

Lezione 25

Successioni e serie di numeri complessi (II)

ES. 1

MOSTRARE CHE

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z^n = \begin{cases} 0 & \text{SE } |z| < 1 \\ 1 & \text{SE } z = 1 \\ \text{NON ESISTE} & \text{IN OGNI ALTRO CASO} \end{cases} \quad (1)$$

SOLUZIONE

SE $|z| < 1$ ALLORA $|z|^n \rightarrow 0$. DI CONSEGUENZA ANCHE $|z^n - 0| \rightarrow 0$,
PERCHÉ $|z^n - 0| = |z^n| = |z|^n \rightarrow 0$. CIÒ SIGNIFICA CHE $z^n \rightarrow 0$.

SE INVECE $|z| > 1$ SI HA $|z|^n \rightarrow +\infty$. QUINDI z^n NON PUÒ AVERE LIMITE FINITO, PERCHÉ SE FOSSE $z^n \rightarrow \tilde{z}$ DOVREBBE ESSERE ANCHE $|z|^n = |z^n| \rightarrow |\tilde{z}| \in \mathbb{R}$, IN CONTRADDIZIONE COL FATTO CHE $|z|^n \rightarrow +\infty$.

RESTA DA STUDIARE IL CASO $|z| = 1$.

IN TAL CASO, SE $z = 1$ ALLORA, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ SI HA $z^n = 1$ E QUINDI $z^n \rightarrow 1$.

SE INVECE $|z| = 1$ MA $z \neq 1$, SI HA:

$$|z^{n+1} - z^n| = |z^n \cdot (z - 1)| = |z|^n \cdot |z - 1| = 1^n \cdot |z - 1| = |z - 1|$$

QUINDI

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |z^{n+1} - z^n| = |z - 1| \neq 0$$

E DI CONSEGUENZA NON PUÒ ESISTERE $z_0 \in \mathbb{C}$ TALE CHE $z^n \rightarrow z_0$ PERCHÉ

ALTRIMENTI SI AVREBBE ANCHE $z^{n+1} \rightarrow z_0$ E QUINDI SI OTTERREBBE $|z^{n+1} - z^n| \rightarrow 0$

IN CONTRASTO CON LA (2).

QUESTO COMPLETA LA VERIFICA CHE VALE (1).

ES. 2

MOSTRARE CHE

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z^n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{SE } |z| \leq 1 \\ \text{NON ESISTE} & \text{SE } |z| > 1 \end{cases}$$

SOLUZIONE

SE $|z| \leq 1$ SI HA $\left| \frac{z^n}{n} \right| = \frac{|z|^n}{n} \leq \frac{1}{n}$, DA CUI SEGUE CHE $\left| \frac{z^n}{n} \right| \rightarrow 0$ E QUINDI ANCHE CHE $\frac{z^n}{n} \rightarrow 0$.

SE INVECE $|z| > 1$, ALLORA $\left| \frac{z^n}{n} \right| \geq \frac{|z|^n}{n} \rightarrow +\infty$, QUINDI $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z^n}{n}$ NON ESISTE.

ES. 3

MOSTRARE CHE $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z^{n+1}}{z^n - 1} = \begin{cases} 1 & |z| > 1 \\ -1 & |z| < 1 \end{cases}$

PROBLEMA PER CASA: RIFLETTERE SU COSA SUCCEDEREBBE SE $|z|=1$. IN PARTICOLARE, DESCRIVERE L'INSIEME DEGLI $|z|=1$ TALI CHE LA SUCCESSIONE È DEFINITA PER OGNI $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

SOLUZIONE

SE $|z| < 1$ SI HA $z^n \rightarrow 0$ E QUINDI:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z^{n+1}}{z^n - 1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

SE INVECE $|z| > 1$ SI HA:

PERCHÉ $\left| \frac{1}{z} \right| < 1$ E QUINDI $\left(\frac{1}{z} \right)^n \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z^{n+1}}{z^n - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{z^{n+1}}}{1 - \frac{1}{z^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \left(\frac{1}{z} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{z} \right)^{n+1}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

DEF. 1

DATA LA SUCCESSIONE (z_n) A VALORI IN $\mathbb{C}$ DIREMO CHE $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ CONVERGE AL VALORE $\lambda \in \mathbb{C}$ SE $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lambda$ DOVE $S_n = \sum_{k=0}^n z_k$.

