24-05-2021(14:00-16:00) LEZ. 44

(… continua dalla Lezione 42 ...)

ES.1 (CONTINUAZIONE)

DATO IL P. DI CAUCHY $\begin{cases} y' = \dfrac{xy}{x^2+y^2} \\ y(1)=1 \end{cases}$ NELLA LEZ. 42 ABBIAMO GIÀ DIMOSTRATO CHE LA SUA SOL. $y(x)$ È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$ E CHE $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$.

RICORDIAMO INFINE CHE, COME PASSO INTERMEDIO, ABBIAMO DIMOSTRATO CHE $y(x)$ SODDISFA LA SEGUENTE PROPRIETÀ:

(1) $\forall m>0$ SE PER UN CERTO $x_0 \geq 1$ SI HA $y(x_0) < m x_0$ ALLORA SI HA $y(x) < mx$ PER OGNI $x \geq x_0$.

SIAMO ORA PRONTI PER IL PUNTO SUCCESSIVO:

C MOSTRIAMO CHE $\lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0$.

OSSERVIAMO CHE DA (1) SEGUE CHE

(2) $\dfrac{y(x)}{x}$ È DECRESCENTE SU $[1,+\infty)$

INFATTI, SE PER ASSURDO NON VALESSE (2), ESISTEREBBERO x_1 E x_2, CON $1 \leq x_1 < x_2$, TALI CHE

$$0 < \frac{y(x_1)}{x_1} < \frac{y(x_2)}{x_2}.$$

QUINDI PRESO $m>0$ TALE CHE

$$0 < \frac{y(x_1)}{x_1} < m < \frac{y(x_2)}{x_2}$$

SI OTTERREBBE CHE

$$y(x_1) < m x_1 \quad \text{E} \quad y(x_2) > m x_2$$

PUR ESSENDO $x_1 < x_2$, CONTRADDICENDO (1).

DA (2) E DAL FATTO CHE $y(x)>0$ SEGUE CHE

(3) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lambda \quad \text{CON } \lambda \geq 0 \text{ E FINITO.}$$

MA ALLORA:

$$\lim_{x\to+\infty} y'(x) = \lim_{x\to+\infty} F(x,y(x)) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\,y(x)}{x^2+(y(x))^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{y(x)}{x}}{1+\left(\frac{y(x)}{x}\right)^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

QUINDI:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{y'(x)}{1} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

CHE, COMBINATA CON (3), IMPLICA

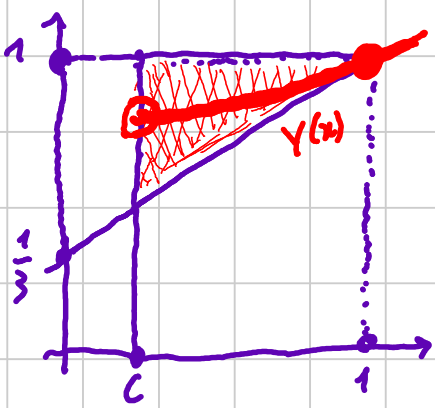
$$\lambda = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

DA CUI SEGUE $\lambda=0$ E QUINDI CHE $\lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0$.

$\boxed{d}$ MOSTRIAMO INTANTO CHE, ALL'INDIETRO, $y(x)$ È PROLUNGABILE ALMENO FINO A 0, CIOÈ CHE L'INTERVALLO MASSIMALE DI ESISTENZA $(c,+\infty)$ HA $c<0$. A TALE SCOPO OSSERVIAMO CHE SE $x>0$ E $y>0$ SI HA:

$$0 < \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$$

QUINDI, FINCHÉ IL GRAFICO DI $y(x)$ È INTERNO AL 1° QUADRANTE SI HA $0<y'(x)\leq\frac{1}{2}$. QUINDI, SE PER ASSURDO FOSSE $c\geq 0$ (VEDI FIGURA) IL GRAFICO DI $y(x)$ SAREBBE TUTTO CONTENUTO NEL COMPATTO SEGNATO IN ROSSO E QUINDI SAREBBE ANCORA PROLUNGABILE A SINISTRA.



A QUESTO PUNTO IL MODO PIÙ RAPIDO PER MOSTRARE CHE $y(x)$ È PROLUNGABILE FINO A $-\infty$ È DI MOSTRARE CHE PROLUNGANDOLA PER PARITÀ SI OTTIENE ANCORA UNA SOLUZIONE.

