20 maggio 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

TOPOLOGIA IN $\mathbb{R}^n$ (... CONTINUA...)

TEO.1 DATA (x_m) A VALORI IN $\mathbb{R}^n$ E $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

(1) $x_m \to \bar{x}$

(2) $d(x_m, \bar{x}) \to 0$

(3) PER OGNI $k = 1, \dots, n$ $\quad x_m^{(k)} \to \bar{x}^{(k)}$ $\quad$ (DOVE, SE $x \in \mathbb{R}^n$, $x^{(k)}$ SIGNIFICA "k-ESIMA COMPONENTE DI x")

DIMO

L'EQUIVALENZA TRA (1) E (2) È OVVIA.

MOSTRIAMO (2) $\Rightarrow$ (3).

$\forall k = 1, \dots, n$ SI HA:

$$|x_m^{(k)} - \bar{x}^{(k)}| = \sqrt{(x_m^{(k)} - \bar{x}^{(k)})^2} \le \sqrt{(x_m^{(1)} - \bar{x}^{(1)})^2 + \dots + (x_m^{(n)} - \bar{x}^{(n)})^2} = d(x_m, \bar{x})$$

QUINDI SE $d(x_m, \bar{x}) \to 0$ ANCHE $|x_m^{(k)} - \bar{x}^{(k)}| \to 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$

MOSTRIAMO INFINE CHE (3) $\Rightarrow$ (2).

SAPPIAMO CHE

$$d(x_m, \bar{x}) = d_2(x_m, \bar{x}) \le d_1(x_m, \bar{x}) = |x_m^{(1)} - \bar{x}^{(1)}| + \dots + |x_m^{(n)} - \bar{x}^{(n)}|$$

QUINDI SE TUTTI I $|x_m^{(k)} - \bar{x}^{(k)}|$ TENDONO A ZERO PER $m \to +\infty$, ANCHE $d_1(x_m, \bar{x}) \to 0$

E QUINDI ANCHE $d(x_m, \bar{x}) \to 0$.

OSS.1 IL FATTO CHE IL LIMITE DI (x_m) SI POSSA FARE COMPONENTE PER COMPONENTE RENDE BANALI LE DIMOSTRAZIONI DI ALCUNI TEOREMI CHE SAPPIAMO GIÀ VALERE IN $\mathbb{R}$, COME AD ESEMPIO L'UNICITÀ DEL LIMITE E IL LIMITE DELLA SOMMA.

DEF.1 DATA LA SUCCESSIONE (x_m) A VALORI IN $\mathbb{R}^n$, DIREMO CHE È DI CAUCHY SE:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE $\forall m, k \ge m_0$ SI HA $d(x_m, x_k) < \varepsilon$

TEO.2 DATA (x_m) A VALORI IN $\mathbb{R}^n$ È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

(1) (x_m) HA LIMITE $\bar{x} \in \mathbb{R}$

(2) (x_m) È DI CAUCHY.

DIMO

È CONSEGUENZA IMMEDIATA DEL FATTO CHE (x_m) È DI CAUCHY SE E SOLO SE SONO DI CAUCHY LE SUCCESSIONI DELLE SUE COMPONENTI.

DEF.2 DATO $K \subset \mathbb{R}^n$, DIREMO CHE K È COMPATTO PER SUCCESSIONI SE DA OGNI SUCC. (x_m) A VALORI IN K È SEMPRE POSSIBILE ESTRARRE UNA SSUCC. (x_{m_k}) TALE CHE $x_{m_k} \to \bar{x} \in K$.

