Analisi Matematica (II modulo)- Lez. 34

Titolo nota 15/08/2014

29 maggio 2020 (9.00-11.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI (...CONTINUA...)

OSS. 1 FINORA ABBIAMO INTRODOTTO LE PRINCIPALI NOZIONI DELLA TEORIA SUI LIMITI E SULLE FUNZIONI CONTINUE IN PIÙ VARIABILI, SOLO QUANDO CI SERVIVANO DAVVERO PER RISPONDERE A QUALCHE QUESITO. COSÌ FACENDO ABBIAMO INTRODOTTO MOLTE DELLE IDEE PRINCIPALI, MA NON TUTTE. NELLA PRIMA PARTE DI QUESTA LEZIONE COLMIAMO I BUCHI RIMASTI.

TEO 0.1 (TEO. DEGLI ZERI)

SIA $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, CON Ω APERTO E CONNESSO, ED $f:\Omega \to \mathbb{R}$ CONTINUA. SUPPONIAMO INOLTRE CHE ESISTANO $x_1, x_2 \in \Omega$ TALI CHE $f(x_1)<0$ E $f(x_2)>0$. ALLORA $\exists\, \bar{x} \in \Omega$ T.C. $f(\bar{x})=0$.

DIMO SIANO:

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid f(x)<0\}$$

E

$$\Omega_2 = \{x \in \Omega \mid f(x)>0\}$$

PER IPOTESI, $x_1 \in \Omega_1$ E $x_2 \in \Omega_2$, QUINDI Ω_1 E Ω_2 SONO ENTRAMBI NON VUOTI.

INOLTRE SE $x \in \Omega_1$, PER IL TEO. DELLA PERMANENZA DEL SEGNO C'È $r>0$ T.C. $(I_r(x)\cap\Omega)\subset\Omega_1$.

MA POICHÉ Ω È APERTO, C'È $r'>0$ T.C. $I_{r'}(x)\subset\Omega$. QUINDI PRESO $\delta=\min\{r,r'\}$. SI HA:

$$I_\delta(x)\subset(I_r(x)\cap\Omega)\subset\Omega_1$$

ABBIAMO QUINDI DIMOSTRATO CHE $\forall x\in\Omega_1$ $\exists\,\delta>0$ T.C. $I_\delta(x)\subset\Omega_1$. CIÒ DIMOSTRA CHE Ω_1 È APERTO.

IN MODO ANALOGO SI DIMOSTRA CHE È APERTO ANCHE Ω_2.

INFINE, Ω_1 E Ω_2 SONO DISGIUNTI VISTO CHE NON PUÒ ESSERE $f(x)>0$ E $f(x)<0$ PER LO STESSO $x\in\Omega$.

INSOMMA Ω_1 E Ω_2 SONO APERTI, DISGIUNTI E NON VUOTI.

ORA, SE PER ASSURDO NON CI FOSSE ALCUN $x\in\Omega$ TALE CHE $f(x)=0$, ALLORA SI AVREBBE:

$$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$$

QUINDI, ESSENDO Ω_1 E Ω_2 APERTI DISGIUNTI E NON VUOTI, QUESTO SIGNIFICHEREBBE CHE Ω È NON CONNESSO (ASSURDO).

QUINDI È ASSURDO SUPPORRE CHE f NON ASSUMA VALORE 0 SU Ω.

DEF.1 DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ED $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$, DIREMO CHE f È UNIFORMEMENTE CONTINUA SE $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ TALE CHE $\forall x_1, x_2 \in \Omega \quad d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$

DEF.2 DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $L > 0$ ED $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$, DIREMO CHE f È LIPSCHITZIANA CON COSTANTE DI LIPSCHITZ L SE $\forall x_1, x_2 \in \Omega \quad d(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot d(x_1, x_2)$

OSS.2 COME PER LE FUNZIONI IN UNA VARIABILE, È IMMEDIATO DIMOSTRARE CHE:

$$\left(f \text{ LIPSCHITZIANA}\right) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \left(f \text{ UNIFORM. CONTINUA}\right) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \left(f \text{ CONTINUA}\right)$$

INOLTRE VALE ANCORA IL TEOREMA:

TEO.2 (HEINE - CANTOR)

DATI $K \subset \mathbb{R}^n$ COMPATTO ED $f: K \to \mathbb{R}^m$ CONTINUA, ALLORA f È UNIF. CONTINUA.