PIÙ PRECISAMENTE, DETTO $y_0 = y(0)$, SAPPIAMO CHE IL P. DI CAUCHY:

(4) $$\begin{cases} y' = \dfrac{xy}{x^2+y^2} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

HA SICURAMENTE $((c,+\infty), y(x))$ COME SOLUZIONE.

MOSTRIAMO CHE HA COME SOLUZIONE ANCHE $((-\infty,-c), v(x))$ DOVE $v(x) = y(-x)$. INFATTI $v(0) = y(-0) = y(0) = y_0$ E INOLTRE

$$v'(x) = (y(-x))' = -y'(-x) = -\frac{(-x)\, y(-x)}{(-x)^2 + (y(-x))^2} =$$

$$= \frac{x \cdot y(-x)}{x^2 + (y(-x))^2} = \frac{xv}{x^2+v^2}$$

QUINDI $((c,+\infty), y(x))$ E $((-\infty,-c), y(-x))$ SONO ENTRAMBE SOLUZIONI DI (4) CHE QUINDI HA COME SOLUZIONE MASSIMALE:

$$((-\infty,+\infty), \tilde{y}(x))$$

DOVE $\tilde{y}(x)$ È UNA FUNZIONE PARI CHE COINCIDE CON $y(x)$ PER $x \geq 0$.

DEF 1 DATI Ω E F COME AL SOLITO E $g:(a,b) \to \mathbb{R}$ DI CLASSE C^1 TALE CHE $\forall x \in (a,b)$ $(x, g(x)) \in \Omega$, DIREMO CHE $((a,b), g(x))$ È UNA SOPRASOLUZIONE DELL'EQUAZIONE $y' = F(x,y)$ SE:

(5) $$\forall x \in (a,b) \text{ SI HA } g'(x) \geq F(x, g(x))$$

DIREMO INOLTRE CHE È UNA SOPRASOLUZIONE STRETTA SE NELLA (5) LA DISUGUAGLIANZA È STRETTA. SI DICE INVECE SOTTOSOLUZIONE (STRETTA) SE NELLA (5) C'È IL "$\leq$" ("$<$").

$\boxed{\text{TEO.1}}$ (DELLA SOPRASOLUZIONE STRETTA)

SIANO Ω E F COME AL SOLITO E SIANO $((a,b), y(x))$ E $((a,b), g(x))$ RISPETTIVAMENTE UNA SOLUZIONE E UNA SOPRASOLUZIONE STRETTA DI $y' = F(x,y)$. SIA INOLTRE $x_0 \in (a,b)$. ALLORA VALGONO LE IMPLICAZIONI:

$\boxed{a}$ $y(x_0) < g(x_0) \Rightarrow y(x) < g(x) \quad \forall x \in (x_0, b)$

$\boxed{b}$ $y(x_0) > g(x_0) \Rightarrow y(x) > g(x) \quad \forall x \in (a, x_0)$

DIMO

DIMOSTRIAMO SOLO $\boxed{a}$ ($\boxed{b}$ È ANALOGA).

SE PER ASSURDO $\boxed{a}$ FOSSE FALSA ALLORA L'INSIEME

(6) $$A = \{ x \in (x_0, b) \mid y(x) \geq g(x) \}$$

SAREBBE NON VUOTO, QUINDI ESISTE $\bar{x} = \inf(A) \in [x_0, b)$.

IN REALTÀ È ANCHE $\bar{x} > x_0$ PERCHÈ $y(x)$ E $g(x)$ SONO CONTINUE E $y(x_0) < g(x_0)$ QUINDI C'È TUTTO UN INTORNO DESTRO DI x_0 IN CUI CONTINUA A VALERE $y(x) < g(x)$ E QUINDI NON CONTIENE PUNTI DI A.

MOSTRIAMO ORA CHE $y(\bar{x}) = g(\bar{x})$. INFATTI, ESSENDO $y(x)$ E $g(x)$ CONTINUE, SI HA:

$y(\bar{x}) \leq g(\bar{x})$ PERCHÈ $y(x) < g(x) \quad \forall x \in (x_0, \bar{x})$,

E:

$y(\bar{x}) \geq g(\bar{x})$ PERCHÈ, ESSENDO $\bar{x} = \inf(A)$, $y(x) \geq g(x)$ VALE PER PUNTI x ARBITRARIAMENTE VICINI A $\bar{x}$.