TEO.3 DATO $K \subset \mathbb{R}^n$, È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

1) K È COMPATTO PER SUCCESSIONI

2) K E CHIUSO E LIMITATO

DIMO

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ PRESA (x_m) A VALORI IN K VOGLIAMO ESTRARRE DA ESSA UNA SSUCC. CONVERGENTE AD UN $\bar{x} \in K$. OSSERVIAMO CHE

$$\left(x_m\right)_{m \in \mathbb{N}} = \left(\left(x_m^{(1)}, x_m^{(2)}, \dots, x_m^{(n)}\right)\right)_{m \in \mathbb{N}}$$

QUINDI SE (x_m) È LIMITATA ANCHE LE n SUCCESSIONI IN $\mathbb{R}$ DATE DA $(x_m^{(k)})$ SONO LIMITATE. POSSIAMO QUINDI ESTRARRE UNA SOTTOSUCCESSIONE DA (x_m) IN MODO CHE $(x_{m_k}^{(1)})$ CONVERGA A UN $\bar{x}^{(1)} \in \mathbb{R}$, POI DA QUESTA ESTRARRE UNA SOTTOSUCCESSIONE IN MODO CHE ANCHE $(x_{m_k}^{(2)})$ CONVERGA A UN $\bar{x}^{(2)} \in \mathbb{R}$, E COSÌ VIA.

DOPO n PASSI LA SOTTOSUCCESSIONE ESTRATTA (x_{m_k}) È TALE CHE TUTTE LE SUE COMPONENTI CONVERGONO, CIOÈ:

$$x_{m_k}^{(1)} \to \bar{x}^{(1)}, \quad x_{m_k}^{(2)} \to \bar{x}^{(2)}, \dots, \quad x_{m_k}^{(n)} \to \bar{x}^{(n)}$$

MA CIÒ SIGNIFICA CHE:

$$x_{m_k} \to \bar{x} = \left(\bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(n)}\right)$$

ORA, ESSENDO K CHIUSO E (x_{m_k}) A VALORI IN K, SEGUE CHE ANCHE $\bar{x} \in K$.
QUINDI VALE (1)

$\boxed{(1)\Rightarrow(2)}$ SE K NON FOSSE LIMITATO ALLORA $\forall m \in \mathbb{N}-\{0\}$ POSSO PRENDERE $x_m \in K - I_m(0)$. QUINDI LA SUCCESSIONE (x_m) STA DEFINITIVAMENTE FUORI DA OGNI PALLA CENTRATA IN 0. CIÒ SIGNIFICA CHE $x_m \to \infty$ E QUINDI ANCHE OGNI SUA SOTTOSUCCESSIONE TENDE A $+\infty$. QUINDI (x_m) È UNA SUCCESSIONE A VALORI IN K DALLA QUALE NON POSSO ESTRARRE ALCUNA SOTTOSUCC. CHE CONVERGA A UN PUNTO DI K. ASSURDO, PERCHÈ K È COMPATTO.

QUINDI K NON PUÒ NON ESSERE LIMITATO.

SE K NON FOSSE CHIUSO CI SAREBBE $\bar{x}$ DI ACCUMULAZIONE PER K, MA CON $\bar{x} \notin K$.

MA ALLORA $\forall m \in \mathbb{N}-\{0\}$ POSSO PRENDERE $x_m \in I_{\frac{1}{m}}(\bar{x}) \cap (K - \{\bar{x}\})$.

OTTENGO UNA SUCCESSIONE (x_m) A VALORI IN K TALE CHE $x_m \to \bar{x} \notin K$.

CIÒ SIGNIFICA CHE OGNI SUA SOTTOSUCCESSIONE TENDE ANCORA A $\bar{x}$, QUINDI DA (x_m) NON POSSO ESTRARRE ALCUNA SOTTOSUCCESSIONE CHE TENDA A UN PUNTO DI K.

ASSURDO PERCHÈ K È COMPATTO.

QUINDI È ASSURDO SUPPORRE CHE K NON SIA CHIUSO.

OSS.2 IN REALTÀ CI SAREBBE UNA TERZA PROPRIETÀ CHE IN $\mathbb{R}^n$ (ANZI IN UN GENERICO SPAZIO METRICO) È EQUIVALENTE A (1). È LA SEGUENTE:

(3) SE $\mathcal{F}$ È UNA QUALSIASI FAMIGLIA DI APERTI CHE RICOPRE K, CIOÈ TALE CHE $K \subset \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$, ALLORA ESISTE SEMPRE UNA SOTTOFAMIGLIA FINITA DI $\mathcal{F}$ CHE RICOPRE ANCORA K.

