A.M. 2 (A.A. 2022/2023) - LEZ. 27 (26/05/2023)

DETTAGLI DELLA LEZIONE NON CONTENUTI NELLE DISPENSE DELLE EQUADIFF.

OSS. 1 IL TEO. 2 DELLA LEZ. 44 DELL' A.A. 20/21, OVVERO QUELLO CHE STABILISCE CHE, NELLE IPOTESI STANDARD, UNA SOLUZIONE $((a,b), y(x))$ DI $y' = F(x,y)$ IL CUI GRAFICO SIA CONTENUTO IN UN COMPATTO, È SEMPRE ULTERIORMENTE PROLUNGABILE, VIENE PRECISATO MEGLIO DAL SEGUENTE:

COROLLARIO 1 DATO IL PROB. DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

OVE $F: \Omega \to \mathbb{R}$ SODDISFA LE IPOTESI STANDARD, SIA $K \subset \Omega$ UN COMPATTO TALE CHE $(x_0, y_0) \in \mathring{K}$ E SIA $((a,b), y(x))$ LA SOLUZIONE MASSIMALE. ALLORA $\exists\, x_2 \in (a, x_0)$ ED $\exists\, x_1 \in (x_0, b)$ TALI CHE $(x_1, y(x_1))$ E $(x_2, y(x_2))$ STANNO IN ∂K.

DIMO.

SICCOME $((a,b), y(x))$ È MASSIMALE, IL GRAFICO DI $y(x)$ RISTRETTA A (x_0, b) NON PUÒ ESSERE TUTTO CONTENUTO IN K, ALTRIMENTI (GRAZIE AL TEO. 2 LEZ. 44) $y(x)$ SAREBBE PROLUNGABILE OLTRE b, IN CONTRASTO COL FATTO CHE È MASSIMALE.
QUINDI L'INSIEME $A^+ = \{ x \in (x_0, b) \mid (x, y(x)) \notin K \}$ È NON VUOTO.

PRENDIAMO QUINDI $x_1 = \inf(A^+)$. SICCOME $A^+ \subset (x_0, b)$ ED $A^+ \neq \emptyset$, AVREMO $x_1 \in [x_0, b)$.

TUTTAVIA NON PUÒ ESSERE $x_1 = x_0$.

INFATTI, DALLA CONTINUITÀ DI $y(x)$ E DAL FATTO CHE $(x_0, y(x_0)) \in \mathring{K}$, SEGUE CHE $(x, y(x))$ CONTINUA A RIMANERE IN $\mathring{K}$ PER TUTTI GLI $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ CON $\delta > 0$ SUFFICIENTEMENTE PICCOLO.

QUINDI $x_1 > x_0$.

MOSTRIAMO ORA CHE $(x_1, y(x_1)) \in \partial K$.

INFATTI, GRAZIE ALLA CONTINUITÀ DI $y(x)$, OGNI INTORNO $I \times J$ DI $(x_1, y(x_1))$ INTERSECA $\mathring{K}$ PERCHÉ $(x, y(x)) \in \mathring{K}$ PER OGNI $x \in (x_0, x_1)$, MA INTERSECA ANCHE IL COMPLEMENTARE DI K PERCHÉ A^+ CONTIENE ELEMENTI ARBITRARIAMENTE VICINI A x_1.

QUESTO DIMOSTRA CHE IL GRAFICO DELLA SOLUZIONE MASSIMALE INTERSECA ∂K PER $x = x_1 > x_0$.

IN MODO DEL TUTTO ANALOGO SI TROVA $x_2 \in (a, x_0)$ TALE CHE $(x_2, y(x_2)) \in \partial K$.