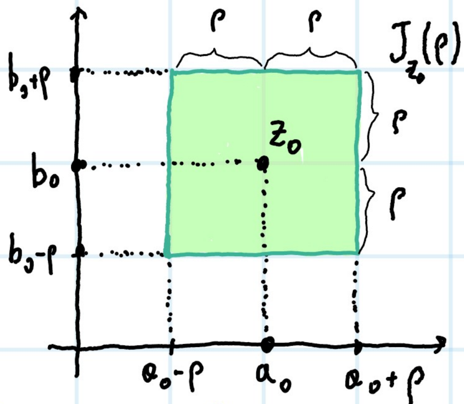
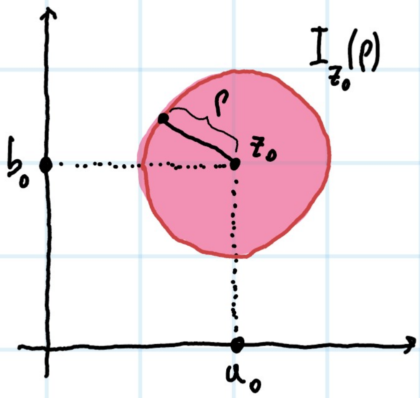
Lezione 24

Successioni e serie di numeri complessi





DEF. 1 DATI $z_0 = a_0 + b_0 i \in \mathbb{C}$

E $\rho > 0$ DEFINIAMO:

$$I_{z_0}(\rho) = \{ z = a + bi \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \rho \}$$

E

$$J_{z_0}(\rho) = \{ z = a + bi \in \mathbb{C} \mid |a - a_0| < \rho \text{ E } |b - b_0| < \rho \}$$

CHIAMEREMO $I_{z_0}(\rho)$ INTORNO SFERICO DI z_0 DI RAGGIO ρ (ZONA COLORATA IN ROSA IN FIGURA)

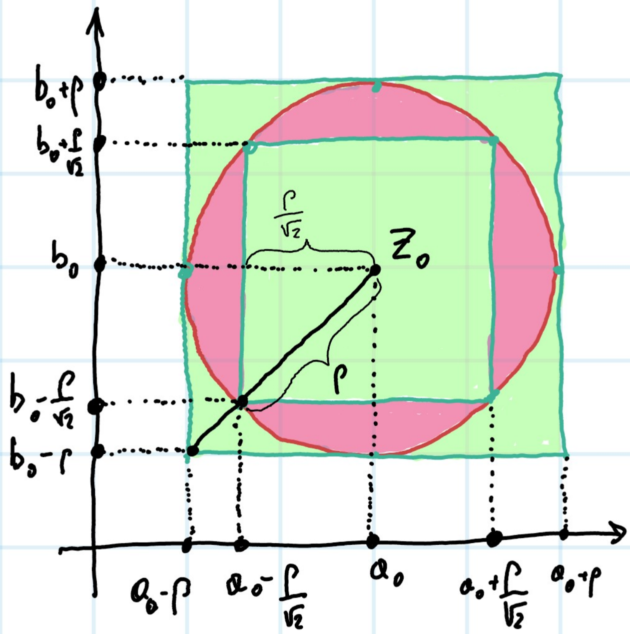
E $J_{z_0}(\rho)$ INTORNO QUADRATO DI z_0 DI AMPIEZZA ρ (ZONA COLORATA IN VERDE IN FIGURA)

OSS. 1 CON SEMPLICI CALCOLI (VEDI FIGURA)

SI TROVA CHE

$$J_{z_0}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) \subset I_{z_0}(\rho) \subset J_{z_0}(\rho)$$

PER OGNI $\rho > 0$ E PER OGNI $z_0 \in \mathbb{C}$.



IN PARTICOLARE, FISSATO $z_0 \in \mathbb{C}$, SI NOTI CHE, COMUNQUE SI PRENDA UN SUO INTORNO DI UNO DEI DUE TIPI, È SEMPRE POSSIBILE TROVARE UN INTORNO DELL'ALTRO TIPO IN ESSO CONTENUTO.

VEDREMO CHE, GRAZIE A QUESTO, LA TOPOLOGIA SU $\mathbb{C}$ DA ESSI INDOTTA È LA STESSA.

OSS. 2 UNA VOLTA STABILITO CHI SONO GLI INTORNI DI UN PUNTO, SIAMO IN GRADO DI DEFINIRE I CONCETTI DI INTERNO, ESTERNO, FRONTIERA, ECC. ESATTAMENTE COME SI ERA GIÀ FATTO SU $\mathbb{R}$. AD ESEMPIO, DATI $A \subset \mathbb{C}$ E $z \in \mathbb{C}$, DIRE CHE z È INTERNO AD A SIGNIFICA DIRE CHE ESISTE $\rho > 0$ TALE CHE $I_z(\rho) \subset A$. LASCIAMO ALLO STUDENTE IL COMPITO DI DEFINIRE IL RESTO DEI CONCETTI. SI NOTI CHE, GRAZIE ALL'OSS.1, USARE $I_z(\rho)$ O $J_z(\rho)$ PORTA SEMPRE AGLI STESSI RISULATI.