LO STUDENTE LA INCONTRERÀ NEL CORSO DI ANALISI 3 QUANDO STUDIERÀ GLI SPAZI METRICI IN GENERALE.

OSS.3 QUANDO SI PASSA DA $\mathbb{R}$ A $\mathbb{R}^n$, LA NOZIONE DI INTERVALLO PUÒ ESSERE GENERALIZZATA IN PIÙ MODI. IL PIÙ SEMPLICE È QUELLO DI DEFINIRE L'INTERVALLO n-DIMENSIONALE COME IL PRODOTTO CARTESIANO DI n INTERVALLI DI $\mathbb{R}$. AD ESEMPIO IN $\mathbb{R}^2$ GLI INTERVALLI SONO I RETTANGOLI MENTRE IN $\mathbb{R}^3$ SONO I PARALLELEPIPEDI RETTANGOLI.

CI SONO COMUNQUE ALTRI MODI, PIÙ UTILI, DI GENERALIZZARE IN $\mathbb{R}^n$ IL CONCETTO DI INTERVALLO: SONO QUELLI DI INSIEME CONVESSO E INSIEME CONNESSO, CHE ANDIAMO A DESCRIVERE.

DEF. 3 DATI $x, y \in \mathbb{R}^n$ DEFINIAMO SEGMENTO DI ESTREMI x E y E INDICHIAMO CON $[x,y]$ L'INSIEME $\{ \lambda x + (1-\lambda) y \mid \lambda \in [0,1] \}$.

DEF. 4 DATO $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, DIREMO CHE Ω È "CONVESSO" SE $\forall x, y \in \Omega$ SI HA $[x,y] \subset \Omega$.

DEF. 5 DATO $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, DIREMO CHE Ω È "NON CONNESSO" SE ESISTONO $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$, DISGIUNTI ENTRAMBI APERTI, TALI CHE $A_1 \cup A_2 \supset \Omega$ CON $A_1 \cap \Omega$ E $A_2 \cap \Omega$ ENTRAMBI NON VUOTI.
SE Ω NON È "NON CONNESSO", DIREMO CHE È CONNESSO.

DEF. 6 DATO $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, DIREMO CHE Ω È CONNESSO PER SPEZZATE SE, $\forall x, y \in \Omega$ $\exists^{no}$ $x_1, x_2, \dots, x_m \in \Omega$ TALI CHE I SEGMENTI $[x, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{m-1}, x_m], [x_m, y]$ SONO TUTTI CONTENUTI IN Ω.

TEO. 4 SIA $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ APERTO. ALLORA È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

(1) Ω È CONNESSO.

(2) Ω È CONNESSO PER SPEZZATE.

DIMO

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ BASTERÀ MOSTRARE CHE, PRESO $\bar{x} \in \Omega$, L'INSIEME $A = \{ x \in \Omega \mid \exists \text{ SPEZZATA TRA } x \text{ E } \bar{x} \}$ È TUTTO Ω. SE PER ASSURDO COSÌ NON FOSSE ALLORA SAREBBE NON VUOTO L'INSIEME $B = \{ x \in \Omega \mid \text{NON ESISTE ALCUNA SPEZZATA TRA } x \text{ E } \bar{x} \}$.

OVVIAMENTE $A \cup B = \Omega$. SE RIUSCIAMO A DIMOSTRARE CHA A E B SONO ENTRAMBI APERTI ABBIAMO OTTENUTO L'ASSURDO, VISTO CHE Ω È CONNESSO.

A È APERTO PERCHÈ SE $x \in A$, ESSENDO Ω APERTO POSSO PRENDERE $I_2(x)$ TUTTO CONTENUTO IN Ω, DOPODICHÈ OGNI $y \in I_2(x)$ È CONNESSO DA UN SEGMENTO A x E QUINDI DA UNA SPEZZATA A $\bar{x}$. QUINDI SE $x \in A$ È ANCHE x INTERNO AD A. QUINDI A È APERTO.

