# Lezione 27

## Serie sui complessi (IV) - Topologia di R^n

(... CONTINUA DALLA LEZ.26)

DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE $\forall z, s \in \mathbb{C}$ SI HA:

(1)
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+s)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n}{n!}\right)$$

CIOÈ CHE

(2)
$$\lim_{n \to +\infty} \overbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(z+s)^k}{k!}}^{A_n} = \lim_{n \to +\infty} \overbrace{\left(\left(\sum_{p=0}^{n} \frac{z^p}{p!}\right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{n} \frac{s^q}{q!}\right)\right)}^{B_n}$$

SI NOTI CHE:

$$A_n = \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{z^p}{p!}\right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{n} \frac{s^q}{q!}\right) = \sum_{\substack{p=0,\dots,n \\ q=0,\dots,n}} \frac{z^p \cdot s^q}{p! \cdot q!} = \sum_{k=0}^{2n} \left( \sum_{\substack{p+q=k \\ p \le n \\ q \le n}} \frac{z^p \cdot s^q}{p! \cdot q!} \right) =$$

SI NOTI CHE $\boxed{\text{QUESTA}}$ CONDIZIONE È SUPERFLUA QUANDO $k \le n$ QUINDI

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{p+q=k} \frac{z^p \cdot s^q}{p! \cdot q!} + \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{\substack{p+q=k \\ p \le n \\ q \le n}} \frac{z^p \cdot s^q}{p! \cdot q!}$$

E CHE:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(z+s)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \left( \frac{1}{k!} \cdot \sum_{p+q=k} \frac{k!}{p!\,q!} \cdot z^p \cdot s^q \right) = \sum_{k=0}^{n} \left( \sum_{p+q=k} \frac{z^p \cdot z^q}{p! \cdot q!} \right)$$

IN PARTICOLARE SI HA:

$$A_n = B_n + \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{\substack{p+q=k \\ p\le n \\ q \le n}} \frac{z^p \cdot s^q}{p! \cdot q!}$$

PERCHÉ SAPPIAMO CHE $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(|z|+|s|)^n}{n!}$ CONVERGE E QUINDI

DETTA $(S_n)$ LA SUCCESSIONE DELLE SUE SOMME FINITE SI HA:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(|z|+|s|)^k}{k!} = S_{2n} - S_n \to 0$$

QUINDI

$$|A_n - B_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{\substack{p+q=k \\ p\le n \\ q \le n}} \frac{z^p \cdot s^q}{p! \cdot q!} \right| \le \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{\substack{p+q=k \\ p\le n \\ q \le n}} \frac{|z|^p \cdot |s|^q}{p! \cdot q!} \le \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{p+q=k} \frac{|z|^p \cdot |s|^q}{p! \cdot q!} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} \left( \frac{1}{k!} \sum_{p+q=k} \frac{k!}{p! \cdot q!} \cdot |z|^p \cdot |s|^q \right) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(|z|+|s|)^k}{k!} \xrightarrow{\text{PER } n\to\infty} 0$$

QUESTO DIMOSTRA $\boxed{2}$ E QUINDI ANCHE (1).

---

# SPAZI METRICI

$\boxed{\text{DEF. 1}}$ UNO SPAZIO METRICO È UNA COPPIA $(X, d)$, DOVE $X$ È UN INSIEME E $d: X \times X \to \mathbb{R}$ È UNA FUNZIONE TALE CHE:

1) $\forall x,y \in X \quad d(x,y) \ge 0$ CON L'UGUAGLIANZA CHE VALE SE E SOLO SE $a=b$
2) $\forall x,y \in X \quad d(x,y) = d(y,x)$
3) $\forall x,y,z \in X \quad d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ (DISUG. TRIANGOLARE)

QUANDO QUESTO ACCADE SI DICE ANCHE CHE $d$ È UNA DISTANZA SU $X$.

