

FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI (...CONTINUA...)

Es.1 SIA $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq -y\}$, DIRE SE È VERO CHE $x^{100} \cdot y^{100} = o(x^3 + y^3)$ SU Ω PER $(x,y) \rightarrow (0,0)$.

SVOLGIMENTO

LA RISPOSTA È NO, PERCHÉ SI RIESCE A FAR VEDERE CHE NON È ZERO IL LIMITE:

$$(1) \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \Omega}} \frac{x^{100} \cdot y^{100}}{x^3 + y^3}$$

A TALESCOPO BASTA RESTRINGERSI AD UNA CURVA CHE SI SCHIACCI CON ORDINE SUFFICIENTEMENTE ALTO ALLA RETTA $y = -x$, IN CUI IL DENOMINATORE SI ANNULLA.

AD ESEMPIO SE MI RESTRINGO ALL'INSIEME:

$$A = \{(x,y) \in \Omega \mid y = -x + x^{200}, x > 0\}$$

SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in A}} \frac{x^{100} \cdot y^{100}}{x^3 + y^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{100} \cdot (-x + x^{200})^{100}}{x^3 + (-x + x^{200})^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{100} \cdot (x^{200} - x + x^{200})^{100}}{x^3 - x^3 + 3x^2 \cdot x^{100} + o(x^{201})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{200}}{3x^{102}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{3x^2} = +\infty$$

QUINDI IL LIMITE (1) NON PUÒ VALERE 0 ALTREMENTI FAREBBE 0 ANCHE RISTRETTO AD A.

Es.2 SIA $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. DIRE PER QUALI $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$ SI HA:

$$(2) \quad |x|^\alpha |y|^\beta = o(x^2 + y^6) \quad \text{PER } (x,y) \rightarrow (0,0) \text{ SU } \Omega$$

SVOLGIMENTO

CI STIAMO CHIEDENDO PER QUALI $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$ SI HA:

$$(3) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^\alpha \cdot |y|^\beta}{x^2 + y^6} = 0$$

STAVOLTA IL DENOMINATORE NON È UN POLINOMIO OMOGENEO, QUINDI NON FUNZIONA IL PROCEDIMENTO DELL'ES.3 DELLA LEZ.32.

TUTTAVIA SE DEFINIAMO $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ NEL MODO SEGUENTE:

$$(4) \quad \varphi: (u, v) \mapsto (u^3, v^3)$$

È SEMPLICE MOSTRARE CHE φ È INVERTIBILE E SIA φ CHE φ^{-1} SONO CONTINUE.

(LO FAREMO IN DETTAGLIO ALLA FINE, E NE PRENDEREMO SPUNTO PER INTRODURRE IL CONCETTO DI OMEOMORFISMO)

SI NOTI CHE, SE $f(x, y)$ È LA FUNZIONE DI CUI SI FA IL LIMITE IN (3), ALLORA:

$$(f \circ \varphi)(u, v) = f(u^3, v^3) = \frac{|u|^{3\alpha} \cdot |v|^\beta}{u^6 + v^6}$$

PER UN TEOREMA (CHE FAREMO ALLA FINE) SUGLI OMEOMORFISMI ABBIAMO CHE:

$$(5) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = l \iff \lim_{(u, v) \rightarrow (0, 0)} (f \circ \varphi)(u, v) = l$$

QUINDI NEL NOSTRO CASO BASTA CHIEDERSI PER QUALI $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$ SI HA:

$$\lim_{(u, v) \rightarrow (0, 0)} \frac{|u|^{3\alpha} \cdot |v|^\beta}{u^6 + v^6} = 0$$

STAVOLTA IL DENOMINATORE È OMOGENEO DI GRADO 6 E NON SI ANNULLA

MAI FUORI DA $(0, 0)$, QUINDI, PROCEDENDO COME NELL'ES. 3 DELLA LEZ. 32, SI HA

CHE VALE 0 SE E SOLO SE $3\alpha + \beta > 6$.