QUINDI SI HA $y(x) < g(x) \quad \forall x \in [x_0, \bar{x})$ E $y(\bar{x}) = g(\bar{x})$, QUINDI:

$$\frac{y(x) - y(\bar{x})}{x - \bar{x}} > \frac{g(x) - g(\bar{x})}{x - \bar{x}} \qquad \forall x \in [x_0, \bar{x})$$

QUINDI, PASSANDO AL LIMITE PER $x \to \bar{x}^-$, SI OTTIENE $y'(\bar{x}) \geq g'(\bar{x})$, CHE È ASSURDO PERCHE' $g(x)$ È UNA SOPRASOLUZIONE STRETTA E QUINDI:

$$g'(\bar{x}) > F(\bar{x}, g(\bar{x})) = F(\bar{x}, y(\bar{x})) = y'(\bar{x}).$$

TEO.2 (DELLA SOTTOSOLUZIONE STRETTA)

SIANO Ω E F COME AL SOLITO E SIANO $((a,b), y(x))$ E $((a,b), g(x))$ RISPETTIVAMENTE UNA SOLUZIONE E UNA SOTTOSOLUZIONE STRETTA DI $y' = F(x,y)$. SIA INOLTRE $x_0 \in (a,b)$. ALLORA VALGONO LE IMPLICAZIONI:

$\boxed{a}$ $y(x_0) > g(x_0) \Rightarrow y(x) > g(x) \quad \forall x \in (x_0, b)$

$\boxed{b}$ $y(x_0) < g(x_0) \Rightarrow y(x) < g(x) \quad \forall x \in (a, x_0)$

DIMO IDENTICA A QUELLA DEL $\boxed{\text{TEO. 1}}$

OSS. 1 $\boxed{\text{TEO. 1}}$ E $\boxed{\text{TEO. 2}}$ POSSONO ESSERE LEGGERMENTE MIGLIORATI.

AD ESEMPIO L'IMPLICAZIONE $\boxed{a}$ DI $\boxed{\text{TEO. 1}}$ VALE ANCHE SE L'IPOTESI "$y(x_0) < g(x_0)$" DIVENTA "$y(x_0) \le g(x_0)$". QUESTO PERCHÈ, ESSENDO $y'(x_0) < g'(x_0)$, ANCHE SE $y(x_0) = g(x_0)$ SI HA COMUNQUE $y(x) < g(x)$ ALMENO IN UN INTORNO DESTRO DI x_0, QUINDI NELLA DIMOSTRAZIONE SI RIESCE LO STESSO A MOSTRARE CHE L'INF. DELL'INSIEME (6) È STRETTAMENTE MAGGIORE DI x_0.

LA STESSA MODIFICA SI PUÒ FARE ANCHE IN $\boxed{b}$ E IN $\boxed{\text{TEO. 2}}$.

TEO. 3 (DEL CONFRONTO)

SIANO Ω, F E (x_0, y_0) COME AL SOLITO, $(x_0, \tilde{y}_0) \in \Omega$ E $G : \Omega \to \mathbb{R}$ CONTINUA E TALE CHE $G(x,y) > F(x,y)$ $\forall (x,y) \in \Omega$. CONSIDERIAMO I 2 PR. DI CAUCHY:

$$(7) \begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (8) \begin{cases} y' = G(x,y) \\ y(x_0) = \tilde{y}_0 \end{cases}$$

SIANO $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ DI CLASSE C^1 TALI CHE $((a,b), f(x))$ È SOLUZIONE DI (7) E $((a,b), g(x))$ È SOLUZIONE DI (8). ALLORA VALGONO LE IMPLICAZIONI:

$\boxed{a}$ $y_0 \le \tilde{y}_0 \Rightarrow f(x) < g(x) \quad \forall x \in (x_0, b)$

$\boxed{b}$ $y_0 \ge \tilde{y}_0 \Rightarrow f(x) > g(x) \quad \forall x \in (a, x_0)$

$\boxed{\text{DIMO}}$ BASTA OSSERVARE CHE $g(x)$ È UNA SOPRASOLUZIONE STRETTA DI $y' = F(x,y)$ IN QUANTO:

$$g'(x) = G(x, g(x)) > F(x, g(x)).$$

FATTO CIÒ BASTA APPLICARE IL $\boxed{\text{TEO.1}}$.

$\boxed{\text{ES.2}}$

DATO IL P. DI CAUCHY:
$$\begin{cases} y' = y^2 - x^2 \\ y(0) = \alpha > 0 \end{cases}$$

$\boxed{a}$ NEL CASO $\alpha = 2$ DIRE SE LA SOLUZ. È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.