# ESEMPI

$\boxed{1}$ $X=\mathbb{R}$ E $d(x,y)=|x-y|$

$\boxed{2}$ $X=\mathbb{C}$ E $d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$

$\boxed{3}$ $X=\mathbb{R}^2$ E $d((a,b),(\alpha,\beta))=|a-\alpha|+|b-\beta|$

$\boxed{4}$ $X=C([0,1])$ E $d(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx$

IN TUTTI I 4 ESEMPI, LE DIMOSTRAZIONI CHE $d$ HA LE PROPRIETÀ DELLA $\boxed{\text{DEF. 1}}$ SONO SEMPLICISSIME, NE RIPORTIAMO SOLO ALCUNE.

$\boxed{\text{ES. } \boxed{3} \text{ (DISUG. TRIANGOLARE)}}$ COMUNQUE PRESI $(a,b)$, $(\alpha,\beta)$ E $(p,q)$ IN $\mathbb{R}^2$ SI HA:

$$
\begin{aligned}
d((a,b),(p,q)) &= |a-p|+|b-q| = \\
&= |a-\alpha+\alpha-p|+|b-\beta+\beta-q| \leq \\
&\leq |a-\alpha|+|\alpha-p|+|b-\beta|+|\beta-q| = \\
&= \big(|a-\alpha|+|b-\beta|\big)+\big(|\alpha-p|+|\beta-q|\big) = d((a,b),(\alpha,\beta))+d((\alpha,\beta),(p,q))
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{ES. } \boxed{4} \text{ (PROPRIETÀ (1))}}$ DATE $f,g\in C([0,1])$, PER LE PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE SI HA

$$d(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx \geq 0$$

MOSTRIAMO CHE SE $f$ E $g$ NON SONO LA STESSA FUNZIONE ALLORA LA DISUGUAGLIANZA È STRETTA.

INFATTI, SE $f$ E $g$ NON SONO LA STESSA FUNZIONE, ALLORA ESISTE $x_0\in[0,1]$ TALE CHE $|f(x_0)-g(x_0)|=\delta>0$ E, DI CONSEGUENZA, APPLICANDO IL T. DELLA PERMANENZA DEL SEGNO A $|f(x)-g(x)|$, CHE È CONTINUA, SI OTTIENE CHE ESISTE

TUTTO UN INTERVALLO $[a,b]$ CONTENENTE $x_0$ E TALE $|f(x)-g(x)| \geq \frac{1}{2}\delta$. DI CONSEGUENZA

$$d(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx \geq \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx \geq \int_a^b \frac{1}{2}\delta = \frac{\delta(b-a)}{2}>0$$

**DEF. 2** DATO UNO SPAZIO METRICO $(X,d)$ E DATI $x_0 \in X$ E $\rho>0$, DEFINIAMO INTORNO DI $x_0$ DI RAGGIO $\rho$ L'INSIEME

$$I_{x_0}(\rho)=\{x \in X \mid d(x,x_0)<\rho\}$$

**OSS. 1** UNA VOLTA DEFINITO IL CONCETTO DI INTORNO, SI DEFINISCONO IN MODO FORMALMENTE IDENTICO A QUANTO GIÀ FATTO IN ANALISI 1 PER $\mathbb{R}$, I CONCETTI DI:

PUNTO INTERNO, ESTERNO, DI FRONTIERA, DI ACCUMULAZIONE, ISOLATO, INSIEME APERTO, CHIUSO, DENSO, DISCRETO,

**DEF. 3** SIA $(X,d)$ UNO SPAZIO METRICO, E SIANO $(x_n)$ UNA SUCCESSIONE A VALORI IN $X$ E $\bar{x} \in X$. DIREMO CHE $x_n \to \bar{x}$ PER $n \to +\infty$ SE:

$\forall \varepsilon>0$ DEFINITIVAMENTE IN $n$ SI HA $x_n \in I_{\bar{x}}(\varepsilon)$

**TEO. 1**

SIA $(X,d)$ UNO SPAZIO METRICO E SIA $C \subset X$. ALLORA È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

1) $C$ È CHIUSO
2) $\partial C \subset C$
3) $DC \subset C$
4) $((x_n) \subset C$ E $x_n \to \bar{x}) \Rightarrow \bar{x} \in C$