21-05-2021 (9:00-11:00) LEZ. 42

NOTAZIONE SALVO AVVISO CONTRARIO, PER TUTTA LA LEZIONE Ω È UN APERTO DI $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ ED $F: \Omega \to \mathbb{R}$ È UNA FUNZIONE CONTINUA E LOCALMENTE LIPSCHITZIANA NELLA VARIABILE y. IN PARTICOLARE SUPPORREMO TALI IPOTESI OGNI VOLTA CHE CONSIDERIAMO IL PROB. DI CAUCHY:

$$(1) \qquad \begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

DEF 1 DATE DUE SOLUZIONI $(I_1, y_1(x))$ E $(I_2, y_2(x))$ DELLA STESSA EQUAZIONE DIFFERENZIALE $y' = F(x,y)$, DIREMO CHE LA PRIMA È UN **PROLUNGAMENTO** DELLA SECONDA SE $I_2 \subset I_1$ E $\forall x \in I_2$ SI HA $y_1(x) = y_2(x)$.

OSS. 1 SE $(I_1, y_1(x))$ E $(I_2, y_2(x))$ SODDISFANO NON SOLO LA STESSA EQUAZIONE MA ANCHE LO STESSO DATO INIZIALE ALLORA, GRAZIE ALLA $\boxed{\text{PROP. 2}}$ DELLA $\boxed{\text{LEZ. 40}}$, LA CONDIZIONE $I_2 \subset I_1$ BASTA, DA SOLA, A GARANTIRE CHE $y_1(x) = y_2(x)$ SU TUTTO I_2 E QUINDI CHE $(I_1, y_1(x))$ SIA UN PROLUNGAMENTO DI $(I_2, y_2(x))$.

DEF. 2 DATA UNA SOLUZIONE $(I, y(x))$ DELL'EQUAZIONE $y' = F(x,y)$ DIREMO CHE È **MASSIMALE** SE NON È ULTERIORMENTE PROLUNGABILE, CIOÈ SE IL SUO UNICO PROLUNGAMENTO È SE STESSA.

TEO. 1 LA SOLUZIONE MASSIMALE DI (1) ESISTE SEMPRE.

DIMO LA DIMOSTRAZIONE È IDENTICA A QUELLA DEL $\boxed{\text{TEO. 1}}$ DELLA $\boxed{\text{LEZ. 22}}$ DELL' A.A. 2019/2020.

TEO.2 DATO IL P. DI CAUCHY (1), SIA $K \subset \Omega$ CON K COMPATTO, E SIA $((a,b), y(x))$ UNA SOL. DI (1) IL CUI GRAFICO È TUTTO CONTENUTO IN K, ALLORA $((a,b), y(x))$ È ULTERIORMENTE PROLUNGABILE SIA A DESTRA CHE A SINISTRA.

DIMO

SIA $M = \max \{ |F(x,y)| \ / \ (x,y) \in K \}$, CHE ESISTE PER IL T. DI WEIERSTRASS.

PER OGNI $x \in (a,b)$ SI HA $(x, y(x)) \in K$ E QUINDI:

$$|y'(x)| = |F(x, y(x))| \leq M$$

MA ALLORA, GRAZIE AL T. DI LAGRANGE, $y(x)$ È LIPSCHITZIANA CON COSTANTE DI LIPSCHITZ M, QUINDI È ANCHE UNIF. CONTINUA E QUINDI È ESTENDIBILE CON CONTINUITÀ PER $x = b$. SIA QUINDI

(2)
$$\mathbb{R} \ni \bar{y} = \lim_{x \to b^-} y(x)$$

SICCOME K È COMPATTO, E QUINDI CHIUSO, AVREMO CHE $(b, \bar{y}) \in K \subset \Omega$.