$\boxed{b}$ COME $\boxed{a}$ MA CON $\alpha = \frac{1}{4}$.

$\boxed{c}$ COSA SUCCEDE PER TUTTI GLI ALTRI $\alpha > 0$?

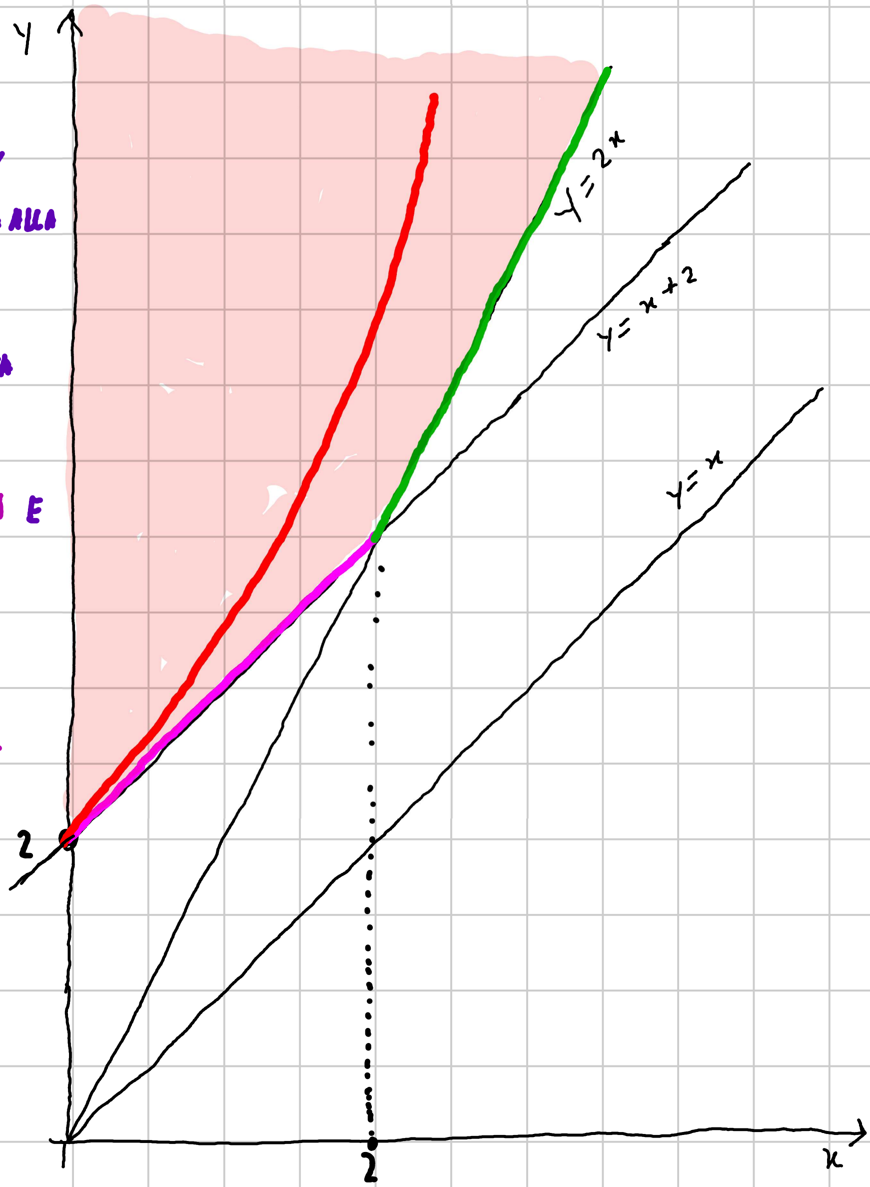
$\boxed{\text{SVOLGIMENTO}}$

$\boxed{a}$ LA SOLUZIONE $y(x)$ CON DATO INIZIALE $y(0) = 2$, PER $x > 0$, FINCHÉ ESISTE, È STRETTAMENTE SOPRA ALLA RETTA $y = 2 + x$ PERCHÉ QUESTA È UNA SOTTOSOLUZIONE STRETTA DI $y' = y^2 - x^2$ PER $x \geq 0$.

INFATTI, SE $x \geq 0$, SI HA $y' = (x+2)' = 1$ E $y^2 - x^2 = (x+2)^2 - x^2 = 4 + 4x > 1$.

