27 aprile 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

EQUAZIONI DIFFERENZIALI A VARIABILI SEPARABILI

DEF. 1 DATI $(a,b),(c,d)\subset\mathbb{R}$, $F\in C((c,d))$ E $G\in C((a,b))$ DEFINIAMO SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE A VARIABILI SEPARABILI:

$$y' = F(y)\,G(x)$$

UNA COPPIA (I,f) TALE CHE:

1) $I=(\alpha,\beta)\subset(a,b)$

2) $f: I\to(c,d)$ E' DI CLASSE C^1 E $\forall x\in I$ SODDISFA $f'(x)=F(f(x))\,G(x)$

INOLTRE, DATI $x_0\in(a,b)$ E $y_0\in(c,d)$, SE f SODDISFA L'ULTERIORE CONDIZIONE:

3) $f(x_0)=y_0$

DIREMO CHE (I,f) È SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y'=F(y)\,G(x) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

ES. 0 $(\mathbb{R}, e^{x^2})$ È SOLUZIONE DEL PR. DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y'=2xy \\ y(0)=1 \end{cases}$$

PERCHÈ LA FUNZIONE $f(x)=e^{x^2}$ SODDISFA $f(0)=e^{0^2}=1$ E $f'(x)=(e^{x^2})'=2x\,e^{x^2}=2x\,f(x)\quad\forall x\in\mathbb{R}$

PIÙ IN GENERALE, $\forall A\in\mathbb{R}$ $(\mathbb{R}, Ae^{x^2})$ È SOLUZIONE DI:

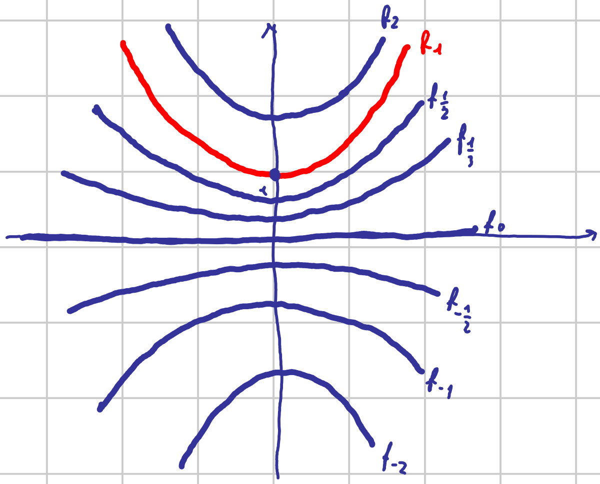
$$y'=2xy$$

PERCHÈ LA FUNZIONE $f_A(x)=A\,e^{x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ SODDISFA:

$$f_A'(x)=(A\,e^{x^2})'=A\cdot 2x\,e^{x^2}=2x\cdot(Ae^{x^2})=2x\,f_A(x)$$

SI NOTI CHE, AL VARIARE DI $A\in\mathbb{R}$, LA FAMIGLIA DI TUTTI I GRAFICI DELLE f_A "RIEMPIE" TUTTO $\mathbb{R}^2$

SENZA MAI AUTO INTERSECARSI:



RIEMPIE TUTTO $\mathbb{R}^2$ SENZA MAI AUTOINTERSECARSI SIGNIFICA CHE $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ESISTE UNA ED UNA SOLA f_λ TALE CHE $f_\lambda(x_0) = y_0$

IMPAREREMO CHE CIÒ ACCADE IN IPOTESI ABBASTANZA GENERALI

TEO. 1 (TEO. DI ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE PER EQ. DIFFERENZIALI A VAR. SEPARABILI)

DATE $F:(c,d) \to \mathbb{R}$ LIPSCHITZIANA, $G \in C([a,b])$, $x_0 \in (a,b)$ E $y_0 \in (c,d)$, ALLORA $\exists\, \delta > 0$ ED $\exists!\, f \in C^1([x_0-\delta, x_0+\delta])$ TALI CHE $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subset [a,b]$ ED f SODDISFA LE CONDIZIONI:

(1)
$$\begin{cases} f'(x) = F(f(x))\, G(x) \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

DIMO (FAREMO SOLO IL CASO PARTICOLARE $(c,d) = \mathbb{R}$)

BASTA OSSERVARE CHE SONO EQUIVALENTI I 2 PROBLEMI:

P.1 TROVARE $f \in C^1([x_0-\delta, x_0+\delta])$ CHE SODDISFA **(1)**.