QUINDI, AL P. DI CAUCHY:

(3)
$$\begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(b) = \bar{y} \end{cases}$$

POSSIAMO APPLICARE IL T. DI ESIST. E UNIC. LOCALE E DIRE CHE ESISTE $((b-\delta, b+\delta), y_1(x))$ CHE NE È SOLUZIONE, DOVE $\delta > 0$.

MA ALLORA, POSTO:

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} y(x) & \forall x \in (a,b) \\ y_1(x) & \forall x \in [b, b+\delta) \end{cases}$$

MOSTRIAMO CHE $((a, b+\delta), \tilde{y}(x))$ È UN PROLUNGAMENTO DI $((a,b), y(x))$.
IL FATTO CHE $\tilde{y}(x)$ SODDISFI L'EQUAZIONE PER $x \neq b$ È IMMEDIATO PER COME È STATA COSTRUITA $\tilde{y}(x)$. RIMANE DA VERIFICARE CHE $\tilde{y}(x)$ È REGOLARE QUANTO BASTA E SODDISFA L'EQUAZIONE ANCHE PER $x = b$. LA CONTINUITÀ È IMMEDIATA PERCHÈ:

$$\lim_{x \to b^-} \tilde{y}(x) = \lim_{x \to b^-} y(x) \overset{(2)}{=} \bar{y} = y_1(\bar{x}) \overset{\text{PERCHÉ } y_1(x) \text{ È CONTINUA}}{=} \lim_{x \to b^+} y_1(x) = \lim_{x \to b^+} \tilde{y}(x)$$

INOLTRE ANCHE $\tilde{y}'(x)$ È CONTINUA IN $x=b$.

PER DIMOSTRARLO SI OSSERVI CHE:

GRAZIE A (2) E ALLA CONTINUITÀ DI $F(x,y)$

(4) $$\lim_{x\to b^-} \tilde{y}'(x) = \lim_{x\to b^-} y'(x) = \lim_{x\to b^-} F(x,y(x)) = F(b,\bar{y})$$

E

PERCHÉ $y_1(x)$ È C^1 — PERCHÉ $y_1(x)$ SODDISFA (3)

(5) $$\lim_{x\to b^+} \tilde{y}'(x) = \lim_{x\to b^+} y_1'(x) = y_1'(b) = F(b,\bar{y}).$$

SICCOME SAPPIAMO GIÀ CHE $\tilde{y}(x)$ È CONTINUA PER $x=b$, GRAZIE AL T. DI LAGRANGE, DA (4) E (5) SEGUE CHE:

$$\tilde{y}'(b) = \lim_{x\to b} \frac{\tilde{y}(x)-\tilde{y}(b)}{x-b} = \lim_{\xi\to b} \tilde{y}'(\xi) \overset{(4)\,(5)}{=} F(b,\bar{y})$$

QUESTO SIGNIFICA CHE $\tilde{y}'(x)$ È CONTINUA ANCHE PER $x=b$ E SODDISFA $y'=F(x,y)$.
CIÒ DIMOSTRA CHE $((a,b+\delta),\tilde{y}(x))$ È UN PROLUNGAMENTO DI $((a,b),y(x))$, CIOÈ CHE $((a,b),y(x))$ È PROLUNGABILE A DESTRA.
IN MODO DEL TUTTO ANALOGO SI DIMOSTRA CHE $((a,b),y(x))$ È PROLUNGABILE A SINISTRA.

ES. 4 DATO IL PROB. DI CAUCHY

(6) $$\begin{cases} y' = \dfrac{xy}{x^2+y^2} \\ y(1)=1 \end{cases}$$

a MOSTRARE CHE LA SUA SOLUZIONE $y(x)$ È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.

b CALCOLARE $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

c CALCOLARE $\lim_{x\to+\infty} y'(x)$.

d COSA SUCCEDE A $y(x)$ PER $x<1$?

