12-04-2021 (14:00-16:00)

LEZ 20

PRENDENDO SPUNTO DAGLI ESERCIZI SVOLTI SONO STATE INTRODOTTE LE NOZIONI DI TEORIA RIPORTATE DI SEGUITO.

TEO.1 (CRITERIO DI GAUSS)

SIA $\sum a_n$ A TERMINI POSITIVI E TALE CHE, PER $n \to +\infty$, SI ABBIA

(1)
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ALLORA: **a** $\alpha > 1 \Rightarrow \sum a_n$ CONVERGE

b $\alpha < 1 \Rightarrow \sum a_n$ DIVERGE

DIMO

a SIA β TALE CHE $1 < \beta < \alpha$ E PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ SIA:

(2)
$$b_n = \frac{1}{n^\beta}$$

SI HA:

(3)
$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^\beta = 1 - \frac{\beta}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

DA (1) E (3) SEGUE CHE:

(4)
$$\frac{b_{n+1}}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha - \beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \overset{\alpha > \beta}{\geq} 0 \quad \text{DEFINITIVAMENTE IN } n$$

CIOÈ:

(5)
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \text{DEFINITIVAMENTE IN } n$$

MA SICCOME $\beta > 1$ E b_n È DEFINITA DA (2) SI HA CHE $\sum b_n$ CONVERGE.

QUINDI, GRAZIE A (5) E AL CRIT. DEL CONFRONTO DI RAPPORTI, SI OTTIENE CHE ANCHE $\sum a_n$ CONVERGE.

b PRESO $\beta>0$ TALE CHE $\alpha<\beta<1$, SIA b_n DEFINITO DA **(2)**.

PROCEDENDO COME PRIMA SI OTTIENE ANCORA **(3)**, MA STAVOLTA, SICCOME $\alpha<\beta$, DA **(3)** SEGUE:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{b_{n+1}}{b_n}$$

INOLTRE $\sum b_n$ DIVERGE PERCHÉ $\beta<1$. DI CONSEGUENZA ANCHE $\sum a_n$ DIVERGE GRAZIE AL CRITERIO DEL CONFRONTO DI RAPPORTI.

TEO.2

PER OGNI $\alpha\in[0,1)$ SI HA $(n^n)^\alpha=o(n!)$ PER $n\to+\infty$.

DIMO

POSTO:

$$R_n=\frac{(n^n)^\alpha}{n!}$$

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE $R_n\to 0$ PER $n\to+\infty$.

A TALE SCOPO MOSTREREMO UNA COSA PIÙ FORTE: $\sum R_n$ CONVERGE.

INFATTI, APPLICANDO IL CRITERIO DEL RAPPORTO A $\sum R_n$ SI HA:

PERCHÉ $\alpha<1$

$$\frac{R_{n+1}}{R_n}=\frac{((n+1)^{n+1})^\alpha}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(n^n)^\alpha}=\frac{(n+1)^\alpha}{n+1}\cdot\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^\alpha\longrightarrow 0\cdot e^\alpha=0$$

QUINDI $\sum R_n$ CONVERGE PER IL CRITERIO DEL RAPPORTO E, COME EFFETTO COLLATERALE, $R_n\to 0$.

ES.1 (ESEMPIO DI UTILIZZO DEL CR. DI GAUSS)

STUDIARE, AL VARIARE DI $A>0$, IL CARATTERE DI $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{2n-1}}{(2n)!}\cdot A^n$.

SOLUZIONE

POSTO:

$$a_n=\frac{n^{2n-1}}{(2n)!}$$

SI HA:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{2n+1}}{(2n+2)!}\cdot A^{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n^{2n-1}}\cdot\frac{1}{A^n}=\frac{A}{4}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\longrightarrow A\cdot\frac{e^2}{4}$$

QUINDI, GRAZIE AL CR. DEL RAPPORTO, $\sum a_n$ CONVERGE PER $0 < A < \frac{4}{e^2}$ E DIVERGE PER $A > \frac{4}{e^2}$.

INVECE PER $A = \frac{4}{e^2}$ IL CRITERIO DEL RAPPORTO NON FUNZIONA PERCHÉ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ DAL BASSO. PROVIAMO QUINDI AD APPLICARE IL CR. DI GAUSS.

PER $A = \frac{4}{e^2}$ SI HA:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-2} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \left(1-\frac{1}{2n+1}\right) e^{-2+2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{2n+1}\right) e^{-2+2n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \left(1-\frac{1}{2n+1}\right) \cdot e^{-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= 1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) = 1-\frac{\frac{3}{2}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

QUINDI:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{CON } \alpha = \frac{3}{2} > 1$$

DI CONSEGUENZA, GRAZIE AL CR. DI GAUSS, LA SERIE CONVERGE ANCHE PER $A = \frac{4}{e^2}$.