PER CHIUDERE L'ARGOMENTAZIONE CI MANCANO DUNQUE 3 COSE, CHE AVEVAMO LASCIATO IN SOSPESO:

1) DARE LA DEFINIZIONE DI OMEOMORFISMO.

2) MOSTRARE CHE VALE (5).

3) MOSTRARE CHE φ DEFINITO IN (4) È UN OMEOMORFISMO.

LO FACCIAMO QUI DI SEGUITO:

DEF. 1 DATI $\Omega, \Gamma \subset \mathbb{R}^n$, ENTRAMBI APERTI, E $\varphi: \Omega \rightarrow \Gamma$, DIREMO CHE φ È UN OMEOMORFISMO SE:

1) φ È BIUNIVOCA

2) SIA φ CHE φ^{-1} SONO CONTINUE

PER I NOSTRI SCOPI È SUFFICIENTE TRATTARE IL CASO IN CUI Ω E Γ SONO APERTI MA, OVVIAMENTE NULLA VIETA DI DEFINIRE OMEOMORFISMI TRA INSIEMI NON APERTI

TEO.1

DATI $\Omega', \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ENTRAMBI APERTI, $\varphi: \Omega' \rightarrow \Omega$ OMEOMORFISMO $v_0 \in \Omega'$ E $x_0 \in \Omega$ TALI CHE $\varphi(v_0) = x_0$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ED $l \in \mathbb{R}^m$. ALLORA È EQUIVALENTE DIRE CHE:

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

$$(2) \lim_{v \rightarrow v_0} f(\varphi(v)) = l$$

DIMO

$(1) \Rightarrow (2)$ BASTA OSSERVARE CHE $v \neq v_0 \Rightarrow \varphi(v) \neq \varphi(v_0)$ E QUINDI VALE LA CONDIZIONE (1)

DEL TEO. DEL LIMITE DELLA FUNZ. COMPOSTA, APPLICANDO IL QUALE SI HA LA TESI.

$(2) \Rightarrow (1)$ DOPO AVER OSSERVATO CHE $f = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ SI PROCEDE COME AL PUNTO PRECEDENTE USANDO φ^{-1} AL POSTO DI φ ED $f \circ \varphi$ AL POSTO DI f .

OSS.1

IL TEO.1 DIMOSTRA L'AFFERMAZIONE (5). PER MOSTRARE CHE LA φ DEFINITA DA (4) È EFFETTIVAMENTE UN OMEOMORFISMO INVECE SERVE IL SEGUENTE TEOREMA:

TEO.2

DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, x_0 DI ACC. PER Ω , $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ E $l = (l_1, \dots, l_m) \in \mathbb{R}^m$, $\forall i = 1, \dots, m$ INDICHIAMO CON f_i LA i -ESIMA COMPONENTE DI f , CIOÈ $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. ALLORA È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

$$(a) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

$$(b) \forall i = 1, \dots, m \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = l_i$$

IN PARTICOLARE, SE $x_0 \in \Omega$, $(f \text{ È CONTINUA IN } x_0) \Leftrightarrow (\text{TUTTE LE } f_i \text{ SONO CONTINUE IN } x_0)$.

DIMO

BASTA INVOCARE IL TEO. PONTE E IL TEO. ANALOGO PER LE SUCCESSIONI.

INFATTI SI HA

$$(a) \Leftrightarrow \forall (x_k) \text{ A VALORI IN } \Omega - \{x_0\} \text{ T.C. } x_k \rightarrow x_0 \text{ SI HA}$$

$$f(x_k) \rightarrow l$$

PERCHÈ PER LE SUCCESSIONI
SAPPIAMO GIÀ CHE:

$$(y_k \rightarrow l) \Leftrightarrow (\forall i = 1, \dots, m \quad y_k^{(i)} \rightarrow l_i)$$



$$(b) \Leftrightarrow \forall (x_k) \text{ A VALORI IN } \Omega - \{x_0\} \text{ T.C. } x_k \rightarrow x_0 \text{ SI HA CHE}$$

$$\forall i = 1, \dots, m \quad f_i(x_k) \rightarrow l_i$$

PER IL
TEOREMA
PONTE

OSS.2

IL TEO.2 CI PERMETTE SUBITO DI MOSTRARE CHE φ È UN OMEOMORFISMO.