SOLUZIONE

a INDICHIAMO CON (a,b) L'INTERVALLO MASSIMALE DI PROLUNGABILITÀ DI $y(x)$. SAPPIAMO PER IL **TEO.1** CHE TALE INTERVALLO ESISTE E CHE, OVVIAMENTE, $a<1<b$. DOBBIAMO MOSTRARE CHE $b=+\infty$.
PREMETTIAMO UN'OSSERVAZIONE CHE CI SARÀ UTILE ANCHE IN SEGUITO:

E CIOÈ CHE:

(7) $\forall m>0$, SE LA DISUGUAGLIANZA $y(x)<mx$ VALE PER UN CERTO $x_0\in[1,b)$ ALLORA VALE ANCHE PER OGNI x TALE CHE $x_0\leq x<b$.

INFATTI, SE COSÌ NON FOSSE, L'INSIEME:

$$A=\{x\in[1,b) \mid y(x)\geq mx\}$$

SAREBBE NON VUOTO, QUINDI, POSTO $\bar{x}=\inf(A)$ SI HA $\bar{x}<b$.
INOLTRE $\bar{x}>x_0$ PER IL T. DI PERMANENZA DEL SEGNO, PERCHÉ $y(x)-mx$ È CONTINUA E $y(x_0)<mx_0$. INOLTRE, SEMPRE GRAZIE ALLA CONTINUITÀ DI $y(x)$ E mx, POSSIAMO DIRE CHE:

$$y(\bar{x})\leq m\bar{x} \quad \left\{ \text{PERCHÉ } \forall x\in[x_0,\bar{x}) \text{ SI HA } y(x)<mx \right.$$

E CHE:

$$y(\bar{x})\geq m\bar{x} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{PERCHÉ, ESSENDO } \bar{x}=\inf(A) \text{ ESISTONO} \\ x\in(\bar{x},b) \text{ ARBITRARIAMENTE VICINI A } \bar{x}, \\ \text{NEI QUALI } y(x)\geq mx. \end{array} \right.$$

QUINDI SI OTTERREBBE CHE:

$$y(\bar{x})=m\bar{x} \quad \text{E} \quad y(x)<mx \quad \text{PER} \quad x_0\leq x<\bar{x}.$$

DI CONSEGUENZA $\forall x\in[x_0,\bar{x})$ SI HA:

$$\frac{y(\bar{x})-y(x)}{\bar{x}-x}=\frac{m\bar{x}-y(x)}{\bar{x}-x}>\frac{m\bar{x}-mx}{\bar{x}-x}=m$$

QUINDI:

(8) $$y'(\bar{x})=y'_-(x)=\lim_{x\to\bar{x}^-}\frac{y(x)-y(\bar{x})}{x-\bar{x}}\geq m$$

D'ALTRA PARTE, SICCOME $y(x)$ È SOLUZIONE DI (6), SI HA

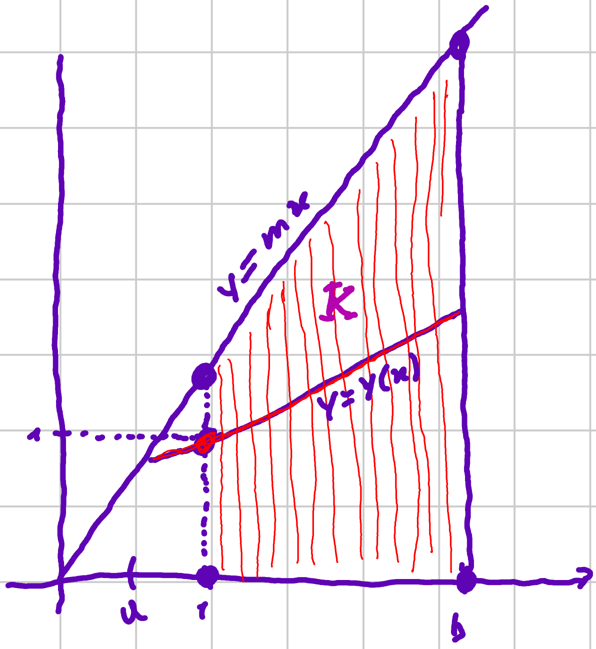
$$y'(\bar{x})=\frac{\bar{x}\,y(\bar{x})}{(\bar{x})^2+(y(\bar{x}))^2}=\frac{\bar{x}\cdot m\bar{x}}{\bar{x}^2+m^2\bar{x}^2}=\frac{m}{1+m^2}<m$$