P.2 TROVARE $f \in C([x_0-\delta, x_0+\delta])$ CHE SODDISFA:

(2)
$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(f(t)) \cdot G(t)\, dt \qquad \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta].$$

INFATTI SE f SODDISFA:

$$f'(t) = F(f(t))\, G(t)$$

INTEGRANDO TRA x_0 E x SI OTTIENE:

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} F(f(t))\, G(t)\, dt$$

CIOÈ:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} F(f(t))\, G(t)\, dt$$

DA CUI, RICORDANDO CHE $f(x_0) = y_0$, SEGUE LA **(2)**.

CIÒ DIMOSTRA CHE SE f È SOLUZIONE DI **P1** È ANCHE SOLUZIONE DI **P2**.

VICEVERSA, SE f È CONTINUA E SODDISFA:

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(f(t))\,G(t)\,dt \qquad \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta],$$

GRAZIE AL T.F.C.I. È ANCHE DERIVABILE E DERIVANDO IN AMBO I MEMBRI SI HA:

$$f'(x) = F(f(x))\,G(x)$$

INOLTRE:

$$f(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} F(f(t))\,G(t)\,dt = y_0 + 0 = y_0$$

QUINDI SODDISFA **(1)**.

CIÒ DIMOSTRA CHE SE f È SOLUZIONE DI $\boxed{P2}$ È ANCHE SOLUZIONE DI $\boxed{P1}$.

A QUESTO PUNTO, GRAZIE AL $\boxed{\text{TEO. 1}}$ DELLA $\boxed{\text{LEZ. 20}}$, SAPPIAMO GIÀ CHE SE $\delta > 0$ È SUFFICIENTEMENTE PICCOLO $\exists!\, f \in C([x_0-\delta, x_0+\delta])$ CHE SODDISFA **(2)**.

QUINDI, POICHÈ $\boxed{P1}$ E $\boxed{P2}$ SONO EQUIVALENTI, TALE f È ANCHE L'UNICA SOLUZIONE DI **(1)**.

ES. 1 RISOLVERE IL PROBLEMA DI CAUCHY:

(3)
$$\begin{cases} y' = e^{x} \cos^2(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

NEI CASI: $\boxed{a}$ $y_0 = \frac{\pi}{2}$, $\boxed{b}$ $y_0 = \frac{\pi}{4}$, $\boxed{c}$ $y_0 = \frac{5}{4}\pi$.

SVOLGIMENTO

$\boxed{a}$ SI NOTI CHE $\cos^2(y)$ SI ANNULLA PER $y = \frac{\pi}{2}$, QUINDI LA FUNZIONE COSTANTE $y_1(x) = \frac{\pi}{2}$ È SOLUZIONE DEL PROB. DI CAUCHY. IL FATTO CHE SIA L'UNICA SEGUE SUBITO DAL TEO. DI ES. E UNIC. LOCALE. DIMOSTRIAMOLO IN DETTAGLIO (PER QUESTA VOLTA).

MOSTRIAMO CIOÈ CHE SE $y_2(x)$ È DEFINITA SU (α, β), CON $(\alpha, \beta) \ni 0$, E SU (α, β) SODDISFA IL PROB. **(3)** CON $y_0 = \frac{\pi}{2}$, ALLORA DEVE COINCIDERE CON $y_1(x)$ SU TUTTO (α, β).

BASTERÀ MOSTRARE CHE SONO VUOTI I DUE INSIEMI:

$$A^+ = \{x \in (\alpha, \beta) \mid y_2(x) \neq y_1(x),\ x > 0\} \qquad \text{E} \qquad A^- = \{x \in (\alpha, \beta) \mid y_2(x) \neq y_1(x),\ x < 0\}$$

SE A^+ NON FOSSE VUOTO, DETTO $\bar{x} = \inf A^+$, SI AVREBBE $\bar{x} \in [0, \beta)$.

MOSTRIAMO CHE $y_1(\bar{x}) = y_2(\bar{x})$. SE $\bar{x}=0$ CIÒ È OVVIO. SE $\bar{x}>0$ SEGUE DALLA CONTINUITÀ DI $y_1(x)$ E $y_2(x)$ E DAL FATTO CHE $y_1(x) = y_2(x)$ $\forall x \in [0, \bar{x})$.