DEF. 2 DATA UNA SUCCESSIONE (z_n) A VALORI IN $\mathbb{C}$ E DATO $\tilde{z} \in \mathbb{C}$, DIREMO CHE $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = \tilde{z}$, O EQUIVALENTEMENTE CHE $z_n \to z$ PER $n \to +\infty$, SE SUCCEDE CHE:

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ DEFINITIVAMENTE IN } n \text{ SI HA } |z_n - \tilde{z}| < \varepsilon.$$

PROPOSIZIONE 1 DATA LA SUCCESSIONE $(z_n) = (a_n + b_n i)$ A VALORI IN $\mathbb{C}$ E DATO $\tilde{z} = \tilde{a} + \tilde{b} i \in \mathbb{C}$, È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE

(1) $z_n \to \tilde{z}$ PER $n \to +\infty$.

(2) $a_n \to \tilde{a}$ E $b_n \to \tilde{b}$ PER $n \to +\infty$.

DIMO BASTA OSSERVARE CHE:

$$(1) \iff \forall \varepsilon > 0, \text{ DEFINITIVAMENTE IN } n, \ z_n \in I_{\tilde{z}}(\varepsilon)$$

E CHE:

(2) $\iff \forall \varepsilon > 0$, DEFINITIVAMENTE IN n, $z_n \in J_{\tilde{z}}(\varepsilon)$

QUINDI LA LORO EQUIVALENZA È CONSEGUENZA IMMEDIATA DELL' $\boxed{\text{OSS. 1}}$.

OSS. 3 LA $\boxed{\text{PROPOSIZIONE 1}}$ PERMETTE DI DIMOSTRARE "QUASI GRATIS" PER PER LE SUCCESSIONI A VALORI IN $\mathbb{C}$ LA MAGGIOR PARTE DEI TEOREMI GIÀ DIMOSTRATI PER LE SUCCESSIONI IN $\mathbb{R}$. LA VERIFICA VIENE LASCIATA ALLO STUDENTE. QUI CI LIMITIAMO, COME ESEMPIO, A DIMOSTRARE IL SEGUENTE:

TEO. 1 DATE LE SUCCESSIONI $(z_n) = (a_n + b_n i)$ E $(s_n) = (\alpha_n + \beta_n i)$, A VALORI IN $\mathbb{C}$, TALI CHE $z_n \to z = a + bi \in \mathbb{C}$ E $s_n \to s = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$.

ALLORA $z_n \cdot s_n \longrightarrow z \cdot s$.

DIMO GRAZIE ALLA $\boxed{\text{PROPOSIZIONE 1}}$, DA $z_n \to z$ E $s_n \to s$ SEGUE CHE:

(1) $a_n \to a, \quad b_n \to b, \quad \alpha_n \to \alpha, \quad \beta_n \to \beta$.

MA ALLORA, SICCOME:

$$z_n \cdot s_n = (a_n + b_n i) \cdot (\alpha_n + \beta_n i) = (a_n \alpha_n - b_n \beta_n) + (a_n \beta_n + \alpha_n b_n) i,$$

E INOLTRE, GRAZIE A **(1)**, SI HA

$$a_n \alpha_n - b_n \beta_n \to a\alpha - b\beta \quad \text{E} \quad a_n \beta_n + \alpha_n b_n \to a\beta + \alpha b,$$

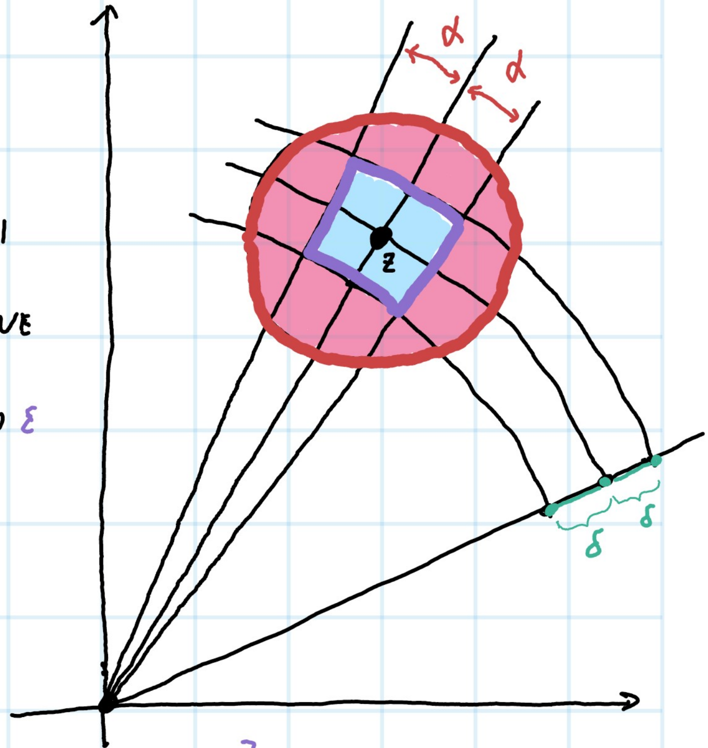
POSSIAMO DI NUOVO INVOCARE LA $\boxed{\text{PROPOSIZIONE 1}}$ E OTTENERE CHE:

$$z_n \cdot s_n \longrightarrow (a\alpha - b\beta) + (a\beta + \alpha b) i = z \cdot s.$$

