17-05-2021 (14:00-16:00) LEZ. 40

DEF.1 DATI Ω APERTO DI $\mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0)\in\Omega$, $F:\Omega\to\mathbb{R}$ CONTINUA, $I=(a,b)$, $f: I\to\mathbb{R}$ DI CLASSE C^1, DIREMO CHE LA COPPIA (I,f) È SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE $y'=F(x,y)$ SE:

$$\forall x\in I \text{ SI HA } (x,f(x))\in\Omega \text{ E } f'(x)=F(x,f(x)).$$

SE INOLTRE SI HA ANCHE $f(x_0)=y_0$, DIREMO CHE (I,f) È ANCHE SOL. DEL PROB. DI CAUCHY:

(1) $$\begin{cases} y'=F(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

ES.1 (VEDI $\boxed{\text{ES. 0}}$ DELLA $\boxed{\text{LEZ. 21}}$ DELL' A.A. 2019/20.)

DEF.2 DATI Ω, (x_0,y_0), F E I COME NELLA $\boxed{\text{DEF. 1}}$, ED $f:I\to\mathbb{R}$ CONTINUA, DIREMO CHE LA COPPIA (I,f) È SOLUZ. DELL' EQUAZIONE INTEGRALE:

(2) $$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}F(t,y(t))\,dt$$

SE:
$$\forall x\in I \text{ SI HA } (x,f(x))\in\Omega \text{ E } f(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}F(t,y(t))\,dt$$

PROP.1 DATI Ω, (x_0,y_0), F E I COME NELLA $\boxed{\text{DEF. 1}}$, ED $f:I\to\mathbb{R}$, È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

(a) f È CONTINUA E SODDISFA (2)

(b) f È DI CLASSE C^1 E SODDISFA (1)

DIMO

$\boxed{(a)\Rightarrow(b)}$ SE f È CONTINUA E SODDISFA

(3) $$f(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}F(t,f(t))\,dt$$

ALLORA $F(t, f(t))$ È CONTINUA. DI CONSEGUENZA, DAL T. FOND. DEL CALCOLO INTEG. SEGUE CHE IL 2° MEMBRO DI (3) È DI CLASSE C^1. QUINDI È DI CLASSE C^1 ANCHE IL 1° MEMBRO, CIOÈ f.

DERIVANDO AMBO I MEMBRI DI (3) SI OTTIENE:

(4) $$f'(x) = F(x, f(x)).$$

INFINE, CALCOLANDO AMBO I MEMBRI DI (3) PER $x = x_0$, SI OTTIENE:

(5) $$f(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} F(t, f(t))\, dt = y_0 + 0 = y_0$$

METTENDO INSIEME (4) E (5) OTTENIAMO CHE VALE (b).

$\boxed{(b) \Rightarrow (a)}$ SE f È DI CLASSE C^1 E SODDISFA:

$$f'(t) = F(t, f(t))$$

ALLORA, INTEGRANDO AMBO I MEMBRI TRA x_0 E x, SI OTTIENE:

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} F(t, f(t))\, dt$$

CIOÈ:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} F(t, f(t))\, dt$$

DA CUI, RICORDANDO CHE $f(x_0) = y_0$, SEGUE CHE:

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, f(t))\, dt$$

QUINDI VALE (a).

$\boxed{\text{ES. 2}}$ $(\mathbb{R}, e^{x^2})$ È SOLUZIONE SIA DI $y(x) = 1 + \int_{x_0}^{x} 2t\, y(t)\, dt$, CHE DI

$$\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

TEO.1 (ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE)

DATI Ω APERTO DI $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ ED $F: \Omega \to \mathbb{R}$ CONTINUA E LOCALMENTE LIPSCHITZIANA NELLA VARIABILE y, CIOÈ TALE CHE:

(6) $\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ $\exists V$ INTORNO DI $(\bar{x}, \bar{y})$ ED $\exists L > 0$ TALE CHE $\forall (x, y_1)(x, y_2) \in V$ SI HA $|F(x, y_1) - F(x, y_2)| < L |y_1 - y_2|$

ALLORA $\exists \delta > 0$ TALE CHE $\exists! f: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ DI CLASSE C^1 TALE CHE LA COPPIA $((x_0 - \delta, x_0 + \delta), f)$ È SOLUZIONE DI:

$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

OSS.1 DEL $\boxed{\text{TEO.1}}$ NON DAREMO LA DIMOSTRAZIONE (CHE INVECE SARÀ DATA NEL CORSO DI ANALISI MAT. 4). CI LIMITEREMO, PIÙ AVANTI A DIMOSTRARE LA SOLA UNICITÀ, PRESUPPONENDO L'ESISTENZA. SEGNALIAMO INOLTRE CHE SAREBBE POSSIBILE DIMOSTRARE L'ESISTENZA (SENZA L'UNICITÀ) ANCHE SENZA L'IPOTESI (6). OSSERVIAMO INFINE CHE L'IPOTESI (6) È BANALMENTE SODDISFATTA SE $\frac{\partial F}{\partial y}$ È CONTINUA SU Ω.

PROP.2 NELLE STESSE IPOTESI DEL $\boxed{\text{TEO.1}}$, SIANO $(I_1, y_1(x))$ E $(I_2, y_2(x))$ DUE SOLUZIONI DEL PROB. DI CAUCHY

$$\begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ALLORA $\forall x \in I_1 \cap I_2$ SI HA $y_1(x) = y_2(x)$.

DIMO

(VEDI LA DIMOSTRAZIONE DELLA $\boxed{\text{PROP.2}}$ DELLA $\boxed{\text{LEZ. 21}}$ DELL' A.A. 2019/20)

NOTAZIONE SE $F(x,y)$ È DELLA FORMA $f(y)g(x)$, CIOÈ L'EQUAZIONE È DEL TIPO $y'=f(y)g(x)$, ALLORA L'EQUAZIONE SI DICE A VARIABILI SEPARABILI. IN TAL CASO, NEL $\boxed{\text{TEO.1}}$, Ω È IL PRODOTTO CARTESIANO DI 2 INTERVALLI APERTI (ANCHE NON LIMITATI) E LE IPOTESI SU $F(x,y)$ DIVENTANO: f E g CONTINUE ED f LOCALMENTE LIPSCHITZIANA.

PER DETERMINARNE LE SOLUZIONI SI PROCEDE COME NELL'ESEMPIO SEGUENTE:

ES. 3 (VEDI $\boxed{\text{ES.1}}$ DELLA $\boxed{\text{LEZ.21}}$ DELL'A.A. 2019/2020)