MA A QUESTO PUNTO, INVOCANDO IL $\boxed{\text{TEO.1}}$, LA SOLUZIONE DI:

$$\begin{cases} y' = e^x \cos^2 y \\ y(\bar{x}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

DEVE ESSERE UNICA SU TUTTO UN INTORNO DI AMPIEZZA $\delta>0$ DI $\bar{x}$, DI CONSEGUENZA DEVE ESSERE $y_1(x)=y_2(x)$ ANCHE PER $x\in[\bar{x}, \bar{x}+\delta)$, IN CONTRADDIZIONE COL FATTO CHE $\bar{x} = \inf A^+$. QUINDI È ASSURDO SUPPORRE CHE A^+ NON SIA VUOTO.

PER A^- SI RAGIONA IN MODO ANALOGO.

RIASSUMENDO: SE $y_2(x)$ È SOLUZIONE DI **(3)** SU (α, β) ALLORA COINCIDE CON $y_1(x)$ SU TUTTO (α, β).

QUINDI LA SOLUZIONE COSTANTE $y_1(x) = \frac{\pi}{2}$ È L'UNICA SOL. DI **(3)** NON SOLO IN UN INTORNO DI 0, MA SU TUTTO $\mathbb{R}$.

$\boxed{b}$ VISTO CHE $y(0) = \frac{\pi}{4}$ SI HA:

$$\cos^2(y(0)) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} > 0.$$

QUINDI PER CONTINUITÀ SI HA:

(4) $$\cos^2(y(t)) > 0$$

SU TUTTO UN INTORNO I DI 0.

FINCHÈ VALE **(4)**, DIRE CHE $y(t)$ SODDISFA:

$$y'(t) = e^t \cos(y(t))$$

EQUIVALE A DIRE CHE SODDISFA:

$$\frac{y'(t)}{\cos^2(y(t))} = e^t$$

INTEGRANDO AMBO I MEMBRI DA 0 A x SI OTTIENE:

(5) $$\int_0^x \frac{y'(t)}{\cos^2(y(t))}\, dt = \int_0^x e^t\, dt$$

AL SECONDO MEMBRO SI OTTIENE:

$$\int_0^x e^t\, dt = \left[e^t\right]_0^x = e^x - 1$$

AL PRIMO MEMBRO DI (5) SI OTTIENE:

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{\cos^2(y(t))}\,dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{y(x)} \frac{1}{\cos^2 y}\,dy = \left[\tan y\right]_{\frac{\pi}{4}}^{y(x)} = \tan(y(x)) - 1$$

QUINDI LA (5) DIVENTA:

(6)
$$\tan(y(x)) = e^x$$

SI NOTI CHE $y(x)$ NON PUÒ MAI INTERSECARE LE SOLUZIONI COSTANTI $y_1(x) = \frac{\pi}{2}$ E $y_3(x) = -\frac{\pi}{2}$, QUINDI FINCHÈ $y(x)$ ESISTE, SI HA $-\frac{\pi}{2} < y(x) < \frac{\pi}{2}$, QUINDI LA (6) DIVENTA:

$$y(x) = \arctan(e^x)$$

VISTO CHE TALE $y(x)$ SODDISFA LA CONDIZIONE (4) SU TUTTO $\mathbb{R}$, I PASSAGGI CHE ABBIAMO FATTO VALGONO SU TUTTO $\mathbb{R}$, QUINDI $y(x) = \arctan(e^x)$ È SOLUZIONE SU TUTTO $\mathbb{R}$.

C PARTENDO DAL FATTO CHE $y(0) = \frac{5}{4}\pi$ E QUINDI $\cos^2(y(0)) = \frac{1}{2} > 0$, SI PROCEDE IN MODO ANALOGO AL PUNTO **b** FINO AD OTTENERE:

(7)
$$\tan(y(x)) = e^x$$

STAVOLTA PERÒ, VISTO CHE $y(0) = \frac{5}{4}\pi$, $y(x)$ RIMANE CONFINATA TRA $\frac{\pi}{2}$ E $\frac{3}{2}\pi$, QUINDI LA (7) DIVENTA:

$$y(x) = \pi + \arctan e^x$$

CHE È LA SOLUZIONE CERCATA.

