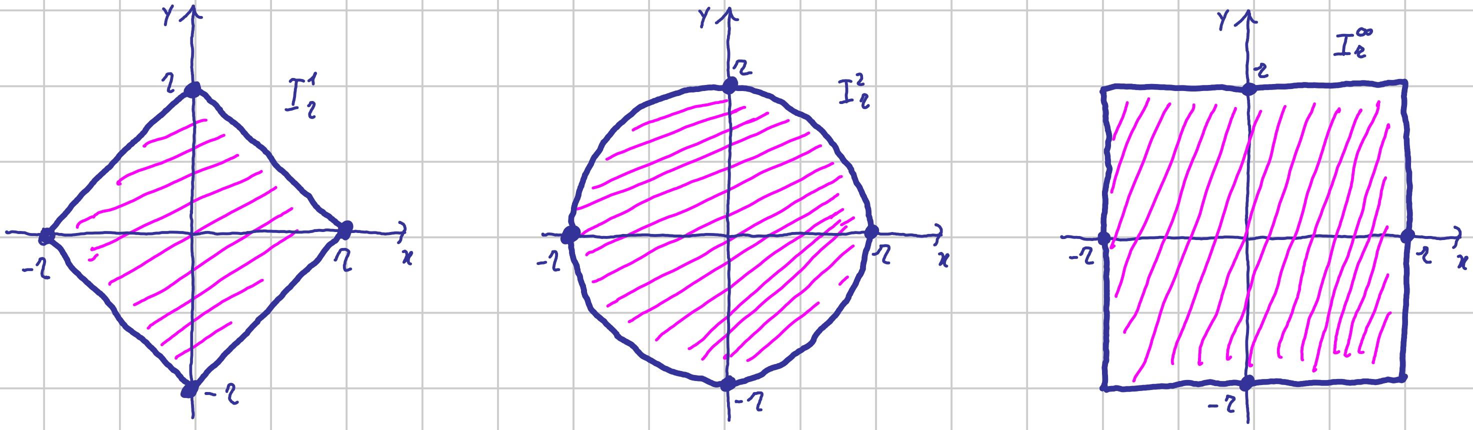
$$I_r^1(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_1(x,\bar{x}) < r\}$$

$$I_r^2(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_2(x,\bar{x}) < r\}$$

$$I_r^\infty(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_\infty(x,\bar{x}) < r\}$$

(INTORNO DI CENTRO $x_0$ E RAGGIO $r$ RISPETTO A $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$)

**ES. 1** SE SIAMO IN $\mathbb{R}^2$ E $\bar{x}=0$, ALLORA $I_r^1$, $I_r^2$ E $I_r^\infty$ SONO I SEGUENTI INSIEMI:



**TEO. 1** $\forall x \in \mathbb{R}^n$ VALGONO LE DISUGUAGLIANZE:

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$$

**DIMO**

SIA $x=(x_1,\dots,x_n)$. PER DIMOSTRARE $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ BASTA DIMOSTRARE $\|x\|_2^2 \leq \|x\|_1^2$, CIOÈ

$$|x_1|^2+|x_2|^2+\dots+|x_n|^2 \leq \left(|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|\right)^2$$

CHE PERÒ È OVVIA.

PER DIMOSTRARE $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$ OSSERVIAMO CHE:

DISUG. CAUCHY-SCHWARZ

$$\|x_1\| = |x_1|+|x_2|+\dots+|x_n| = \langle (1,1,\dots,1),(|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|)\rangle \leq$$

$$\leq \|(1,1,\dots,1)\|_2 \cdot \|(|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|)\|_2 = \sqrt{n}\cdot\|x\|_2$$

**COROLLARIO 1**

$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ E $\forall r>0$ SI HA: $I_r^1(x_0) \subset I_r^2(x_0) \subset I_{r\cdot\sqrt{n}}^1(x_0)$

**DIMO**

$$x \in I_r^1(x_0) \iff \|x-x_0\|_1 < r \overset{\text{TEO. 1}}{\Rightarrow} \|x-x_0\|_2 < r \iff x \in I_r^2(x_0)$$

QUINDI $I_r^1(x_0) \subset I_r^2(x_0)$

$$x \in I_r^2(x_0) \iff \|x-x_0\|_2 < r \overset{\text{TEO. 1}}{\Rightarrow} \|x-x_0\|_1 < \sqrt{n}\cdot r \iff x \in I_{r\cdot\sqrt{n}}^1(x_0)$$

QUINDI $I_r^2(x_0) \subset I_{r\cdot\sqrt{n}}^1(x_0)$.

**OSS. 3** ESSENZIALMENTE IL COROLLARIO 1 DICE CHE, FISSATO $x_0$, COMUNQUE SI PRENDA UN SUO INTORNO RISPETTO A $\|\cdot\|_1$ CE N'È UNO RISPETTO A $\|\cdot\|_2$ IN ESSO CONTENUTO E VICEVERSA.