DIMO

SE, PER ASSURDO f NON FOSSE UNIF. CONTINUA ALLORA:

$\exists \varepsilon_0 > 0$ TALE CHE $\forall i \in \mathbb{N} - \{0\}$ $\exists^{no}$ $x_i, y_i \in K$ TALI CHE $d(x_i, y_i) < \frac{1}{k}$ MA $d(f(x_i), f(y_i)) \geq \varepsilon_0$

LE SUCCESSIONI (x_i) E (y_i) COSÌ COSTRUITE SONO A VALORI IN K, MENTRE LE SUCCESSIONI IMMAGINE $(f(x_i))$ E $(f(y_i))$ SONO IN $f(K)$.

SICCOME K È COMPATTO POSSO ESTRARRE DA (x_i) UNA SOTTOSUCCESSIONE (x_{i_k}) CHE CONVERGE A $\bar{x} \in K$. MA ALLORA ANCHE LA SOTTOSUCCESSIONE (y_{i_k}) CON GLI STESSI INDICI CONVERGE $\bar{x}$ PERCHÈ:

$$0 \leq d(y_{i_k}, \bar{x}) \leq d(y_{i_k}, x_{i_k}) + d(x_{i_k}, \bar{x}) = \frac{1}{i_k} + d(x_{i_k}, \bar{x}) \to 0 + 0 = 0$$

MA ALLORA, ESSENDO f CONTINUA, SI HA $f(x_{i_k}) \to f(\bar{x})$ E $f(y_{i_k}) \to f(\bar{x})$.

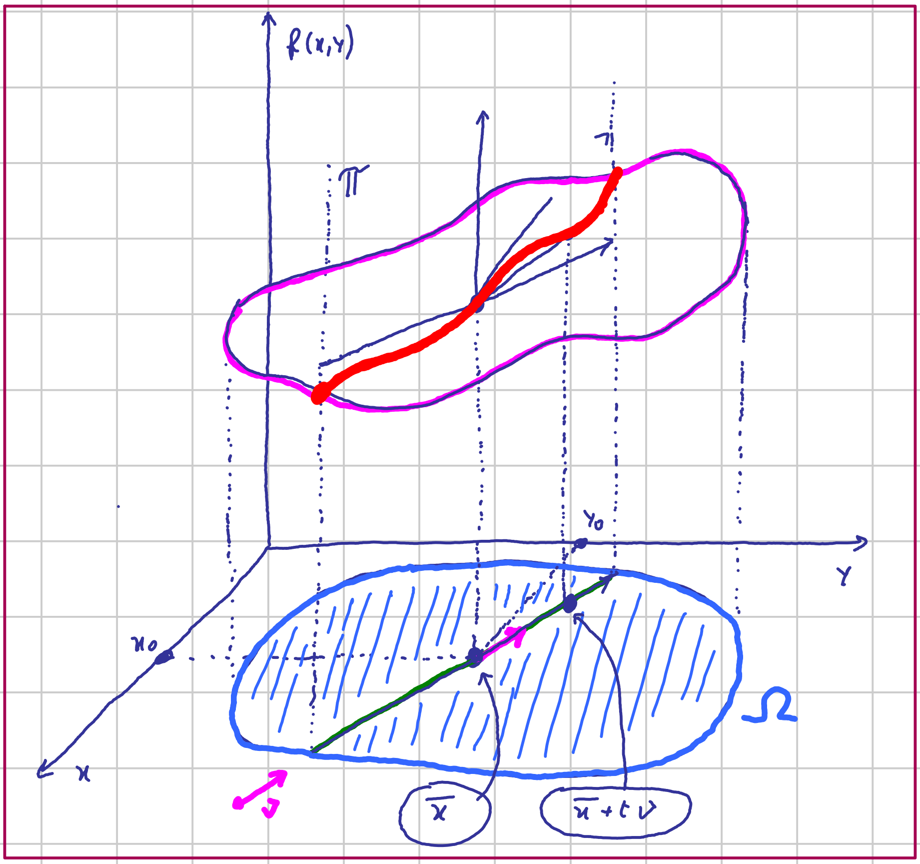
MA ALLORA $d(f(x_{i_k}), f(y_{i_k})) \to 0$, IN CONTRASTO COL FATTO CHE $d(f(x_i), f(y_{i_k})) \geq \varepsilon_0$.