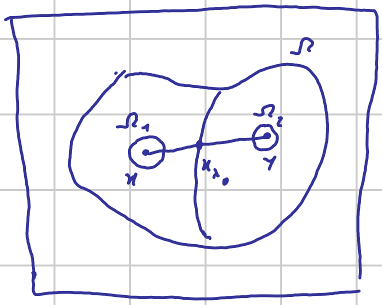
B È APERTO PERCHÈ SE $x \in B$, BASTA PRENDERE $I_2(x) \subset \Omega$ E NESSUNO DEGLI $y \in I_2(x)$ PUÒ ESSERE CONNESSO A $\bar{x}$ CON UNA SPEZZATA, ALTRIMENTI LO SAREBBE ANCHE x. QUINDI SE $x \in B$, ESISTE $I_2(x)$ TUTTO CONTENUTO IN B. QUINDI B È APERTO.

QUINDI ABBIAMO OTTENUTO UNA CONTRADDIZIONE, VISTO CHE Ω È CONNESSO.

QUINDI SI ARRIVA AD ASSURDO SUPPONENDO CHE Ω NON SIA CONNESSO PER SPEZZATE, QUINDI DEVE VALERE (2).

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ PER ASSURDO SUPPONIAMO CHE ESISTANO Ω_1 E Ω_2 APERTI E NON VUOTI TALI CHE $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$. PRESO $\bar{x} \in \Omega_1$ E $\tilde{x} \in \Omega_2$, SICCOME VALE (2), $\exists$ SPEZZATA CONTENUTA

IN Ω CHE CONGIUNGE $\bar{x}$ E $\tilde{x}$, QUINDI ESISTONO $x, y \in \Omega$ TALI CHE $[x,y] \subset \Omega$ E $x \in \Omega_1$ E $y \in \Omega_2$. PER OGNI $\lambda \in [0,1]$ SIA $x_\lambda = (1-\lambda)x + \lambda y$. SI NOTI CHE $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ SI HA:



$$d(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}) = \| (1-\lambda_1)x + \lambda_1 y - ((1-\lambda_2)x + \lambda_2 y) \| =$$

$$= \| (\lambda_2 - \lambda_1)x - (\lambda_2 - \lambda_1) y \| = |\lambda_1 - \lambda_2| \, \|x - y\|$$

IN PARTICOLARE:

$$d(x_\lambda, y) = (1-\lambda)\|x-y\|$$

E

$$d(x_\lambda, x) = \lambda \|x-y\|$$

SIA ORA $\lambda_0 = \inf \{ \lambda \mid x_\lambda \in \Omega_2 \}$

VISTO CHE $y \in \Omega_2$ E CHE Ω_2 È APERTO C'È TUTTO UN INTORNO $I_r(y) \subset \Omega_2$

QUINDI $d(x_{\lambda_0}, y) > r$, CIOÈ $(1-\lambda_0)\|x-y\| > r$, QUINDI $\lambda_0 < 1$.

ANALOGAMENTE DA $x \in \Omega_1$ SEGUE $\lambda_0 > 0$.

QUINDI $0 < \lambda_0 < 1$.

PER COME È DEFINITO λ_0, $\forall \lambda \in [0, \lambda_0)$ SI HA $x_\lambda \in \Omega_1$ MENTRE $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon]$ TALE CHE $x_\lambda \in \Omega_2$. CIÒ SIGNIFICA CHE OGNI INTORNO DI x_{λ_0} INTERSECA SIA Ω_1 CHE Ω_2.

MA SICCOME Ω_1 E Ω_2 SONO DISGIUNTI, QUESTO SIGNIFICA CHE x_{λ_0} STA SIA IN $\partial \Omega_1$ CHE IN $\partial \Omega_2$.

DI CONSEGUENZA $x \notin \Omega_1$ E $x \notin \Omega_2$, PERCHÈ SONO APERTI. ASSURDO PERCHÈ $x_{\lambda_0} \in \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

SIAMO QUINDI ARRIVATI AD ASSURDO SUPPONENDO Ω NON CONNESSO.

QUESTO DIMOSTRA (1).

OSS. 4 SI NOTI CHE I CONVESSI SONO PARTICOLARI INSIEMI CONNESSI PER SPEZZATE