Lezioni 22-23

Numeri complessi

DEF.0 (INFORMALE)

$\mathbb{C}$ È L'INSIEME DEGLI OGGETTI DEL TIPO $a+bi$, DOVE $a,b\in\mathbb{R}$ E i È UN SIMBOLO. TALI OGGETTI SI SOMMANO E MOLTIPLICANO COME SE FOSSERO POLINOMI NELLA VARIABILE i, CON LA REGOLA AGGIUNTIVA CHE LE POTENZE DI i CON ESPONENTE MAGGIORE DI 1 SI RIDUCONO USANDO LA REGOLA $i^2=-1$.

ESEMPIO 0 ECCO QUALCHE ESEMPIO DI CALCOLO

- $(3+5i)+(7-3i)=10+2i$
- $(4+i)+(5-i)=9+0i=9$
- $(1+i)\cdot(2-3i)=2+2i-3i-3i^2=2-i-3\cdot(-1)=5-i$
- $(\sqrt{3}+i)^3=(\sqrt{3})^3+3\cdot(\sqrt{3})^2\cdot i+3\cdot\sqrt{3}\cdot(i)^2+i^3=$

$$=3\sqrt{3}+9i+3\sqrt{3}(i)^2+(i)^3=3\sqrt{3}+9i-3\sqrt{3}-i=0+8i=8i$$

OSS.0 È FACILE DIMOSTRARE CHE $\mathbb{C}$ È UN CAMPO, DOVE L'ELEMENTO NEUTRO DELL'ADDIZIONE È $0+0i$, CIOÈ 0, MENTRE QUELLO DELLA MOLTIPLICAZIONE È $1+0i$, CIOÈ 1. AD ESEMPIO MOSTRIAMO CHE OGNI $a+bi\neq 0+0i$ HA INVERSO MOLTIPLICATIVO. BASTA INFATTI PRENDERE $\alpha+\beta i$, CON $\alpha=\frac{a}{a^2+b^2}$ E $\beta=\frac{-b}{a^2+b^2}$ E SI OTTIENE

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)=(a+bi)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i\right)=\frac{a^2}{a^2+b^2}-\cancel{\frac{ab}{a^2+b^2}}i+\cancel{\frac{ab}{a^2+b^2}}i-\frac{b^2}{a^2+b^2}(i)^2=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$$

OSS. 1

PER CHI HA GIÀ SEGUITO UN CORSO DI ALGEBRA, LA $\boxed{\text{DEF. 0}}$ PUÒ ESSERE RESA FORMALE PRENDENDO $\mathbb{R}[x]$, CIOÈ L'ANELLO DEI POLINOMI IN UNA VARIABILE, E QUOZIENTANDOLO RISPETTO ALL'IDEALE GENERATO DA x^2+1. IN TAL MODO IL NUMERO COMPLESSO $a+bi$ CORRISPONDE ALLA CLASSE CONTENENTE IL POLINOMIO $a+bx$. TUTTAVIA, CHI NON AVESSE SEGUITO UN CORSO DI ALGEBRA, PUÒ COMUNQUE DARE UNA DEF. FORMALE NEL MODO CHE SEGUE.

DEF. 1

I NUMERI COMPLESSI SONO UNA TERNA $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, DOVE $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ E $+$ E $\cdot$ SONO OPERAZIONI SU $\mathbb{C}$ DEFINITE DA:

(1) $$(a,b)+(\alpha,\beta) = (a+\alpha,\, b+\beta)$$

(2) $$(a,b)\cdot(\alpha,\beta) = (a\alpha - b\beta,\, a\beta + b\alpha)$$

OSS. 2

ANCHE CON QUESTA DEFINIZIONE È SEMPLICE VERIFICARE CHE $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ È UN CAMPO. INOLTRE, SICCOME PER $b=\beta=0$ (1) E (2) DIVENTANO:

$$(a,0)+(\alpha,0) = (a+\alpha,\, 0)$$

$$(a,0)\cdot(\alpha,0) = (a\alpha - 0\cdot 0,\, a\cdot 0 + 0\cdot\alpha) = (a\cdot\alpha,\, 0)$$

SI OTTIENE BANALMENTE CHE L'INSIEME $\{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ È UN SOTTOCAMPO DI $\mathbb{C}$ ISOMORFO A $\mathbb{R}$.