QUINDI ABBIAMO OTTENUTO UN ASSURDO SUPPONENDO CHE f NON SIA UNIF. CONTINUA.

QUESTO CONCLUDE LA DIMOSTRAZIONE.

DERIVABILITÀ E DIFFERENZIABILITÀ

DEF. 3 DATO $v \in \mathbb{R}^n$ DIREMO CHE v È UNA DIREZIONE (O UN VERSORE) SE $\|v\| = 1$



DEF. 4 DATO $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ APERTO, $\bar{x} \in \Omega$, v VERSORE DI $\mathbb{R}^n$ ED $f: \Omega \to \mathbb{R}$, DIREMO CHE f È DERIVABILE IN $\bar{x}$ NELLA DIREZIONE v SE ESISTE FINITO IL LIMITE:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x}+tv) - f(\bar{x})}{t} \tag{1}$$

IL VALORE DI TALE LIMITE PRENDE IL NOME DI DERIVATA DIREZIONALE DI f IN $\bar{x}$ NELLA DIREZIONE v E SI INDICA CON IL SIMBOLO $f_v(\bar{x})$ (OPPURE $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x})$ O $\partial_v f(\bar{x})$)

OSS. 3 L'IDEA È LA SEGUENTE (VEDI FIGURA): RESTRINGENDOSI ALLA RETTA PASSANTE PER $\bar{x}$ E DIREZIONE v (RETTA SEGNATA IN VERDE) SI OTTIENE UNA FUNZIONE NELLA SOLA VARIABILE t (GRAFICO SEGNATO CON LA LINEA ROSSA) LA CUI PENDENZA IN $\bar{x}$ È PROPRIO IL LIMITE DEL RAPPORTO INCREMENTALE (1).

DEF. 5 SE NELLA DEF. 4 v È UN VETTORE DELLA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^n$, CIOÈ $v = e_i = (0,..,0,\underset{\text{i-esima posiz.}}{1},0,..,0)$, ALLORA $\frac{\partial f}{\partial e_i}(\bar{x})$ PRENDE IL NOME DI DERIVATA PARZIALE DI f RISPETTO ALLA VARIABILE x_i NEL PUNTO $\bar{x}$ E SI USANO, PER INDICARLA I SIMBOLI $f_{x_i}(\bar{x})$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ O $\partial_{x_i} f(\bar{x})$.

SE POI f È DERIVABILE RISPETTO A x_i IN TUTTI I PUNTI DI Ω, ALLORA LA FUNZIONE

$$f_{x_i}: \Omega \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f_{x_i}(x)$$

PRENDE IL NOME DI FUNZIONE DERIVATA PARZIALE DI f RISPETTO A x_i

ES. 1 DATA $f(x,y) = x \cdot y^2$ CALCOLARE $f_x(2,3)$ E $f_y(2,3)$.

SVOLGIMENTO

$$f_x(2,3) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\overbrace{2+t,3}^{=(2,3)+t\cdot(1,0)}) - f(2,3)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(2+t)\cdot 3^2 - 2\cdot 3^2}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot 3^2}{t} = 3^2 = 9$$

$$f_y(2,3) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\overbrace{2,3+t}^{=(2,3)+t\cdot(0,1)}) - f(2,3)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2\cdot(3+t)^2 - 2\cdot 3^2}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2\cdot 6t + 2t^2}{t} = 12$$

USARE LA DEFINIZIONE PERÒ È SCOMODO. OSSERVIAMO PERÒ CHE:

$$\frac{f(2+t,3) - f(2,3)}{t} = \boxed{\text{RAPPORTO INCREMENTALE DELLA FUNZIONE } f(x,3), \text{ CHE HA UNA SOLA VARIABILE (LA } x\text{), CALCOLATO TRA } 2 \text{ E } 2+t.}$$