OSS. 1 NELLA DISCUSSIONE CHE SEGUE GENERALIZZIAMO LA QUESTIONE POSTA NEL PUNTO **a** DELL'ES. 1 E CIOÈ SE IL FATTO CHE LA SOLUZIONE FOSSE UNICA IN UN INTORNO "PICCOLO" DEL PUNTO INIZIALE FOSSE SUFFICIENTE A GARANTIRE L'UNICITÀ SU UN INTERVALLO PIÙ AMPIO. LA RISPOSTA È AFFERMATIVA GRAZIE ALLA SEGUENTE PROPOSIZIONE:

PROP. 1 CON LE STESSE IPOTESI DEL TEO. 1, SI CONSIDERI IL PROB. DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = F(y)G(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

E SIANO $(I_1, y_1(x))$ E $(I_2, y_2(x))$ DUE SUE SOLUZIONI.
ALLORA $\forall x \in I_1 \cap I_2$ SI HA $y_1(x) = y_2(x)$.

DIMO

POSTO $I_1 \cap I_2 = I = (\alpha, \beta)$, OVVIAMENTE I È UN INTERVALLO APERTO CONTENENTE x_0, VISTO CHE LO SONO I_1 E I_2. DEFINIAMO:

$$A^+ = \{ x \in I \mid y_1(x) \neq y_2(x),\ x > x_0 \} \quad \text{E} \quad A^- = \{ x \in I \mid y_1(x) \neq y_2(x),\ x < x_0 \}$$

DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE A^+ E A^- SONO VUOTI.

SE PER ASSURDO A^+ NON LO FOSSE, DETTO $\bar{x} = \inf A^+$, SI AVREBBE $\bar{x} \in [x_0, \beta)$.
SI OTTERREBBE INOLTRE $y_1(\bar{x}) = y_2(\bar{x})$. QUESTO È OVVIO SE $\bar{x} = x_0$, MENTRE SE $\bar{x} > x_0$ SEGUE DALLA CONTINUITÀ DI $y_1(x)$ E $y_2(x)$ E DAL FATTO CHE $y_1(x) = y_2(x)$ SU $[x_0, \bar{x})$.
A QUESTO PUNTO, VISTO CHE $y_1(\bar{x}) = y_2(\bar{x}) = \bar{y}$ $y_1(x)$ E $y_2(x)$ SONO ENTRAMBE SOLUZIONI DEL PROB. DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = F(y)G(x) \\ y(\bar{x}) = \bar{y} \end{cases}$$

QUINDI, INVOCANDO IL TEO. 1, $\exists \delta > 0$ TALE CHE $y_1(x) = y_2(x)$ SU $[\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta]$, IN CONTRADDIZIONE COL FATTO CHE $\bar{x} = \inf A^+$. QUINDI È ASSURDO SUPPORRE CHE A^+ NON SIA VUOTO.
ANALOGAMENTE SI DIMOSTRA CHE È VUOTO ANCHE A^-.
CIÒ SIGNIFICA CHE $y_1(x)$ E $y_2(x)$ COINCIDONO SU TUTTO $I_1 \cap I_2$.

DEF. 2 DATI $G \in C((a,b))$, $F \in C((c,d))$, $x_0 \in (a,b)$ E $y_0 \in (c,d)$ SIANO $(I_1, y_1(x))$ E $(I_2, y_2(x))$ DUE SOLUZIONI DEL PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y' = F(y)G(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

DIREMO CHE $(I_2, y_2(x))$ È UN PROLUNGAMENTO DI $(I_1, y_1(x))$ SE:

1) $I_1 \subset I_2$
2) $y_1(x) = y_2(x)$ $\forall x \in I_1$

OSS. 2 LA PROP. 1 CI GARANTISCE CHE, QUANDO F È LIPSCHITZIANA, NELLA DEF. 2 BASTA LA CONDIZIONE $I_1 \subset I_2$ PER AVERE AUTOMATICAMENTE CHE $(I_2, y_2(x))$ È UN PROLUNGAMENTO DI $(I_1, y_1(x))$.

ES. 2 (ESEMPIO CATTIVO)

TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DEL PROB. DI CAUCHY

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

SVOLGIMENTO

SI OSSERVA SUBITO CHE LA FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA $y_1(x) = 0$ È SOLUZIONE. TUTTAVIA, VISTO CHE $F(y) = \sqrt[3]{y}$ NON È LIPSCHITZIANA IN ALCUN INTORNO DI 0, NON POSSIAMO APPLICARE IL TEO. 1 PER DIRE CHE È L'UNICA SOLUZIONE.