MA ANCHE LA RETTA $y = 2x$ È SOTTOSOLUZIONE STRETTA PER $x \geq 2$ PERCHÉ $y' = (2x)' = 2$ MENTRE $y^2 - x^2 = (2x)^2 - x^2 = 3x^2 > 2$.

QUINDI, FINCHÉ ESISTE, $y(x)$ STA NELLA ZONA COLORATA DI ROSA.



OSSERVIAMO CHE NELLA ZONA ROSA, ANZI NELLA ZONA (PIÙ AMPIA) DATA DA:

$$\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 2|x|\}$$

VALE LA DISUGUAGLIANZA:

$$y^2 - x^2 = \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{4}(y^2 - 4x^2) > \frac{3}{4}y^2 \geq \frac{1}{2}y^2$$

QUINDI SE CONSIDERO SU Ω_1 I 2 P. DI CAUCHY:

$$(9) \begin{cases} y' = y^2 - x^2 \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad (10) \begin{cases} y' = \frac{1}{2}y^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

POSSO APPLICARE IL T. DEL CONFRONTO E DIRE CHE PER $x > 0$, FINCHÉ ESISTONO ENTRAMBE, QUELLA DI (9) STA SOPRA QUELLA DI (10). MA QUELLA DI (10) SI TROVA ESPLICITAMENTE PERCHÉ È A VARIABILI SEPARABILI:

$$\frac{y'(x)}{(y(x))^2} = \frac{1}{2} \iff \left(-\frac{1}{y(x)}\right)' = \left(\frac{1}{2}x\right)' \iff -\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{2}x + c \iff y(x) = \frac{1}{-c - \frac{x}{2}}$$

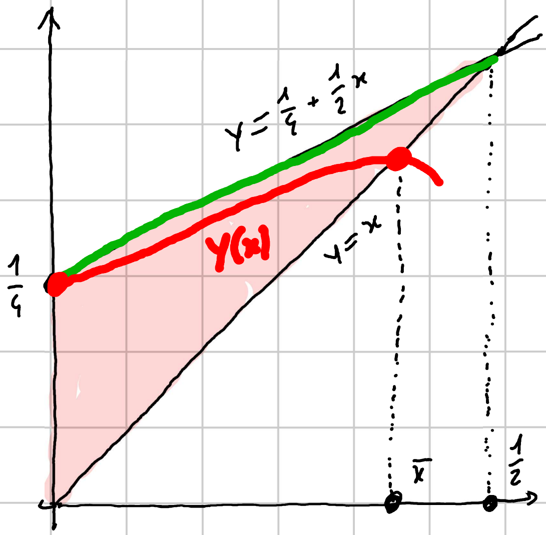
MA DOVENDO ESSERE $y(0) = 2$, SI OTTIENE:

$$y(x) = \frac{2}{1-x}.$$

CHE QUINDI È LA SOL. DI (10). SI NOTI CHE TENDE A $+\infty$ PER $x \to 1^-$, DI CONSEGUENZA ANCHE LA SOL. DI (9), CHE PER IL T. DEL CONFRONTO GLI STA SOPRA, DEVE AVERE UN ASINTOTO VERTICALE DEL TIPO $x = c$ CON $c \leq 1$.
QUINDI LA NOSTRA SOL. NON È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.

$\boxed{b}$ SIA $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ x \leq y \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x\}$

LA REGIONE EVIDENZIATA IN ROSA IN FIGURA.
LA LINEA VERDE È UNA SOPRASOLUZIONE STRETTA PER $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ PERCHÉ [... SOLITI CALCOLI ...], QUINDI LA SOL. $y(x)$ DEL NOSTRO P. DI CAUCHY, FINCHÉ ESISTE, DEVE STARE SOTTO.



