Analisi Matematica 2 - CdL Matematica - docente: Callegari - (9 maggio 2022)

Lezione 26

Successioni e serie di numeri complessi (III)

TEO. 1 DATA LA SUCCESSIONE (a_n) A VALORI IN $\mathbb{C}$, PONIAMO

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

CON CIÒ INTENDIAMO ANCHE CHE $\rho = 0$ SE $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ E CHE $\rho = +\infty$ SE $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$

ALLORA PER OGNI FISSATO $z \in \mathbb{C}$ LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

(a) CONVERGE SE $|z| < \rho$

(b) NON CONVERGE SE $|z| > \rho$.

DIMO COMINCIAMO DA **(a)**. USEREMO IL CRITERIO DELLA RADICE PER MOSTRARE CHE $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n|$ CONVERGE, DOPODICHÉ LA TESI SEGUIRÀ GRAZIE AL CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA. COMINCIAMO DAL CASO $0 < \rho < +\infty$.

SI NOTI CHE PER OGNI $\varepsilon > 0$ SI HA

VALE DEFINITIVAMENTE IN n PERCHÉ $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho}$

$$(1) \qquad \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}{\frac{1}{|z|}} \cdot \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\frac{1}{\rho}+\varepsilon} < \frac{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}{\frac{1}{|z|}} \cdot 1 = \frac{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}{\frac{1}{|z|}}$$

MA POICHÉ $|z| < \rho$, CIOÈ $\frac{1}{\rho} < \frac{1}{|z|}$, SI PUÒ SEMPRE SCEGLIERE $\varepsilon > 0$ TALE CHE $\frac{1}{\rho} < \frac{1}{\rho} + \varepsilon < \frac{1}{|z|}$. IN TAL MODO LA COSTANTE $\frac{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}{\frac{1}{|z|}}$ CHE COMPARE IN FONDO A **(1)** È STRETTAMENTE MINORE DI 1.

CIÒ SIGNIFICA CHE NELLA **(1)** C'È SCRITTO CHE $\sqrt[n]{|a_n z^n|}$ È DEFINITIVAMENTE MINORE DI UNA COSTANTE MINORE DI 1. QUINDI $\sum |a_n z^n|$ CONVERGE GRAZIE AL CRITERIO DELLA RADICE. DI CONSEGUENZA CONVERGE ANCHE $\sum a_n z^n$ GRAZIE AL CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA. QUESTO COMPLETA IL CASO $0<\rho<+\infty$.

NEL CASO $\rho=0$ INVECE NON C'È NIENTE DA DIMOSTRARE, MENTRE NEL CASO $\rho=+\infty$ DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ CONVERGE PER OGNI $z\in\mathbb{C}$. MA QUESTO È IMMEDIATO PERCHÉ $\rho=+\infty$ SIGNIFICA $\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0$, CIOÈ $\sqrt[n]{|a_n|}\to 0$, QUINDI, QUALSIASI SIA $z\in\mathbb{C}$, SI HA:

$$\sqrt[n]{|a_n\cdot z^n|}=|z|\cdot\sqrt[n]{|a_n|}\to 0<1$$

DA CUI SEGUE CHE $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n z^n|$ CONVERGE PER IL CRITERIO DELLA RADICE E QUINDI $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ CONVERGE PER IL CRITERIO DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA.

QUESTO COMPLETA LA DIMOSTRAZIONE DI **(a)**.

PASSIAMO A **(b)** E COMINCIAMO DAL CASO $0<\rho<+\infty$.

SICCOME $|z|>\rho$ SI OTTIENE CHE $\frac{1}{|z|}<\frac{1}{\rho}=\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ E QUINDI $\frac{1}{|z|}$ NON È UN MAGGIORANTE DEFINITIVO DI $\sqrt[n]{|a_n|}$. QUINDI FREQUENTEMENTE IN n SI HA $\sqrt[n]{|a_n|}>\frac{1}{|z|}$, DA CUI SEGUE CHE:

FREQUENTEMENTE IN n

$$\textbf{(2)}\qquad \sqrt[n]{|a_n\cdot z^n|}=|z|\cdot\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\frac{1}{|z|}}>1$$

DALLA **(2)**, ELEVANDO TUTTO ALLA n, SI OTTIENE CHE:

$$|a_n z^n| > 1^n = 1 \quad \text{FREQUENTEMENTE IN } n.$$

NE SEGUE CHE $a_n z^n$ NON È INFINITESIMA E QUINDI $\sum a_n z^n$ NON CONVERGE. QUESTO COMPLETA IL CASO $0 < \rho < +\infty$.