CHE CONTRADDICE (8). QUINDI È ASSURDO SUPPORRE FALSA LA (7)

GRAZIE A (7) SIAMO ORA IN GRADO DI MOSTRARE CHE $b=+\infty$. SE INFATTI COSÌ NON FOSSE, PRENDIAMO $m>1$, IN MODO CHE $y(x)<mx$ VALGA PER $x=1$ E QUINDI, GRAZIE A (7), ANCHE PER $x>1$.

SIA $K=\{(x,y) \mid 1\leq x\leq b,\ 0\leq y\leq mx\}$

LA ZONA TRATTEGGIATA IN ROSSO NELLA FIGURA A FIANCO. K È COMPATTO



PERCHÉ È CHIUSO E LIMITATO E IL GRAFICO DI $y(x)$, PER $1\leq x<b$, È TUTTO CONTENUTO IN K, VISTO CHE NON PUÒ INTERSECARE NÉ $y=mx$ (A CAUSA DI (7)) NÉ $y=0$ (CHE È SOL. COSTANTE DELL'EQUAZIONE). MA ALLORA, GRAZIE AL $\boxed{\text{TEO. 2}}$, $y(x)$ PUÒ ESSERE PROLUNGATA A DESTRA, IN CONTRADDIZIONE COL FATTO CHE È MASSIMALE. QUINDI È ASSURDO SUPPORRE $b\neq+\infty$.

$\boxed{b}$ MOSTRIAMO CHE $\lim_{x\to+\infty} y(x)=+\infty$.

INTANTO, SICCOME $F(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ NEL I° QUADRANTE È POSITIVA, POICHÉ PER $x\geq1$ IL GRAFICO DI $y(x)$ STA NEL I° QUADRANTE, AVREMO CHE $\forall x\geq1$ $y'(x)>0$, QUINDI $y(x)$ È CRESCENTE, QUINDI $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ ESISTE.

SE PER ASSURDO FOSSE:

(9)
$$\lim_{x\to+\infty} y(x)=\ell<+\infty$$

ALLORA SI AVREBBE:

PERCHÉ $y(x)$ È CRESCENTE E $y(1)=1$ QUINDI PER $x\geq1$ SI HA $y(x)\geq y(1)=1$

PERCHÉ $y(x)\to\ell$ CRESCENDO E QUINDI $y(x)\leq\ell$

PERCHÉ PER $x\geq1$ $\frac{x^2}{x^2+\ell^2}$ È CRESCENTE

$$y'(x)=\frac{x\,y(x)}{x^2+(y(x))^2}\geq\frac{x\cdot1}{x^2+(y(x))^2}\geq\frac{x}{x^2+\ell^2}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{x^2+\ell^2}\geq\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\ell^2}$$

DA CUI SEGUIREBBE:

$$\int_1^x y'(t)\,dt\geq\int_1^t\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1+\ell^2}\,dt=\frac{1}{1+\ell^2}\ln x$$

CIOÈ

$$y(x)-y(1)\geq\frac{1}{1+\ell^2}\ln x$$

OVVERO

$$y(x) \geq 1 + \frac{1}{1+\ell^2} \cdot \ln x \to +\infty \quad \text{PER } x \to +\infty$$

CHE È IN CONTRADDIZIONE CON (9).

QUINDI È ASSURDO AVER SUPPOSTO CHE $\ell < +\infty$. QUINDI $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$.

$\boxed{C}$ MOSTRIAMO CHE $\lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0$.

(... CONTINUA NELLA PROSSIMA LEZIONE...)