# 30-04-2021 (9:00-11:00)

# LEZ 30

**DETTAGLI AGGIUNTI NELLA LEZIONE DI QUEST'ANNO**

**ES. 1** INDICHIAMO CON $\ell^2$ L'INSIEME DI TUTTE LE SUCCESSIONI $(a_n)$ TALI CHE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ CONVERGE. NEL SEGUITO, PER BREVITÀ SCRIVEREMO SPESSO $\bar{a}$ AL POSTO DI $(a_n)$. INOLTRE $\forall \bar{a} \in \ell^2$ DEFINIAMO $\|\bar{a}\|_2 = \sqrt{\sum a_n^2}$.
ALLORA $\ell^2$ È UNO SP. VETTORIALE DI DIMENSIONE INFINITA E $\|\cdot\|_2$ È UNA NORMA.

**DIMO**

PRESI $\bar{a} = (a_n) \in \ell^2$ E $\bar{b} = (b_n) \in \ell^2$ SI HA $\bar{a} + \bar{b} \in \ell^2$ PERCHÈ:

$$0 \leq (a_n + b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n \leq 2a_n^2 + 2b_n^2$$

QUINDI $\sum (a_n + b_n)^2$ CONVERGE PER IL CRIT. DEL CONFRONTO.
IL FATTO CHE $\bar{a} \in \ell^2 \Rightarrow \lambda \bar{a} \in \ell^2 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ È OVVIO, COME PURE TUTTE LE ALTRE PROPRIETÀ DI SP. VETTORIALE. QUINDI $\ell^2$ È UNO SP. VETT.
LA DIMENSIONE NON È FINITA PERCHÈ, SE $\forall n \in \mathbb{N}$ DEFINIAMO LA SUCCESSIONE

(1) $$\bar{e}_n = (0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-ESIMO TERMINE}}}{1}, 0, \dots, 0, \dots\dots)$$

SI HA $\bar{e}_n \in \ell^2 \ \forall n \in \mathbb{N}$, INOLTRE NESSUNO DEGLI $\bar{e}_n$ PUÒ ESSERE SCRITTO COME COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ALTRI.
INFINE $\|\cdot\|_2$ È UNA NORMA.
INFATTI $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \ell^2$ E $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ SI HA:

1) $\|\bar{a}\|_2 = \sqrt{\sum a_n^2} \geq 0$ CON "=" CHE VALE SE E SOLO SE $a_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

2) $\|\lambda\bar{a}\|_2 = \sqrt{\sum(\lambda a_n)^2} = \sqrt{\lambda^2\sum a_n^2} = |\lambda|\sqrt{\sum a_n^2} = |\lambda|\,\|\bar{a}\|_2$

3) $\|\bar{a}+\bar{b}\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)^2} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)^2} \leq$

PER LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE PER LA NORMA EUCLIDEA IN $\mathbb{R}^n$

$$\leq \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\sum_{k=0}^{n}a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=0}^{n}b_k^2}\right) =$$

$$= \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty}a_n^2} + \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty}b_n^2} = \|\bar{a}\|_2 + \|\bar{b}\|_2$$

**ES. 2** SIA $K = \{\bar{a}\in\ell^2 \mid \|\bar{a}\|_2 \leq 1\}$ ALLORA $K$ È CHIUSO E LIMITATO MA NON È COMPATTO.

**DIMO**

CHE $K$ SIA LIMITATO È OVVIO.

MOSTRIAMO CHE $K$ È CHIUSO.

$$x\in K^c \Rightarrow \left(\|x\|_2 = 1+2\delta \text{ CON } \delta>0\right) \Rightarrow$$

PERCHÈ SE $y\in I_x(\delta)$, GRAZIE ALLA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE SI HA:

$$\|y\|_2 \geq \|x\|_2 - \|y-x\|_2 > 1+2\delta-\delta = 1+\delta > 1$$

$$\Rightarrow \left(I_x(\delta)\cap K = \emptyset\right) \Rightarrow \left(x \text{ INTERNO A } K^c\right)$$

QUINDI $K^c$ È APERTO, QUINDI $K$ È CHIUSO.

INFINE MOSTRIAMO CHE $K$ NON È COMPATTO.

INFATTI, SE $\bar{e}_n$ È DEFINITO DA (1), LA SUCCESSIONE $(\bar{e}_n)$ È A VALORI IN $K$, MA DA ESSA NON SI PUÒ ESTRARRE ALCUNA SOTTOSUCCESSIONE CONVERGENTE PERCHÈ PER OGNI $i,j\in\mathbb{N}$ CON $i\neq j$ SI HA:

$$\|\bar{e}_i - \bar{e}_j\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

E QUINDI OGNI SOTTOSUCC. DI $(\bar{e}_n)$ NON È DI CAUCHY.

CIÒ SIGNIFICA $K$ NON È COMPATTO.