QUINDI:

$$f_x(2,3) = \lim_{t\to 0} \frac{f(2+t,3) - f(2,3)}{t} = g'(2) = 9$$

DOVE $g(x) = f(x,3) = 9x$
E QUINDI $g'(x) = 9$

ANALOGAMENTE:

$$f_y(2,3) = \lim_{t\to 0} \frac{f(2,3+t) - f(2,3)}{t} = h'(3) = 12$$

DOVE $h(y) = f(2,y) = 2y^2$
E QUINDI $h'(y) = 4y$

OSS 4 NELL' **ES.1** ABBIAMO IMPARATO CHE PER TROVARE LA DERIVATA RISPETTO A x (O RISPETTO A y) BASTA DERIVARE FORMALMENTE $f(x,y)$ PENSANDOLA COME FUNZIONE DELLA SOLA VARIABILE x (O y).
E POI, NELL'ESPRESSIONE TROVATA, SOSTITUIRE A x E y LE COORDINATE x_0 E y_0 DEL PUNTO CHE CI INTERESSA.
QUESTO SIGNIFICA CHE LE FUNZIONI DERIVATE $f_x(x,y)$ E $f_y(x,y)$ SI OTTENGONO DERIVANDO FORMALMENTE $f(x,y)$ RISPETTO A x O RISPETTO A y, COME SE FOSSE UNA FUNZIONE IN UNA SOLA VARIABILE.
OVVIAMENTE QUESTO VALE PIÙ IN GENERALE ANCHE PER $f:\Omega\to\mathbb{R}$ CON $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, PER CALCOLARE $f_{x_i}(x)$.

ES.2 DATA $f(x,y,z) = x^2\cdot y^z$ SU $\Omega = \{(x,y,z) \mid y>0\}$, TROVARE f_x, f_y ED f_z.

SVOLGIMENTO

$$f_x(x,y,z) = \left(x^2\cdot y^z\right)_x = 2x\cdot y^z$$

$$f_y(x,y,z) = \left(x^2 y^z\right)_y = x^2\cdot z\cdot y^{z-1}$$

$$f_z(x,y,z) = \left(x^2 y^z\right)_z = \left(x^2\cdot e^{z\ln y}\right)_z = x^2 e^{z\ln y}\cdot \ln y = x^2\cdot y^z\cdot \ln y$$

ES.3 (ESEMPIO CATTIVO)

$$\text{SIA } f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{SE } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{SE } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

MOSTRARE CHE IN $(0,0)$ f È DERIVABILE IN TUTTE LE DIREZIONI MA CHE NON È CONTINUA.

SVOLGIMENTO

PER OGNI FISSATA DIREZIONE $v=(v_1,v_2)$, SI HA:

$$f_v(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+tv_1,0+tv_2)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(tv_1,tv_2)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{(tv_1)\cdot(tv_2)^2}{(tv_1)^2+(tv_2)^4}=\lim_{t\to 0}\frac{v_1\cdot v_2^2}{v_1^2+t^2\cdot v_2^4}=\begin{cases} 0 & \text{SE } v_1=0 \\ \dfrac{v_2^2}{v_1} & \text{SE } v_1\neq 0\end{cases}$$

QUINDI f È DERIVABILE IN $(0,0)$.

TUTTAVIA f NON È CONTINUA IN $(0,0)$, PERCHÉ $f(0,0)=0$ MA $f(x,y)\not\to 0$ PER $(x,y)\to(0,0)$.

INFATTI, SE MI RESTRINGO ALL'INSIEME $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0,\ x=y^2\}$ SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in A}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{y\to 0^+}\frac{y^2\cdot y^2}{y^4+y^4}=\frac{1}{2}\neq f(0,0)$$

OSS. 5 DUNQUE, A DIFFERENZA DI QUANTO ACCADE IN $\mathbb{R}$, IN $\mathbb{R}^n$ LA DERIVABILITÀ NON BASTA A GARANTIRE LA CONTINUITÀ. INTRODURREMO QUINDI IL CONCETTO DI DIFFERENZIABILITÀ, CHE IN 2 O PIÙ VARIABILI È DIVERSO DALLA DERIVABILITÀ.