OVVIAMENTE SE $\rho = +\infty$ NON C'È NIENTE DA DIMOSTRARE, MENTRE INVECE SE $\rho = 0$ SI HA $\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, CIOÈ $\sqrt[n]{|a_n|}$ NON HA MAGGIORANTI DEFINITIVI E DI CONSEGUENZA, PER OGNI $z \neq 0$, SI OTTIENE

(3) $$\sqrt[n]{|a_n \cdot z^n|} = \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\frac{1}{|z|}} > 1 \quad \text{FREQUENTEMENTE IN } n$$

PERCHÉ $\frac{1}{|z|}$ NON È UN MAGGIORANTE DEFINITIVO.

DALLA **(3)**, ELEVANDO TUTTO ALLA n, SI OTTIENE CHE, FREQUENTEMENTE IN n, ANCHE $|a_n \cdot z^n| > 1$. DI CONSEGUENZA $a_n z^n \not\to 0$ E QUINDI $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ NON PUÒ ESSERE CONVERGENTE.

$\boxed{\text{ES. 1}}$ STUDIARE, AL VARIARE DI $z \in \mathbb{C}$, LA CONVERGENZA DELLA SERIE:

(4) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{2 + \cos \pi n}{(n-1)!} \right)^{n!} \cdot z^n$$

NEL NOSTRO CASO:

$$a_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2+\cos \pi n}{(n-1)!}\right)^{n!}$$

QUINDI PER n PARI, CIOÈ PER $n=2k$, SI HA $\cos(2k\pi)=1$, QUINDI

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[2k]{\frac{1}{2k}\cdot\left(1-\frac{3}{(2k-1)!}\right)^{(2k)!}} = \frac{1}{\sqrt[2k]{2k}}\cdot\left(1-\frac{3}{(2k-1)!}\right)^{(2k-1)!} \longrightarrow e^{-3}$$

INVECE, PER n DISPARI, CIOÈ PER $n=2k+1$, SI HA $\cos((2k+1)\pi)=-1$ QUINDI

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[2k+1]{\frac{1}{2k+1}\cdot\left(1-\frac{1}{(2k)!}\right)^{(2k+1)!}} = \frac{1}{\sqrt[2k+1]{2k+1}}\left(1-\frac{1}{(2k)!}\right)^{(2k)!} \longrightarrow e^{-1}$$

QUINDI IL RAGGIO DI CONVERGENZA ρ È DATO DA:

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = e^{-1}$$

CIOÈ $\rho = e$.

QUESTO SIGNIFICA CHE, GRAZIE AL $\boxed{\text{TEO. 1}}$, LA SERIE (4) CONVERGE SE $|z|<e$ MENTRE DIVERGE SE $|z|>e$. SE INVECE $|z|=e$ IL $\boxed{\text{TEO. 1}}$ NON SI APPLICA E BISOGNA STUDIARE IL COMPORTAMENTO "A MANO". PRENDIAMO DUNQUE $z=e\cdot e^{bi}$ CON $0\le b<2\pi$ E CERCHIAMO PER QUALI VALORI DI b CONVERGE. COMINCIAMO CON $b=0$, OVVERO CON $z=e$. LA SERIE DIVENTA:

(5)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(1-\frac{2+\cos(\pi n)}{(n-1)!}\right)^{n!}\cdot e^n$$

CHE È A TERMINI POSITIVI.

