14-04-2021 (11:00-13:00)

LEZ 21

PRENDENDO SPUNTO DAGLI ESERCIZI SVOLTI SONO STATE INTRODOTTE LE NOZIONI DI TEORIA RIPORTATE DI SEGUITO.

OSS.1 PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ CONVERGE A e^x.

INFATTI SI HA:

$$e^x = 1 + x + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \boxed{\frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}}$$

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE
ξ COMPRESO TRA 0 E x

QUINDI $\forall n \in \mathbb{N}$ E $\forall x \in \mathbb{R}$ SI HA:

$$(1) \qquad 0 \leq \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{e^{|x|} \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

MA PER OGNI FISSATO $x \in \mathbb{R}$ SI HA:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{|x|} \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

QUINDI DA **(1)** SEGUE CHE:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

CIOÈ CHE:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ CONVERGE A } e^x$$

OSS.2 PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$ CONVERGE A $\cos x$.

INFATTI SI HA:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \frac{(-1)^{n+1} \sin(\xi) \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

DA CUI SEGUE CHE $\forall x \in \mathbb{R}$ E $\forall n \in \mathbb{N}$ SI HA:

$$0 \leq \left| \cos x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

DA CUI SI OTTIENE LA TESI IN MODO DEL TUTTO ANALOGO ALL' **OSS.1**.

OSS.3 PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ CONVERGE A $\sin x$.
LA VERIFICA È DEL TUTTO ANALOGA.

OSS.4 PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$ CONVERGE A e^{ix}.
LA CONVERGENZA SEGUE SUBITO DAL FATTO CHE

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(ix)^n}{n!} \right| = \sum \frac{|x|^n}{n!} \text{ CONVERGE.}$$

RIMANE DA MOSTRARE CHE IL VALORE A CUI CONVERGE È e^{ix}.
VISTO CHE LA SERIE CONVERGE, PER TROVARNE IL VALORE BASTA CONSIDERARE UNA QUALSIASI SOTTOSUCCESSIONE DELLA SUCCESSIONE (S_n) DELLE SOMME FINITE, AD ESEMPIO (S_{2n+1}). SI HA:

$$S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

QUINDI:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \lim_{n \to +\infty} S_{2n+1} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \lim_{n \to +\infty} i \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos x + i \sin x = e^{ix}$$

OSS. 5 PER OGNI $z \in \mathbb{C}$ LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ CONVERGE A e^z.

INFATTI, PRESO $z = x + iy$, SI HA:

$$S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k!}(x+iy)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k!} \sum_{p+q=k} \frac{k!}{p!\cdot q!} x^p (iy)^q =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{p+q=k} \frac{1}{p!} x^p \cdot \frac{1}{q!}(iy)^q =$$

$$= \sum_{p+q \le 2n} \frac{1}{p!} x^p \cdot \frac{1}{q!}(iy)^q =$$

$$= \overbrace{\sum_{\substack{p=0,\dots,n \\ q=0,\dots,n}} \frac{1}{p!} x^p \cdot \frac{1}{q!}(iy)^q}^{A_n} + \overbrace{\sum_{\substack{p+q\le 2n \\ p>n \vee q>n}} \frac{1}{p!} x^p \cdot \frac{1}{q!}(iy)^q}^{B_n}$$

SI HA:

$$|B_n| \le \sum_{\substack{p+q\le 2n \\ p>n \vee q>n}} \frac{1}{p!\cdot q!} \cdot |x|^p \cdot |y|^q \le \sum_{\substack{p+q\le 2n \\ p>n \vee q>n}} \frac{1}{(n+1)!}(1+|x|+|y|)^{2n} \le$$

PERCHÈ IL NUMERO DI COPPIE $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ TALI CHE È DATO DA

$$\le n(n+1) \cdot \frac{1}{(n+1)!} \cdot (1+|x|+|y|)^{2n} = \frac{(1+|x|+|y|)^{2n}}{(n-1)!} \longrightarrow 0$$

PER $n \to +\infty$

$$A_n = \sum_{\substack{p=0,\dots,n \\ q=0,\dots,n}} \frac{1}{p!} x^p \cdot \frac{1}{q!}(iy)^q = \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} x^p \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{n} \frac{1}{q!}(iy)^q \right) \longrightarrow e^x \cdot e^{iy} = e^z$$

DI CONSEGUENZA:

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} (A_n + B_n) = e^z + 0 = e^z$$

INFINE ANCHE

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(S_{2n} + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = e^z + 0 = e^z$$

QUINDI $S_n \to e^z$, CHE È QUELLO CHE VOLEVAMO DIMOSTRARE.