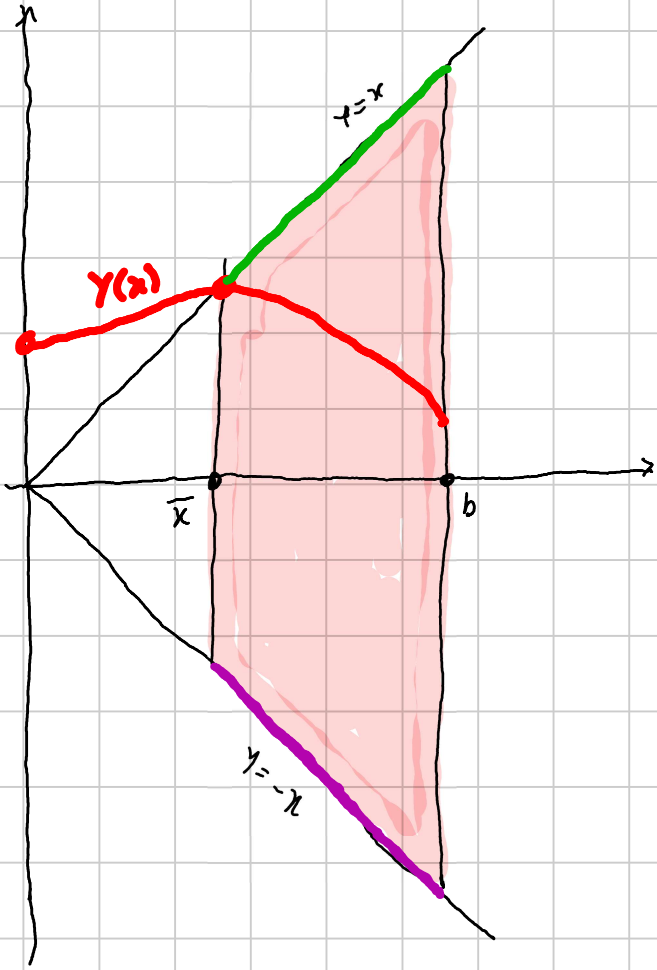
MA SICCOME È PROLUNGABILE FINO AD USCIRE DA K, DEVE NECESSARIAMENTE INTERSECARE LA RETTA $y=x$ PER $x=\bar{x}\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

SI NOTI CHE LA RETTA $y=x$ È UNA SOPRASOLUZIONE STRETTA PERCHÉ, SOSTITUITA IN $y'=y^2-x^2$, IL PRIMO MEMBRO VIENE 1 E IL SECONDO 0.

ANALOGAMENTE SI OTTIENE CHE $y=-x$ È UNA SOTTOSOLUZIONE STRETTA.

DI CONSEGUENZA, PER $x>\bar{x}$ $y(x)$ RIMANE SEMPRE COMPRESA TRA LE 2 RETTE.

SE QUINDI FOSSE PROLUNGABILE SOLO FINO A UN CERTO $b<+\infty$ SI AVREBBE UNA CONTRADDIZIONE PERCHÉ STAREBBE IN UN COMPATTO (LA ZONA ROSA) E QUINDI SAREBBE ULTERIORMENTE PROLUNGABILE.



QUINDI È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.

ANCHÉ SE NON È RICHIESTO DAL PROBLEMA LO STUDENTE PUÒ DIVERTIRSI (!!!) A DIMOSTRARE CHE, PER $x\to+\infty$, LA RETTA $y=-x$ È ASINTOTO OBLIQUO DI $y(x)$.

$\boxed{C}$ PRESO IL NOSTRO PROB. DI CAUCHY:

$$(11)\qquad \begin{cases} y'=y^2-x^2 \\ y(0)=\alpha \end{cases}$$

PER OGNI DATO INIZIALE $\alpha>0$ INDICHIAMO CON $y_\alpha(x)$ LA SOLUZIONE CHE SI OTTIENE.

CONSIDERIAMO I SEGUENTI INSIEMI DI DATI INIZIALI:

$B = \{\alpha > 0 \mid$ IL GRAFICO DI $y_\alpha(x)$ INTERSECA LA RETTA $y = x\}$

E

$C = \{\alpha > 0 \mid \exists b \in (0, +\infty)$ TALE CHE $\lim_{x \to b^-} y(x) = +\infty\}$

AD ESEMPIO $2 \in C$ E $\frac{1}{4} \in B$.

SI POSSONO DIMOSTRARE I SEGUENTI PASSI (DI CUI LASCIAMO I DETTAGLI ALLO STUDENTE, EVENTUALMENTE DA CHIEDERE AL RICEVIMENTO):

$\boxed{\text{I° PASSO}}$ GLI INSIEMI B E C SONO DELLA FORMA $B = (0, \alpha_1)$ E $C = (\alpha_2, +\infty)$. IN PARTICOLARE B NON HA MASSIMO E C NON HA MINIMO.

$\boxed{\text{II° PASSO}}$ SE $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ ALLORA $y_\alpha(x)$ È ASINTOTICA A $y = x$

$\boxed{\text{III° PASSO}}$ SI HA $\alpha_1 = \alpha_2$, CIOÈ C'È UN SOLO DATO INIZIALE CHE NON STA NÉ IN B NÉ IN C.