OSS. 3

LA CORRISPONDENZA BIUNIVOCA $a+bi \longleftrightarrow (a,b)$ TRA GLI OGGETTI DEFINITI IN $\boxed{\text{DEF 0}}$ E $\boxed{\text{DEF 1}}$ È CHIARAMENTE UN ISOMORFISMO; PER LA MOLTIPLICAZIONE SI HA:

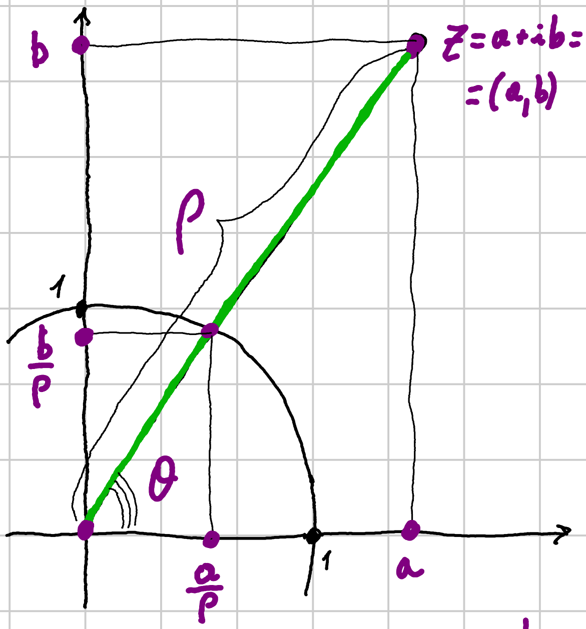
$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i) = a\alpha + \alpha b i + a\beta i + b\beta i^2 = (a\alpha - b\beta) + (a\beta + \alpha b)i$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \updownarrow$$

$$(a,b)\cdot(\alpha,\beta) = \dots\dots\dots = (a\alpha - b\beta,\, a\beta + \alpha b)$$

E LO STESSO VALE PER L'ADDIZIONE. QUINDI ANCHE SE COME DEFINIZIONE FORMALE ADOTTEREMO $\boxed{\text{DEF. 1}}$, PER FARE I CALCOLI USEREMO LA NOTAZIONE DI $\boxed{\text{DEF. 0}}$

DEF. 2 (NOTAZIONI)



DATO IL NUMERO COMPLESSO $z = a + ib$, CHE POSSIAMO SEMPRE IDENTIFICARE COL PUNTO (a, b) SUL PIANO CARTESIANO, INTRODUCIAMO LE NOTAZIONI:

$a = \mathrm{Re}(z) =$ PARTE REALE DI z

$b = \mathrm{Im}(z) =$ PARTE IMMAGINARIA DI z

$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2} =$ MODULO DI z

$\arg(z) =$ ARGOMENTO DI z =

$=$ UNICO ANGOLO θ, CON $0 \leq \theta < 2\pi$, TALE CHE $\cos\theta = \frac{a}{\rho}$ E $\sin\theta = \frac{b}{\rho}$

$\bar{z} = a - bi =$ CONIUGATO DI z.

ESEMPIO 1

SE $z = 2 - 2i$ ALLORA:

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{7}{4}\pi$$

$$z = 2 - 2i = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$$

$$\bar{z} = 2 + 2i$$

PROPOSIZIONE 1

DATI $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ ALLORA $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ E $\arg(z_1 \cdot z) - \arg(z_1) + \arg(z_2)$ È UN MULTIPLO DI 2π

DIMO

SIANO $\theta_1 = \arg(z_1)$, $\theta_2 = \arg(z_2)$, $\rho_1 = |z_1|$ E $\rho_2 = |z_2|$.

ALLORA

$$z_1 = a_1 + b_1 i = \rho_1 \cos\theta_1 + \rho_1 \sin\theta_1 \cdot i$$
$$z_2 = a_2 + b_2 i = \rho_2 \cos\theta_2 + \rho_2 \sin\theta_2 \cdot i$$

QUINDI:

$$z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 \cos\theta_1 + \rho_1 \sin\theta_1 \cdot i)(\rho_2 \cos\theta_2 + \rho_2 \sin\theta_2 \cdot i) =$$
$$= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2 \cdot i + \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \cdot i + \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 \, i^2) =$$
$$= \rho_1 \cdot \rho_2 \left((\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + (\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \cos\theta_2 \sin\theta_1) i \right) =$$
$$= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 + \theta_2) \, i)$$

QUINDI IL PRODOTTO HA MODULO $\rho_1 \cdot \rho_2$ E ARGOMENTO $\theta_1 + \theta_2$

OSS. 4

IL SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLA PROPOSIZIONE 1 PERMETTE DI DETERMINARE FACILMENTE POTENZE E RADICI DI UN NUMERO COMPLESSO

DEF. 3

DATI $w_0, z_0 \in \mathbb{C}$ E DATO $n \in \mathbb{N}$, CON $n \geq 2$, DIREMO CHE w_0 È RADICE n-ESIMA DI z_0 SE $(w_0)^n = z_0$