E IN EFFETTI NON LO È PERCHÉ, SE CERCHIAMO SOLUZIONI DEL TIPO $y(x) = A x^{\alpha}$, LA CONDIZIONE SU α E A È CHE SIA:

$$\left(A x^{\alpha}\right)' = \left(A x^{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}$$

CIOÈ:

$$A \cdot \alpha\, x^{\alpha - 1} = A^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{\alpha}{3}}$$

CIOÈ:

$$\begin{cases} \alpha - 1 = \dfrac{\alpha}{3} \\ A \cdot \alpha = A^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

DA CUI SEGUE:

$$\alpha = \frac{3}{2} \qquad \text{E} \qquad A = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

QUINDI SI TROVA:

$$y(x) = \left(\frac{2}{3} x\right)^{\frac{3}{2}}$$

PONIAMO DUNQUE:

$$y_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{SE } x < 0 \\ \left(\frac{2}{3} x\right)^{\frac{3}{2}} & \text{SE } x \geq 0 \end{cases} \tag{9}$$

SI OTTIENE:

$$y_2'(x) = \begin{cases} 0 & \text{SE } x<0 \\ 0 & \text{SE } x=0 \\ \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{1}{2}} & \text{SE } x>0 \end{cases}$$

OTTENIAMO QUINDI CHE ANCHE $y_2(x)$ È SOLUZIONE DI **(8)**.

SI OSSERVI POI CHE, $\forall a>0$ ANCHE $v_a(x) = y_2(x-a)$ È SOLUZIONE DI **(8)** PERCHÉ:

$$(v_a(x))' = (y_2(x-a))' = y_2'(x-a) = \sqrt[3]{y_2(x-a)} = \sqrt[3]{v_a(x)}$$

E

$$v_a(0) = y_2(0-a) = 0$$

INFINE SI OSSERVI CHE SE $y(x)$ È SOLUZIONE DI **(8)** ANCHE $v(x) = -y(x)$ LO È PERCHÉ:

$$(v(x))' = (-y(x))' = -y'(x) = -\sqrt[3]{y(x)} = \sqrt[3]{-y(x)} = \sqrt[3]{v(x)}$$

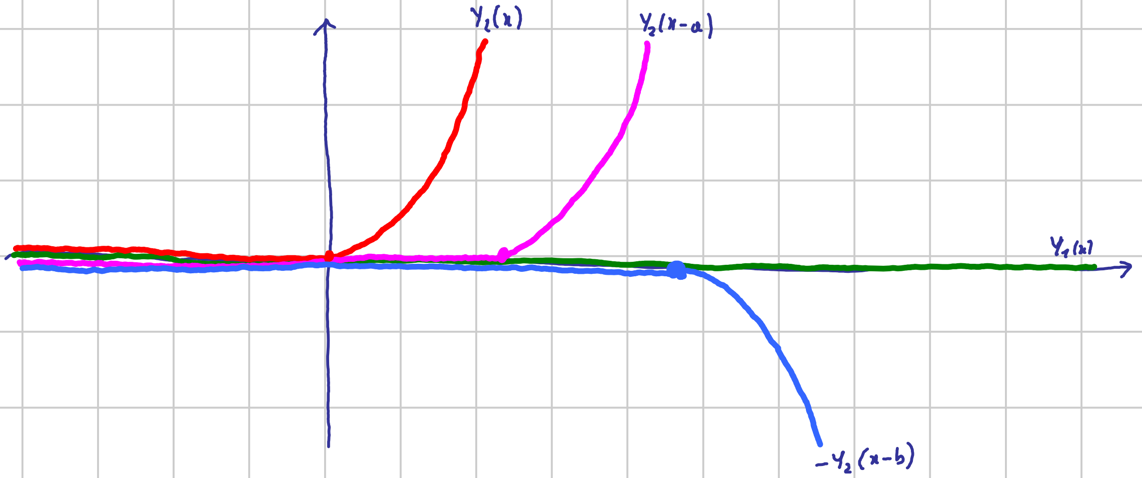
ABBIAMO QUINDI TROVATO INFINITE SOLUZIONI DI **(8)**, CHE ELENCHIAMO:

1) $y_1(x)$ (FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA)

2) $y_2(x)$ (FUNZIONE DEFINITA DA **(9)**)

3) TUTTE LE TRASLATE ORIZZONTALI IN AVANTI DI $y_2(x)$

4) TUTTE LE FUNZIONI OTTENUTE MOLTIPLICANDO PER -1 QUELLE DEL PUNTO (3).