ES. 4

MOSTRARE CHE $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \begin{cases} \text{CONVERGE A } \frac{1}{1-z} & \text{SE } |z| < 1. \\ \text{NON CONVERGE} & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$

SOLUZIONE

SE $|z| > 1$ LA SERIE NON PUÒ CONVERGERE PERCHÉ IL TERMINE NON È INFINITESIMO. SE INVECE $|z| < 1$ SI HA:

$$S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} - \frac{z}{1 - z} \cdot z^n \rightarrow \frac{1}{1 - z} - \frac{z}{1 - z} \cdot 0 = \frac{1}{1 - z}$$

Oss.1 PER LE SERIE A TERMINI COMPLESSI VALGONO (CIRCA) GLI STESSI RISULTATI GIÀ DIMOSTRATI PER LE SERIE REALI. NON STAREMO A DIMOSTRARLI SUBITO TUTTI, MA SOLO OCCASIONALMENTE QUANDO CI SERVONO. UNO STRUMENTO UTILE PER FARLO È IL SEGUENTE (OVVIO) LEMMA:

LEMMA 1 DATE (a_n) E (b_n) SUCCESSIONI A VALORI IN $\mathbb{R}$.

PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ SIA $z_n = a_n + b_n i \in \mathbb{C}$. ALLORA

$$(3) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z_n \text{ CONVERGE A } z = a + bi \right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ CONVERGE AD } a \text{ E } \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ CONVERGE A } b \right)$$

DIMO SIANO (S_n) , (γ_n) E (β_n) LE SUCCESSIONI DELLE SOMME FINITE DI $\sum z_n$, $\sum a_n$ E $\sum b_n$ RISPETTIVAMENTE. SI HA:

$$\begin{aligned} S_n &= z_0 + z_1 + \dots + z_n = (a_0 + b_0 i) + (a_1 + b_1 i) + \dots + (a_n + b_n i) = \\ &= (a_0 + a_1 + \dots + a_n) + (b_0 + b_1 + \dots + b_n) i = \gamma_n + \beta_n i \end{aligned}$$

DI CONSEGUENZA:

$$(S_n \rightarrow z = a + bi) \Leftrightarrow (\gamma_n \rightarrow a \text{ E } \beta_n \rightarrow b)$$

CHE EQUIVALE AD Affermare (3).

TEO. 1 (CR. CONV. ASSOLUTA) DATA LA SUCCESSIONE (z_n) A VALORI IN $\mathbb{C}$,
SE $\sum |z_n|$ CONVERGE ALLORA ANCHE $\sum z_n$ CONVERGE.

DIMO SICCOME $|z_n|^2 = a_n^2 + b_n^2$, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ SI HA:

$$0 \leq |a_n| \leq |z_n| \quad \text{E} \quad 0 \leq |b_n| \leq |z_n|$$

DI CONSEGUENZA, GRAZIE AL CR. DEL CONFRONTO, DALLA CONVERGENZA DI $\sum |z_n|$
SEGUE QUELLI DI $\sum |a_n|$ E $\sum |b_n|$. MA SICCOME PER LE SERIE A TERMINI IN $\mathbb{R}$
SAPPIAMO GIÀ CHE IL CRITERIO DELLA CONV. ASSOLUTA VALE, POSSIAMO CONCLUDERE
CHE ANCHE $\sum a_n$ E $\sum b_n$ CONVERGONO E QUINDI, PER IL **LEMMA 1**, CONVERGE
ANCHE $\sum z_n$.

