26-03-2021 (ORE 9-11)
PARTI AGGIUNTE RISPETTO AL 2020

LEZ 12

NEL SEGUITO SONO ELENCATE ALCUNE OSSERVAZIONI ED ESEMPI DELLA LEZIONE 12 DEL 2021 CHE NON SONO PRESENTI NEGLI APPUNTI DELLE LEZIONI DEL 2020.

OSS.1 DATE $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ TALI CHE $\forall c\in[a,b)$ $f,g\in\mathcal{R}([a,c])$, SE $\int_a^b g(x)\,dx$ CONVERGE ALLORA:

$$\int_a^b g(x)+f(x)\,dx \quad \text{E} \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

HANNO LO STESSO CARATTERE.

DIMO

SI OSSERVI CHE:

PERCHÉ $\int_a^b g(x)\,dx$ CONVERGE E QUINDI $\lim_{c\to b^-}\int_a^c g(x)\,dx$ ESISTE FINITO

$$\underbrace{\lim_{c\to b^-}\int_a^c g(x)+f(x)\,dx}_{A} = \lim_{c\to b^-}\left(\int_a^c g(x)\,dx+\int_a^c f(x)\,dx\right) =$$

$$= \int_a^b g(x)\,dx + \underbrace{\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx}_{B}$$

QUINDI:

A ESISTE FINITO $\Longleftrightarrow$ B ESISTE FINITO

A $=+\infty\ (-\infty)$ $\Longleftrightarrow$ B $=+\infty\ (-\infty)$

A NON ESISTE $\Longleftrightarrow$ B NON ESISTE

QUESTO SIGNIFICA CHE $\int_a^b f(x)\,dx$ E $\int_a^b g(x)+f(x)\,dx$ HANNO LO STESSO CARATTERE.

OSS. 2

SE f E g SONO COME NEL CRITERIO PER GLI INTEGRALI OSCILLANTI (TEO. 1 LEZ. 8 DEL 2020) MA CON L'UNICA DIFFERENZA CHE g NON È A MEDIA NULLA, NEL SENSO CHE SI HA:

$$\int_a^{a+T} g(x)\,dx = A \neq 0 \qquad (\text{DOVE } T \text{ È IL PERIODO DI } g),$$

ALLORA $\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$ E $\int_a^{+\infty} A\,f(x)\,dx$ HANNO LO STESSO CARATTERE.

DIMO OSSERVIAMO CHE:

$$(1) \qquad \int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\left(g(x)-\frac{A}{T}\right) + f(x)\cdot\frac{A}{T}\,dx$$

SI NOTI CHE $g(x)-\frac{A}{T}$ È A MEDIA NULLA PERCHÉ:

$$\int_a^{a+T}\left(g(x)-\frac{A}{T}\right)dx = \int_a^{a+T} g(x)\,dx - \frac{A}{T}\int_a^{a+T} 1\,dx = A - \frac{A}{T}\cdot T = 0$$

DI CONSEGUENZA, APPLICANDO IL CRIT. DEGLI INTEGRALI OSCILLANTI, SI OTTIENE CHE:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\left(g(x)-\frac{A}{T}\right)dx \quad \text{CONVERGE}$$

E QUINDI, GRAZIE ALL' OSS. 1, L'INTEGRALE AL II° MEMBRO DI (1) HA LO STESSO CARATTERE DI $\int_a^{+\infty} f(x)\cdot\frac{A}{T}\,dx$ CIOÈ DI $\int_a^{+\infty} A\,f(x)\,dx$.

ES. 1

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\sin x)}{\ln(e+x+\sin x)}\,dx \quad \text{CONVERGE}$$

BASTA APPLICARE IL CRITERIO PER GLI INTEGRALI OSCILLANTI DOPO AVER OSSERVATO CHE:

(a) $\arctan(\sin x)$ È PERIODICA A MEDIA NULLA

(b) $$\frac{1}{\ln(e+x+\sin x)} \longrightarrow 0$$ DECRESCENDO

IL PUNTO (b) È OVVIO DOPO AVER OSSERVATO CHE

$x+\sin x \to +\infty$ CRESCENDO.

PER IL PUNTO (a), DOPO AVER OSSERVATO CHE $\arctan(\sin x)$ HA PERIODO 2π, BASTA NOTARE CHE:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \arctan(\sin x)\,dx = 0$$

PERCHÈ $\arctan(\sin x)$ È UNA FUNZIONE DISPARI.

$\boxed{\text{ES.2}}$ $$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{2}\sin x\right)}{x}\,dx$$ DIVERGE A $-\infty$.

PER VERIFICARLO BASTA APPLICARE L' $\boxed{\text{OSS.2}}$ DOPO AVER MOSTRATO CHE:

(2) $$\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1+\tfrac{1}{2}\sin x\right)dx = C < 0$$

PER MOSTRARE (2) SI OSSERVI CHE:

(3) $$\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1+\tfrac{1}{2}\sin x\,dx\right) = \overbrace{\int_{-\pi}^{0} \ln\left(1+\tfrac{1}{2}\sin x\right)dx}^{A} + \int_{0}^{\pi} \ln\left(1+\tfrac{1}{2}\sin x\right)dx$$

DOVE: $x=-t$

$$A = \int_{\pi}^{0} \ln\left(1+\tfrac{1}{2}\sin(-t)\right)\cdot(-1)\,dx = \int_{0}^{\pi} \ln\left(1-\tfrac{1}{2}\sin t\right)dt$$

QUINDI (3) DIVENTA:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1+\frac{1}{2}\sin x\right) dx = \int_0^{\pi} \ln\left(1-\frac{1}{2}\sin x\right) dx + \int_0^{\pi} \ln\left(1+\frac{1}{2}\sin x\right) dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \ln\left(1-\frac{1}{2}\sin x\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\sin x\right) dx = \int_0^{\pi} \ln\left(1-\frac{1}{4}\sin^2 x\right) dx \leq$$

$$\leq \int_0^{\pi} -\frac{1}{4}\sin^2 x \, dx = -\frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{8} < 0$$

$\ln(1+x) \leq x$
$\forall x > -1$