SE INDICHIAMO CON A_n IL SUO TERMINE GENERICO, PER n DISPARI, CIOÈ PER $n=2k+1$, SI HA:

$$A_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}\cdot\left(1-\frac{1}{(2k)!}\right)^{(2k+1)!}\cdot e^{2k+1} = \frac{1}{2k+1}\, e^{(2k+1)!\ln\left(1-\frac{1}{(2k)!}\right)+(2k+1)} =$$

(6)

$$= \frac{1}{2k+1}\cdot e^{(2k+1)!\left(-\frac{1}{(2k)!}-\frac{1}{2\cdot((2k)!)^2}+o\left(\left(\frac{1}{(2k)!}\right)^3\right)\right)+2k+1} =$$

$$= \frac{1}{2k+1}\cdot e^{-\cancel{(2k+1)}-\frac{(2k+1)}{2\cdot(2k)!}+o\left(\frac{2k+1}{((2k)!)^2}\right)+\cancel{(2k+1)}} =$$

$$= \frac{1}{2k+1}\cdot e^{o\left(\frac{1}{k}\right)} = \frac{1}{2k+1}\left(1+o\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \frac{1}{2k+1}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

INVECE PER n PARI, CIOÈ PER $n=2k$, SI HA:

(7)

$$A_{2k} = \frac{1}{2k}\left(1-\frac{3}{(2k-1)!}\right)^{(2k)!}\cdot e^{2k} =$$

$$= \frac{1}{2k}\left(\left(1-\frac{3}{(2k-1)!}\right)^{(2k-1)!}\cdot e\right)^{2k} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2k}\cdot\left(\frac{1}{e^2}\cdot e\right)^{2k} = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{e}\right)^{2k}$$

$\boxed{\text{VALE DEFINITIVAMENTE IN } n}$

PERCHÉ $\left(1-\frac{3}{(2k-1)!}\right)^{(2k-1)!} \to \frac{1}{e^3}$ E

QUINDI È DEFINITIVAMENTE

MINORE DI $\frac{1}{e}$

SI RICORDI CHE STUDIARE LA CONVERGENZA DI (5) SIGNIFICA STABILIRE SE ESISTE FINITO $\lim_{n\to+\infty} S_n$ DOVE $S_n = (A_1+A_2+\dots+A_n)$. CHIARAMENTE, VISTO CHE $A_n \to 0$, BASTA STABILIRE SE ESISTE FINITO $\lim_{n\to+\infty} S_{2k}$, PERCHÉ

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2k+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(S_{2k}+A_{2k+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} S_{2k}$$

ORA, PER COMODITÀ, IMMAGINIAMO DI SOMMARE SEPARATAMENTE TERMINI PARI E DISPARI, CIOÈ PONIAMO $D_k = A_1+A_3+\dots+A_{2k-1}$ E $P_k = A_2+A_4+\dots+A_{2k}$, COSICCHÉ:

$$\lim_{k\to+\infty} S_{2k} = \lim_{k\to+\infty} (D_k + P_k).$$

SI NOTI CHE STABILIRE SE ESISTONO FINITI $\lim_{k\to+\infty} D_k$ E $\lim_{k\to+\infty} P_k$, EQUIVALE A STUDIARE IL CARATTERE DI $\sum_{k=1}^{+\infty} A_{2k-1}$ E $\sum_{k=1}^{+\infty} A_{2k}$, RISPETTIVAMENTE. INOLTRE, GRAZIE A **(7)**, SI HA CHE $|A_{2k}| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{2k}$, QUINDI $\sum_{k=1}^{+\infty} A_{2k}$ CONVERGE, CIOÈ $\lim_{k\to+\infty} P_k$ ESISTE FINITO.

QUESTO SIGNIFICA CHE IL CARATTERE DI **(5)** COINCIDE CON QUELLO DI $\sum_{k=1}^{+\infty} A_{2k-1}$.

MA GRAZIE A **(6)**, SICCOME $\sum_{n=1}^{+\infty} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ CONVERGE, IL CARATTERE DI $\sum_{k=1}^{+\infty} A_{2k-1}$ È LO STESSO DI $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1}$, CHE NON CONVERGE. QUINDI **(5)** NON CONVERGE.