ES. 5 PER QUALI VALORI DI $z \in \mathbb{C}$ CONVERGE LA SERIE $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^3} z^n$? (4)

SOLUZIONE PER PRIMA COSA VEDIAMO PER QUALI $z \in \mathbb{C}$ CONVERGE LA SERIE
DEI MODULI, CIOÈ:

(5)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^3} z^n \right|$$

ALLA QUALE, ESSENDO A TERMINI POSITIVI, POSSIAMO APPLICARE IL
CRITERIO DELLA RADICE. SI HA:

$$\sqrt[n]{\left| \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^3} \cdot z^n \right|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \cdot |z| \longrightarrow e \cdot |z|$$

DI CONSEGUENZA (5) È SICURAMENTE CONVERGENTE SE $e \cdot |z| < 1$, CIOÈ SE $|z| < \frac{1}{e}$.

QUINDI, GRAZIE AL CR. DELLA CONV. ASSOLUTA, SE $|z| < \frac{1}{e}$ ANCHE LA (4).

INVECE IL FATTO CHE LA (5) DIVERGA PER $|z| > \frac{1}{e}$ NON CI DÀ ALCUNA INFORMAZIONE SUL COMPORTAMENTO DI (4). PER MOSTRARE CHE (4) NON CONVERGE FACCIO INVECE

VEDERE CHE IL SUO TERMINE NON È INFINITESIMO, MOSTRANDO ANZI CHE IL SUO MODULO TENDE A $+\infty$. INFATTI SE $|z| > \frac{1}{e}$, PRENDIAMO $\lambda \in \mathbb{R}$ TALE CHE $|z| > \lambda > \frac{1}{e}$, E ABBIAMO:

$$\left| \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^3} \cdot z^n \right| = \underbrace{\left(\frac{|z|}{\lambda} \right)^n}_{\substack{\text{PERCHÉ } |z| > \lambda \\ \downarrow \\ +\infty}} \cdot \underbrace{\left(\lambda \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} \right)^n}_{\substack{\downarrow \\ \lambda e}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (+\infty) \cdot \underbrace{(\lambda e)^{+\infty}}_{\substack{\text{PERCHÉ } \lambda > \frac{1}{e} \\ \downarrow \\ +\infty}} = +\infty$$

QUINDI $\frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^3} \cdot z^n$ NON È INFINITESIMO, PERCIÒ (4) NON PUÒ CONVERGERE.

RIMANE ORA DA STUDIARE COSA SUCCEDER QUANDO $|z| = \frac{1}{e}$, CIOÈ $z = e^{-1+ib}$.

NEL CASO PARTICOLARE $b=0$, CIOÈ $z = \frac{1}{e}$, LA SERIE È A TERMINI POSITIVI E SI HA:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^3} \cdot \left(\frac{1}{e} \right)^n &= \frac{1}{n} e^{n^3 \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) - n} = \frac{1}{n} \cdot e^{n^3 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right) \right) - n} = \\ &= \frac{1}{n} e^{-\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{1}{n} \left(1 + \left(-\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

QUINDI, SICCOME $\sum \frac{1}{n}$ DIVERGE, ANCHE LA NOSTRA SERIE DIVERGE PER IL CR. CONF. ASINT.

INFINE NEL CASO GENERALE, CIOÈ CON $z = \frac{e^{ib}}{e}$, LA (4) DIVENTA $\sum a_n$ CON

$$a_n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^3} \cdot \left(\frac{1}{e} \right)^n (e^{ib})^n = \dots = \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) e^{-in} = \frac{1}{n} e^{-in} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

MA SICCOME $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE, LA (4) HA LO STESSO CARATTERE DI:

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-in}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\cos(n)}{n} + \frac{\sin(n)}{n} i \right)$$

A QUESTO PUNTO, SICCOME SAPPIAMO GIÀ CHE

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(bn)}{n} \quad \text{E} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(bn)}{n}$$

CONVERGONO PER IL CR. DI ABEL, POSSIAMO APPLICARE IL **LEMMA 1** E CONCLUDERE CHE ANCHE (6) CONVERGE.

QUINDI CONVERGE ANCHE (4).

RIASSUMENDO, LA (4) CONVERGE

PER OGNI z TALE CHE $|z| \leq 1$, ESCLUSO $z=1$, CIOÈ PER GLI z CHE APPARTENGONO

ALLA ZONA COLORATA DI VERDE NELLA FIGURA.