ESEMPIO 2

TROVARE TUTTE LE RADICI QUARTE DI $z_0 = -8 + 8\sqrt{3} \cdot i$

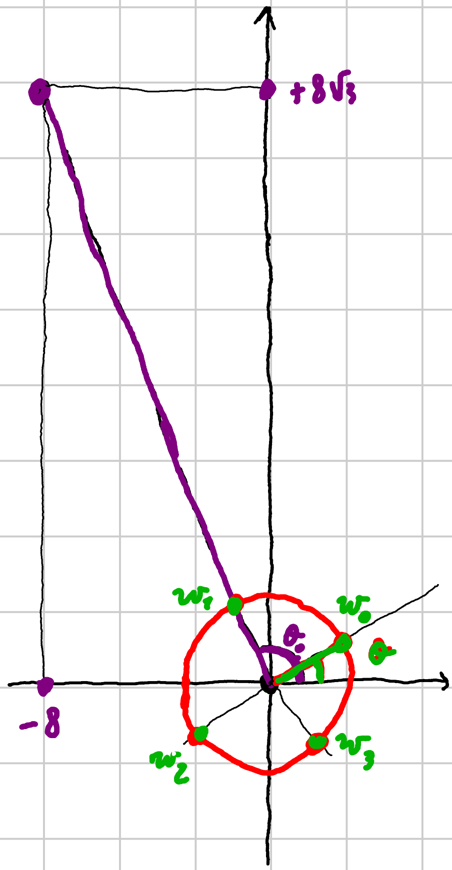
SI HA

$$|z_0| = \sqrt{8^2 + 8^2 \cdot 3} = 8 \cdot \sqrt{1+3} = 16$$

DETTO $\theta_0 = \arg(z_0)$ DEVE ESSERE:

$$\cos\theta_0 = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2} \qquad \sin\theta_0 = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

QUINDI $\theta_0 = \frac{2}{3}\pi$. DI CONSEGUENZA OGNI SUA RADICE QUARTA w DEVE AVERE $|w| = \sqrt[4]{16} = 2$ E DETTO $\theta = \arg(w)$ DEVE ESSERE $4\theta = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ CIOÈ $\theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$.



SI OTTENGONO QUINDI PER θ I SEGUENTI 4 VALORI COMPRESI TRA 0 E 2π:

$$\theta=\frac{\pi}{6} \qquad \theta=\frac{2}{3}\pi \qquad \theta=\frac{7}{6}\pi \qquad \theta=\frac{5}{3}\pi$$

QUINDI LE CORRISPONDENTI 4 RADICI QUARTE SONO:

$$w_0=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}+i$$

$$w_1=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1+\sqrt{3}\,i$$

$$w_2=2\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-\sqrt{3}-i$$

$$w_3=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1-\sqrt{3}\,i$$

OPERANDO NEL CASO GENERALE ESATTAMENTE COME IN QUESTO ESEMPIO SI OTTIENE:

PROPOSIZIONE 2

SIA $n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$ E SIA $z_0\in\mathbb{C}-\{0\}$, ALLORA DETTI $\rho=\sqrt[n]{|z_0|}$ E $\theta=\frac{1}{n}\arg(z_0)$, CI SONO ESATTAMENTE n RADICI n-ESIME DI z_0 E SONO DATE DALLA FORMULA:

$$w_k=\rho(\cos\theta_k+\sin\theta_k\cdot i) \qquad k=0,\dots,n-1$$

DOVE PER OGNI $k=0,\dots,n-1$ SI HA $\theta_k=\theta+k\cdot\frac{2\pi}{n}$.

DEF 4

DATO $z=a+ib$ DEFINIAMO $e^z=e^a\cdot(\cos b+i\sin b)$.

OSS. 5

CON TALE NOTAZIONE VALE LA REGOLA $e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$.

INFATTI, PRESI $z_1 = a + bi$ E $z_2 = \alpha + \beta i$, SI HA:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{a}(\cos b + i \sin b) \cdot e^{\alpha}(\cos\beta + i \sin\beta) =$$

$$= e^{a+\alpha}(\cos b \cos\beta + i \sin b \cos\beta + i \sin\beta \cos b + i^2 \sin b \sin\beta) =$$

$$= e^{a+\alpha}((\cos b \cos\beta - \sin b \sin\beta) + (\sin b \cos\beta + \cos b \sin\beta) i) =$$

$$= e^{a+\alpha}(\cos(b+\beta) - i \sin(b+\beta)) =$$

$$= e^{(a+\alpha)+(b+\beta)i} = e^{z_1 + z_2}$$

$\boxed{\text{OSS. 6}}$

E' UTILE VISUALIZZARE L'APPLICAZIONE $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$z \mapsto e^{z}$