OSS. 4 TALVOLTA, SE SI DEVE MOSTRARE CHE $\tilde{z}_n \to \tilde{z}$ E $z \neq 0$, PUÒ SUCCEDERE CHE IL MODO PIÙ COMODO DI FARLO SIA VERIFICARE SEPARATAMENTE CHE:

(1) $|\tilde{z}_n| \to |\tilde{z}|$

(2) $\arg(\tilde{z}_n) \to \arg(\tilde{z})$



IL FATTO CHE DA (1) E (2) SEGUA CHE $z_n \to \tilde{z}$, SI VERIFICA FACILMENTE MOSTRANDO CHE, COMUNQUE SI PRENDA UN INTORNO SFERICO DI $\tilde{z}$ DI RAGGIO ε (CIOÈ IL CERCHIO ROSA IN FIGURA) È SEMPRE POSSIBILE TROVARE $\alpha, \delta > 0$ TALI CHE, DETTI $\tilde{\rho} = |\tilde{z}|$ E $\tilde{\theta} = \arg(\tilde{z})$, L'INSIEME

$$W_{\tilde{z}}(\alpha, \beta) = \left\{ z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\rho - \tilde{\rho}| < \delta \text{ E } |\theta - \tilde{\theta}| < \alpha \right\},$$

CHE IN FIGURA È AZZURRO, È TUTTO CONTENUTO IN $I_{\tilde{z}}(\varepsilon)$. INFATTI, SE SI PRENDE $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ E $\alpha = \frac{\varepsilon}{4\tilde{\rho}}$, SI OTTIENE:

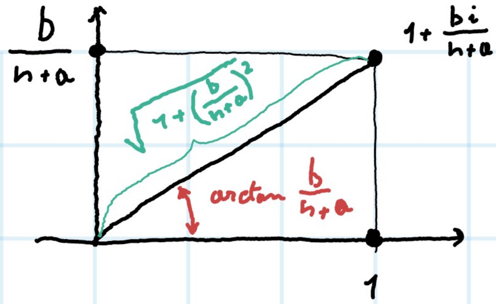
$$|z - \tilde{z}| = |\rho(\cos\theta + i\sin\theta) - \tilde{\rho}(\cos\tilde{\theta} + i\sin\tilde{\theta})| =$$

$$= \left| (\rho - \tilde{\rho})(\cos\theta + i\sin\theta) + \tilde{\rho}\left((\cos\theta - \cos\tilde{\theta}) + i(\sin\theta - \sin\tilde{\theta})\right) \right| \leq$$

$$\leq |\rho - \tilde{\rho}| \cdot |\cos(\theta) + i\sin\theta| + \tilde{\rho}\left(|\cos\theta - \cos\tilde{\theta}| + |\sin\theta - \sin\tilde{\theta}| \right) \leq$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 + \tilde{\rho} \cdot \left(|\theta - \tilde{\theta}| + |\theta - \tilde{\theta}| \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \tilde{\rho} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{4\tilde{\rho}} + \frac{\varepsilon}{4\tilde{\rho}} \right) = \varepsilon$$

ESEMPIO 1 MOSTRARE CHE $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{a+bi}{n}\right)^n = e^{a+bi}$



SOL. SI HA:

$$\left(1+\frac{a+bi}{n}\right)^n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{1+\frac{a}{n}+\frac{bi}{n}}{1+\frac{a}{n}}\right)^n =$$

(2)
$$= \left(1+\frac{a}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{\frac{bi}{n}}{1+\frac{a}{n}}\right)^n =$$

$$= \left(1+\frac{a}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{bi}{n+a}\right)^n$$

OSSERVIAMO PERÒ (VEDI FIGURA) CHE:

$$\rho_n = \left|\left(1+\frac{bi}{n+a}\right)^n\right| = \left|1+\frac{bi}{n+a}\right|^n = \left(\sqrt{1+\frac{b^2}{(n+a)^2}}\right)^n = \left(1+\frac{b^2}{(n+a)^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\left(1+\frac{b^2}{(n+a)^2}\right)^{(n+a)^2}\right)^{\frac{n}{2(n+a)^2}} \longrightarrow \left(e^{b^2}\right)^0 = 1$$

$$\theta_n = \arg\left(\left(1+\frac{bi}{n+a}\right)^n\right) = n \arg\left(1+\frac{bi}{n+a}\right) = n \cdot \arctan\frac{b}{n+a} \to b$$

DI CONSEGUENZA

$$\left(1+\frac{b}{n+a}\right)^n \to z \qquad \text{CON} \quad |z|=1 \quad \text{E} \quad \arg(z)=b$$

CIOÈ $z=e^{ib}$, QUINDI LA (2) DIVENTA:

$$\left(1+\frac{a+bi}{n}\right)^n = \dots = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{b}{n+a}\right)^n \to e^a \cdot e^{bi} = e^{a+bi}$$