CIÒ RENDERÀ INDIFFERENTE L'UTILIZZO DI $\|\cdot\|_1$ E $\|\cdot\|_2$ NELLA MAGGIOR PARTE DI CIÒ CHE DIREMO IN SEGUITO. AD ESEMPIO, PRESO $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ E $(x_n)$ SUCCESSIONE IN $\mathbb{R}^n$ SARÀ LA STESSA COSA DIRE CHE $x_n$ ENTRA DEFINITIVAMENTE IN OGNI INTORNO DI TIPO $I_r^1(\bar{x})$ O IN OGNI INTORNO DI TIPO $I_r^2(\bar{x})$.

QUINDI, NON APPENA DEFINIREMO IL LIMITE DI UNA SUCCESSIONE DI PUNTI, SI AVRÀ CHE $x_n \to \bar{x}$ RISPETTO A $\|\cdot\|_1$ SE E SOLO SE $x_n \to \bar{x}$ RISPETTO A $\|\cdot\|_2$.

**OSS. 4** QUELLO CHE ABBIAMO FATTO NEL $\boxed{\text{TEO. 1}}$ PER $\|\cdot\|_1$ E $\|\cdot\|_2$, SI PUÒ FARE ANCHE TRA $\|\cdot\|_2$ E $\|\cdot\|_\infty$ E $\|\cdot\|_1$ E $\|\cdot\|_\infty$ OTTENENDO LE DISUGUAGLIANZE:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\cdot\|x\|_\infty \quad \text{E} \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

VALGONO QUINDI GLI ANALOGHI DEL $\boxed{\text{COR. 1}}$ E DELL' $\boxed{\text{OSS. 3}}$.

IL FATTO CHE LE 3 NORME SIANO EQUIVALENTI RENDE IRRILEVANTE QUALE DELLE 3 SI STA USANDO.
VISTO CHE NOI USEREMO DI PREFERENZA $\|\cdot\|_2$ E $d_2$, NEL SEGUITO SCRIVEREMO $\|\cdot\|$, $d$ E $I$ AL POSTO DI $\|\cdot\|_2$, $d_2$ E $I^2$

---

**DEF. 4** DATI $x_0 \in \mathbb{R}^n$ E $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, DIREMO CHE $x_0$ È

1) INTERNO AD $\Omega$ SE $\exists r>0$ T.C. $I_r(x_0) \subset \Omega$
2) ESTERNO AD $\Omega$ SE $\exists r>0$ T.C. $I_r(x_0) \cap \Omega = \emptyset$
3) DI FRONTIERA PER $\Omega$ SE $\forall r>0$ $I_r(x_0)$ INTERSECA SIA $\Omega$ CHE $\Omega^c$.
4) DI ACCUMULAZIONE PER $\Omega$ SE $\forall r>0$ $I_r(x_0) \cap (\Omega - \{x_0\}) \neq \emptyset$
5) ISOLATO DI $\Omega$ SE $\exists r>0$ T.C. $I_r(x_0) \cap \Omega = \{x_0\}$

INOLTRE DEFINIAMO:

$\partial\Omega$ = FRONTIERA DI $\Omega$ = INSIEME DI TUTTI I PUNTI DI FRONTIERA DI $\Omega$

$\mathring{\Omega}$ = PARTE INTERNA DI $\Omega$ = INSIEME DI TUTTI I PUNTI INTERNI DI $\Omega$

$\overline{\Omega}$ = CHIUSURA DI $\Omega$ = $\Omega \cup \partial\Omega$

$D\Omega$ = DERIVATO DI $\Omega$ = INSIEME DI TUTTI I PUNTI DI ACCUMULAZIONE DI $\Omega$

**ES. 2** SIA $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1,\ y \neq 0,\ y < \sqrt{1-x^2}\right\} \cup \left\{(2,0)\right\}$

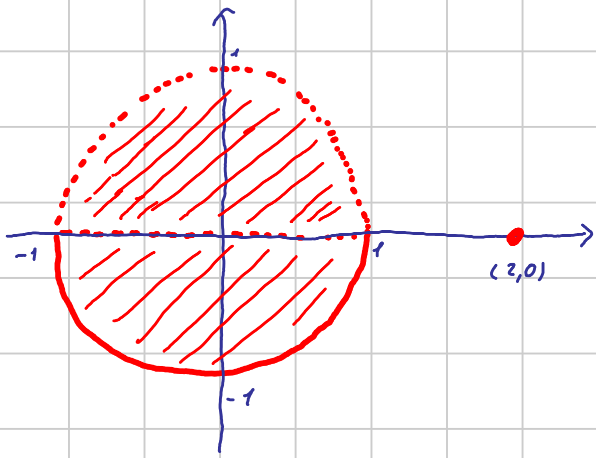
SI HA:

$\partial\Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\} \cup \{(x,y) \mid y=0,\ -1 \le x \le 1\} \cup \{(2,0)\}$

$\mathring{\Omega} = \{(x,y) \mid x^2+y^2<1,\ y \neq 0\}$

$\overline{\Omega} = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\} \cup \{(2,0)\}$

$D\Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$




**DEF. 5** DATO $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ DIREMO CHE $\Omega$ È:

1) APERTO SE $\Omega = \mathring{\Omega}$
2) CHIUSO SE $\Omega^c$ È APERTO COMPLEMENTARE DI...
3) DENSO SE $\overline{\Omega} = \mathbb{R}^n$
4) DISCRETO SE OGNI $x \in \Omega$ È ISOLATO
5) LIMITATO SE $\exists r>0$ T.C. $\Omega \subset I_r(0)$

**DEF. 6** DATA $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ SUCCESSIONE A VALORI IN $\mathbb{R}^n$ E DATO $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$, DIREMO CHE $x_m \to \bar{x}$ SE $\forall \varepsilon>0$, DEFINITIVAMENTE IN $m$, $x_m \in I_\varepsilon(\bar{x})$.

INVECE DIREMO CHE $x_m \to \infty$ SE $\forall r>0$, DEFINITIVAMENTE IN $m$, $x_m \notin I_r(0)$.

**OSS. 5** ORA CHE ABBIAMO INTRODOTTO I CONCETTI DI BASE COME IN $\mathbb{R}$, SIAMO PRONTI A ENUNCIARE E DIMOSTRARE I CORRISPONDENTI TEOREMI CHE AVEVAMO FATTO NEL CASO DI $\mathbb{R}$. NE FAREMO SOLO ALCUNI, LASCIANDO ALLO STUDENTE LA LISTA COMPLETA, VISTO CHE NELLA MAGGIOR PARTE DEI CASI LA DIMOSTRAZIONE È IDENTICA, PUR DI DARE ALLA PAROLA "INTORNO" IL SIGNIFICATO CORRETTO.

**TEO. 2** DATO $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

(1) $\Omega$ È CHIUSO (CIOÈ $\Omega^C$ È APERTO)

(2) $\partial\Omega \subset \Omega$

(3) $D\Omega \subset \Omega$

(4) $\left((x_m)\subset\Omega \text{ E } x_m \to \bar{x}\right) \Rightarrow \bar{x}\in\Omega$

**DIMO**

$\boxed{(1)\Leftrightarrow(2)}$ DALLA DEFINIZIONE DI FRONTIERA È IMMEDIATO CHE $\partial\Omega = \partial(\Omega^c)$, QUINDI:

$\Omega$ È CHIUSO $\Leftrightarrow$ $\Omega^c$ È APERTO $\Leftrightarrow$ $\partial(\Omega^c)\subset\Omega \Leftrightarrow \partial\Omega\subset\Omega$

$\boxed{(2)\Rightarrow(3)}$ SI NOTI CHE UN PUNTO DI ACC. NON PUÒ ESSERE ESTERNO QUINDI O È INTERNO (E QUINDI STA IN $\Omega$) O È DI FRONTIERA (E ALLORA STA IN $\Omega$ PERCHÈ VALE (2)). QUINDI $D\Omega\subset\Omega$

$\boxed{(3)\Rightarrow(2)}$ SE $x\in\partial\Omega$ MA $x\notin D\Omega$ ALLORA $\exists r>0$ T.C. $I_r(x)\cap\Omega=\{x\}$, QUINDI $x\in\Omega$. SE INVECE $x\in\partial\Omega$ E $x\in D\Omega$ ALLORA $x\in\Omega$ GRAZIE A (3). QUINDI $\partial\Omega\subset\Omega$.

$\boxed{(2)\Rightarrow(4)}$ $x_m\to\bar{x} \Rightarrow \forall r>0$ $I_r(\bar{x})\cap\Omega\neq\emptyset \Rightarrow \bar{x}$ NON È ESTERNO $\Rightarrow \bar{x}\in\partial\Omega\cup\Omega \underset{\text{GRAZIE A (2)}}{\subset} \Omega$

QUINDI VALE (4).

$\boxed{(4)\Rightarrow(2)}$ $\bar{x}\in\partial\Omega \Rightarrow \forall m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ $I_{\frac{1}{m}}(\bar{x})\cap\Omega\neq\emptyset$ QUINDI $\forall m$ PRENDO $x_m\in I_{\frac{1}{m}}(\bar{x})\cap\Omega$. TALE $(x_m)$ È UNA SUCC. A VALORI IN $\Omega$ CHE CONVERGE A $\bar{x}$ QUINDI, GRAZIE A (4), SI HA $\bar{x}\in\Omega$.

QUINDI $\bar{x}\in\partial\Omega\Rightarrow\bar{x}\in\Omega$. CIÒ SIGNIFICA CHE VALE (2).