INFINE TRATTIAMO IL CASO $z = e \cdot e^{bi}$ CON $b \in (0, 2\pi)$. LA SERIE DA STUDIARE QUINDI È:

(8)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2+\cos(\pi n)}{(n-1)!}\right)^{n!} \cdot e^n \cdot \left(\cos(bn) + i \sin(bn)\right)$$

SI NOTI CHE SE, FISSATO b, INDICHIAMO CON B_n IL TERMINE n-ESIMO DI **(8)**, E CONTINUIAMO AD INDICARE CON A_n IL TERMINE n-ESIMO DI **(5)**, SI HA:

$$B_n = A_n \cdot \left(\cos(nb) + i \sin(nb)\right)$$

DI CONSEGUENZA $|B_n| = |A_n|$ E QUINDI, RAGIONANDO COME PER LA **(5)**, SI TROVA CHE $\sum_{k=1}^{+\infty} B_{2k}$ CONVERGE E QUINDI IL CARATTERE DI **(8)** COINCIDE CON QUELLO DI $\sum_{k=1}^{+\infty} B_{2k-1}$, CHE, GRAZIE A **(6)**, SI PUÒ SCRIVERE:

(9)
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k-1} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \cdot \left(\cos(bk) + i \sin(bk)\right)$$

A QUESTO PUNTO, OSSERVIAMO CHE:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sigma\left(\frac{1}{k^2}\right) \cdot \left(\cos(bk) + i\sin(bk)\right)$$

CONVERGE GRAZIE AL CRITERIO DELLA CONV. ASSOLUTA, PERCHÉ:

$$\left| \sigma\left(\frac{1}{k^2}\right) \cdot \left(\cos(bk) + i\sin(bk)\right) \right| = \left| \sigma\left(\frac{1}{k^2}\right) \right| = \sigma\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

DI CONSEGUENZA IL CARATTERE DI **(9)** È UGUALE A QUELLO DI

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1} \left(\cos(bk) + i\sin(bk)\right)$$

CIOÈ DI:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\cos(bk)}{2k-1} + \frac{\sin(bk)}{2k-1} \cdot i \right)$$

CHE CONVERGE PERCHÉ, GRAZIE AL CRITERIO DI ABEL, SAPPIAMO GIÀ CHE SONO CONVERGENTI LE DUE SERIE REALI:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(bk)}{2k-1} \quad \text{E} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(bk)}{2k-1}$$

QUINDI **(8)** CONVERGE PER OGNI $b \in (0, 2\pi)$.

DUNQUE RIASSUMENDO LA NOSTRA SERIE **(4)** CONVERGE SE E SOLO SE $z \in \Omega$ DOVE:

$$\Omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq e \text{ MA CON } z \neq e \}$$

TEO. 2

PER OGNI $z \in \mathbb{C}$ LA SERIE $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ CONVERGE AL VALORE e^z.

DIMO

ABBIAMO GIÀ DIMOSTRATO CHE QUESTO È VERO NEL CASO REALE E ABBIAMO OSSERVATO CHE IN MODO DEL TUTTO ANALOGO SI RIESCE A DIMOSTRARE CHE $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ E $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

CONVERGONO A $\cos x$ E $\sin x$, RISPETTIVAMENTE, PER OGNI $x \in \mathbb{R}$.

INOLTRE, IL FATTO CHE $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ CONVERGA PER OGNI $z \in \mathbb{C}$ SEGUE SUBITO DAL $\boxed{\text{TEO. 1}}$

PERCHÉ IL SUO RAGGIO DI CONVERGENZA ρ È $+\infty$ PERCHÉ:

$$\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

MOSTRIAMO ORA CHE LA TESI VALE SE $z = yi$. SI HA:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \dots + \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \dots + \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} \right) + \left((iy) + \frac{(iy)^3}{3!} + \dots + \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \right) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{y^k}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \cos y + i \sin y = e^{iy}$$

SE ORA MOSTRIAMO CHE PER OGNI $z, s \in \mathbb{C}$ VALE L'IDENTITÀ

(10) $$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+s)^n}{n!}$$

ALLORA POTREMO CONCLUDERE PERCHÉ UTILIZZANDOLA CON $z = x$ E $s = iy$ SI OTTIENE

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+iy)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \right) = e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy}$$

QUINDI DIMOSTRIAMO (10):

(... CONTINUA NELLA LEZ. 27...)