DEF 6 DATI $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ APERTO, $\bar{x}\in\Omega$ ED $f:\Omega\to\mathbb{R}$ DIREMO CHE f È DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$ SE $\exists\ M=(m_1,\dots,m_n)\in\mathbb{R}^n$ TALE CHE:

(2) $$f(x)=f(\bar{x})+\langle M,x-\bar{x}\rangle+o(\|x-\bar{x}\|)\quad \text{PER } x\to\bar{x}$$

OSS. 6 SE RISCRIVIAMO LA (2) NEL MODO SEGUENTE:

$$f(x_1,\dots,x_n)=\boxed{f(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)+m_1(x_1-\bar{x}_1)+\dots+m_n(x_n-\bar{x}_n)}+o(\|x-\bar{x}\|)$$

NOTIAMO CHE LA PARTE ▨ HA PER GRAFICO UN IPERPIANO IN $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, PASSANTE PER IL PUNTO $(\bar{x},f(\bar{x}))$ E CHE DIFFERISCE DALLA FUNZIONE DI UNA QUANTITÀ CHE È $o(\|x-\bar{x}\|)$.

UN IPERPIANO CON TALI PROPRIETÀ SI DICE CHE È TANGENTE AL GRAFICO DI f.

QUINDI DIRE CHE f È DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$ SIGNIFICA DIRE CHE IL SUO GRAFICO HA UN IPERPIANO TANGENTE NEL PUNTO $(\bar{x},f(\bar{x}))$.

TEO. 3

DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ APERTO, $\bar{x} \in \Omega$ ED $f: \Omega \to \mathbb{R}$ DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$, CON COEFFICIENTI DELLA PARTE LINEARE UGUALI A $M = (m_1, \dots, m_n)$. ALLORA SI HA:

(a) f È CONTINUA IN $\bar{x}$.

(b) PER OGNI DIREZIONE v, ESISTE $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x})$ ED È UGUALE A $\langle M, v \rangle$.

(IN PARTICOLARE $f_{x_i}(\bar{x}) = m_i \quad \forall i = 1, \dots, n$)

DIMO

(a) OVVIO PERCHÈ:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \underbrace{\langle M, x-\bar{x} \rangle}_{\downarrow \, 0} + \underbrace{o(\|x-\bar{x}\|)}_{\downarrow \, 0} \to f(\bar{x}) + 0 + 0 = f(\bar{x}) \quad \text{PER } x \to \bar{x}$$

PERCHÈ $|\langle M, x-\bar{x} \rangle| \leq \underbrace{\|M\|}_{\text{COSTANTE}} \cdot \underbrace{\|x-\bar{x}\|}_{\downarrow \, 0}$

(b) SIA v UNA DIREZIONE, CIOÈ $v \in \mathbb{R}^n$ E $\|v\| = 1$, ALLORA:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x}+tv) - f(\bar{x})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\langle M, tv \rangle + o(\|tv\|)}{t} = \lim_{t \to 0} \left(\langle M, v \rangle + \frac{o(|t|)}{t} \right) = \langle M, v \rangle$$

IN PARTICOLARE $\forall i = 1, \dots, n$, DETTO $e_i = (0, \dots, 0, \overset{i\text{-esima}}{1}, 0, \dots, 0)$, SI HA:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(\bar{x}) = \langle M, e_i \rangle = m_i$$

DEF. 7 DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \Omega$ E $f: \Omega \to \mathbb{R}$ DERIVABILE IN $\bar{x}$, DEFINIAMO GRADIENTE DI f IN $\bar{x}$ IL VETTORE:

$$\nabla f(\bar{x}) = (f_{x_1}(\bar{x}), f_{x_2}(\bar{x}), \dots, f_{x_n}(\bar{x}))$$

OSS. 7 CON LA NOTAZIONE APPENA INTRODOTTA, NEL PUNTO (b) DEL TEO. 3 SI PUÒ SCRIVERE:

$$M = \nabla f(\bar{x}) \quad \text{E} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \langle \nabla f(\bar{x}), v \rangle$$