INFATTI $\varphi(u, v) = (u, v)$ È CONTINUA PERCHÈ $u \mapsto u^3$ E $v \mapsto v$ SONO CONTINUE.

VICEVERSA $\varphi^{-1}(x, y) = (\sqrt[3]{x}, y)$ È CONTINUA PERCHÈ SONO CONTINUE $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ E $y \mapsto y$.

ES.3 PER QUALI $\alpha > 0$ SI HA $x^\alpha y^3 = o((x^{30} + y^{18}) \cdot (x^{10} + y^{10}))$ PER $(x, y) \rightarrow (0, 0)$?

SVOLGIMENTO

DOBBIAMO CERCARE PER QUALI $\alpha > 0$ SI HA:

(6)
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^\alpha y^3}{(x^{30} + y^{18})(x^{10} + y^{10})} = 0$$

MOSTRIAMO ORA CHE VALE (6) SE E SOLO SE $\alpha > 35$.

SE $\alpha \leq 35$ PRENDIAMO LA RESTRIZIONE $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = x^{\frac{5}{3}}\}$. SI HA

(7)
$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in A}} \frac{x^\alpha y^3}{(x^{30} + y^{18})(x^{10} + y^{10})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha x^5}{(x^{30} + x^{30})(x^{10} + x^{\frac{50}{3}})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha \cdot x^5}{2x^{30} \cdot (x^{10} + o(x^{10}))} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-35} \neq 0$$

SE $\alpha \leq 35$

QUINDI, SE $\alpha \leq 35$, (6) NON VALE, ALTRIMENTI ANCHE (7) DOVREBBE VALERE 0.

INVECE, SE $\alpha > 35$, SI HA:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^\alpha y^3}{(x^{30} + y^{18})(x^{10} + y^{10})} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^5)^5 \cdot y^3}{(x^5)^6 + (y^6)^6} \cdot \frac{x^{10}}{x^{10} + y^{10}} \cdot x^{\alpha-35} = 0$$

POSTO $u = x^5$ E $v = y^3$ DIVENTA

$\frac{u^5 \cdot v^1}{u^6 + v^6}$ CHE È LIMITATA PERCHÉ CONTINUA

SU TUTTO $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ È POSITIVAMENTE OMogenea DI GRADO ZERO

LIMITATA

LIMITATA

PERCHÉ $\alpha > 35$

OSS.3 LO SVOLGIMENTO DELL'ES.3 NON HA BISOGNO DI ULTERIORI GIUSTIFICAZIONI PER ESSERE

CONSIDERATO COMPLETO. TUTTAVIA DAL PUNTO DI VISTA DIDATTICO È UTILE CAPIRE PERCHÉ SI È DECISO DI PRENDERE PROPRIO 35 COME VALORE CRITICO PER α , PRIMA ANCORA DI AVER FATTO LA FATTO LA DIMOSTRAZIONE.

A TALE SCOPO IMMAGINIAMO IL CASO PIÙ SEMPLICE IN CUI AL NUMERATORE NON C'È y^3 MA SOLO x^α .

IN TAL CASO È CHIARO CHE IL VALORE CRITICO È $\alpha = 40$.

INFATTI

(8)
$$\frac{x^{30}}{x^{30} + y^{18}} \cdot \frac{x^{10}}{x^{10} + y^{10}}$$

È LIMITATA.

RISCRIVENDO (8) IN MODO DA EVIDENZIARE IL CAMBIO DI VARIABILE CHE RENDE OMogeneo IL DENOMINATORE DEL PRIMO FATTORE SI HA.