PER MOSTRARE CHE NON CI SONO ALTRE SOLUZIONI DI **(8)** OLTRE A QUELLE TROVATE BASTA OSSERVARE CHE, FUORI DAI PUNTI DELL'ASSE x IL TEO.1 VALE, QUINDI LE SOLUZIONI DI $y' = \sqrt[3]{y}$ NON SI POSSONO INTERSECARE TRA LORO FUORI DALL'ASSE x. CIÒ SIGNIFICA CHE NON CI SONO ALTRE SOL. OLTRE A QUELLE OTTENUTE TRASLANDO E "ROVESCIANDO" $y_2(x)$.

29 aprile 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

EQUAZIONI DIFFERENZIALI A VARIABILI SEPARABILI (...CONTINUA...)

DEF. 1 UNA SOLUZIONE $(I, y(x))$ DI UN PROBLEMA DI CAUCHY SI DICE MASSIMALE SE L'UNICO SUO PROLUNGAMENTO È LEI STESSA

TEO. 1 SIA DATO IL PROBLEMA DI CAUCHY:

(1) $$\begin{cases} y' = F(y)G(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

CHE SODDISFI TUTTE LE IPOTESI DEL TEO. DI ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE.
ALLORA HA SEMPRE UNA SOLUZIONE MASSIMALE.

DIM

SI CONSIDERI LA FAMIGLIA $\mathfrak{F} := \{(I_i, y_i(x))\}_{i \in \mathfrak{I}}$ DI TUTTE LE SOLUZIONI DI (1), INDICIZZATA CON UN'OPPORTUNA FAMIGLIA DI INDICI $\mathfrak{I}$. GRAZIE AL TEO. DI ES. E UNICITÀ LOCALE $\mathfrak{F}$ È NON VUOTA.

DEFINIAMO:
$$I_M = \bigcup_{i \in \mathfrak{I}} I_i$$

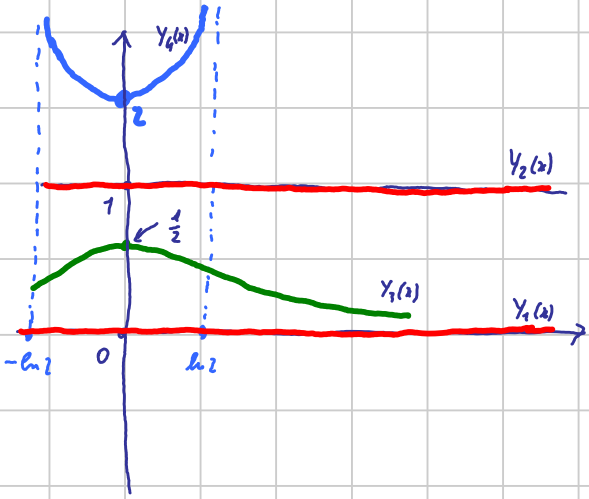
POICHÉ TUTTI GLI I_i SONO INTERVALLI APERTI CONTENENTI x_0, LO STESSO VALE PER I_M.

ORA DEFINIAMO $y_M : I_M \to \mathbb{R}$ NEL MODO SEGUENTE: $\forall x \in I_M$ PRENDO $i \in \mathfrak{I}$ TALE CHE $x \in I_i$ E DEFINISCO $y_M(x) = y_i(x)$. SI NOTI CHE y_M È BEN DEFINITA PERCHÉ PER TUTTI GLI $i \in \mathfrak{I}$ TALI CHE $x \in I_i$ I CORRISPONDENTI y_i HANNO TUTTI LO STESSO VALORE IN x (PER LA PROP. 1 DELLA LEZ 21). SI NOTI INOLTRE CHE $y_M(x_0) = y_0$, VISTO CHE $\forall i \in \mathfrak{I}$ $y_i(x_0) = y_0$.