(9)

$$\frac{\left(x^{\frac{5}{3}}\right)^{18}}{\left(x^{\frac{5}{3}}\right)^{18} + y^{18}} \cdot \frac{x^{10}}{x^{10} + y^{10}}$$

OSSERVIAMO ORA CHE, SE C'E AL NUMERATORE ANCHE UN FATTORE y^p , IL SECONDO FATTORE, PER ESSERE LIMITATO DEVE DIVENTARE DELLA FORMA:

(10)

$$\frac{x^{10-p} y^p}{x^{10} + y^{10}}$$

INVECE, RAGIONANDO ALLO STESSO MODO SUL PRIMO FATTORE SI OTTIENE:

(11)

$$\frac{\left(x^{\frac{5}{3}}\right)^{18-p} y^p}{\left(x^{\frac{5}{3}}\right)^{18} + y^{18}}$$

QUINDI NEL CASO (10) LA POTENZA DI x CHE HO "RISPARMIATO" HA ESPONENTE β , MENTRE NEL CASO (11) HA ESPONENTE $\frac{5}{3}\beta$, CHE E' PIU' GRANDE.

SICCOME COMPLESSIVAMENTE HO UN FATTORE y^3 DA PIAZZARE TRA I 2 FATTORI, MI CONVIENE PIAZZARLO TUTTO SUL PRIMO FATTORE, IN MODO DA RISPARMIARE $x^{\frac{5}{3} \cdot 3}$, CIOE' x^5 . PER QUESTO MOTIVO, VISTO CHE SENZA y MI SERVIVA x^{60} , USANDO y^3 MI BASTA x^{75} .

ES. 4 CALCOLARE, SE ESISTE, IL LIMITE:

(12)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^6 + 2y^6}{3x^8 + y^{12} - x^5 y^5}$$

SVOLGIMENTO

PRIMA OSSERVIAMO CHE:

$$x^5 y^5 = o(3x^8 + y^{12})$$

PERCHE':

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5 y^5}{3x^8 + y^{12}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2)^{\frac{5}{2}} \cdot (y^3)^{\frac{5}{3}}}{3(x^2)^6 + (y^3)^4} = 0$$

PERCHE' $\frac{5}{2} + \frac{5}{3} > 4$

QUINDI IL (12) DIVENTA

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^6 + 2y^6}{3x^8 + y^{12} + o(3x^8 + y^{12})} \stackrel{\text{PROPRIETA' DEGLI O-PICCOLI VALIDA ANCHE IN PIU' VARIABILI}}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^6 + 2y^6}{3x^8 + y^{12}} =$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{\frac{x^6}{x^6+2y^6} \cdot x^2 + \frac{y^6}{x^6+2y^6} \cdot y^6} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

LIMITATE
E POSITIVE
INFINITESIME
E POSITIVE

ES. 5

CALCOLARE SE ESISTE:

(13)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{\sin(xy)}{2 + x^2 y^2}$$

SVOLGIMENTO

RESTRINGENDOSI AD UNA QUALSIASI SEMIRETTA CHE PARTE DALL'ORIGINE TALE LIMITE FA ZERO.

CIO È OVVIO PER QUELLE SULL'ASSE X E L'ASSE Y, MA È SEMPLICE ANCHE PER LE ALTRE.

AD ESEMPIO, FISSATO $m \in \mathbb{R}$, SIA $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx, x > 0\}$. SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow \infty \\ (x,y) \in A}} \frac{\sin(xy)}{2 + x^2 y^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(mx^2)}{2 + m^2 x^4} = 0$$

TUTTAVIA IL LIMITE (13) NON ESISTE PERCHÉ, DETTO $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x, xy = 1\}$,

SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow \infty \\ (x,y) \in B}} \frac{\sin(xy)}{1 + x^2 y^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 1}{1 + 1} = \frac{\sin 1}{2} \neq 0$$