INFINE SI NOTI ANCHE CHE $\forall x \in I_M$ $y_M'(x) = F(y_M(x))G(x)$ VISTO CHE, PRESO $i \in \mathfrak{I}$ TALE CHE $x \in I_i$, $y_M(x)$ COINCIDE CON $y_i(x)$ SU TUTTO I_i E $y_i(x)$ SODDISFA L'EQ. DIFF. SU TUTTO I_i E QUINDI ANCHE IN x.

QUESTO DIMOSTRA CHE $(I_M, y_M(x))$ È SOLUZIONE DI (1). INOLTRE, PER COME È STATO COSTRUITO, $(I_M, y_M(x))$ È PROLUNGAMENTO DI OGNI $(I_i, y(x)) \in \mathfrak{F}$, QUINDI $(I_M, y_M(x))$ È SOL. MASSIMALE.

ES. 1 TROVARE LA SOLUZIONE MASSIMALE DI $\begin{cases} y' = 2y(y-1)x \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ NEI CASI $y_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = 2$, $y_0 = -1$.



SVOLGIMENTO

1 VISTO CHE $y_0 = 0$ ANNULLA $F(y) = y(y-1)$ LA SOLUZIONE DEL PROB. DI CAUCHY CON TALE DATO INIZIALE È $(\mathbb{R}, y_1(x))$ DOVE $y_1(x)$ È LA FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA SU TUTTO $\mathbb{R}$.

2 ANALOGAMENTE, COL DATO INIZIALE $y_0 = 1$ SI OTTIENE COME SOLUZIONE $(\mathbb{R}, y_2(x))$ DOVE $y_2(x)$ È LA FUNZIONE COSTANTE UGUALE A 1 SU TUTTO $\mathbb{R}$.

3 CERCHIAMO ORA LA SOLUZIONE PER $y_0 = \frac{1}{2}$, CHE INDICHIAMO CON $y_3(x)$.

SAPPIAMO CHE NON PUÒ INTERSECARE NÈ $y_1(x)$ NÈ $y_2(x)$ (PERCHÈ ALTRIMENTI VIOLEREBBE L'UNICITÀ)

QUINDI, FINCHÈ $y_3(x)$ ESISTE, SI AVRÀ $0 < y_3(x) < 1$ E QUINDI DIRE CHE SODDISFA L'EQUAZIONE:

$$y_3'(t) = 2\, y_3(t)\left(y_3(t) - 1\right) \cdot t$$

EQUIVALE A DIRE CHE SODDISFA:

$$\frac{y_3'(t)}{y_3(t)\left(y_3(t)-1\right)} = 2t$$

SICCOME L'INTERVALLO DI INTEGRAZ. $[\frac{1}{2}, y_3(x)] \subset (0,1)$ QUANDO SI SCEGLIE LA PRIMITIVA DI $\frac{1}{y-1}$ SI SCEGLIE $\ln(1-y)$, NON $\ln(y-1)$. PER LO STESSO MOTIVO, PER $\frac{1}{y}$ SI SCEGLIE $\ln y$, NON $\ln(-y)$.

CHE INTEGRATA TRA 0 E x DIVENTA:

$$\int_0^x \frac{y_3'(t)}{y_3(t)\cdot\left(y_3(t)-1\right)}\, dt = \int_0^x 2t\, dt = x^2$$

GRAZIE AL CAMBIO DI VARIABILE $y = y_3(t)$

$$\| $$

$$\int_{y_3(0)}^{y_3(x)} \frac{1}{y(y-1)}\, dy = \int_{\frac{1}{2}}^{y_3(x)} \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\, dy = \Big[\ln(1-y) - \ln y\Big]_{\frac{1}{2}}^{y_3(x)} =$$

$$= \left[\ln\left(\frac{1}{y} - 1\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{y_3(x)} = \ln\left(\frac{1}{y_3(x)} - 1\right) - \ln 1 = \ln\left(\frac{1}{y_3(x)} - 1\right)$$

QUINDI, FINCHÈ ESISTE, $y_3(x)$ SODDISFA:

$$\ln\left(\frac{1}{y_3(x)} - 1\right) = x^2$$

CIOÈ:

$$\frac{1}{Y_3(x)} - 1 = e^{x^2}$$

CIOÈ:

(2) $$Y_3(x) = \frac{1}{e^{x^2}+1}$$

SI NOTI CHE TALE FUNZIONE ESISTE SU TUTTO $\mathbb{R}$ E SODDISFA $0 < Y_3(x) < 1$, QUINDI LA SOLUZIONE CERCATA È $(\mathbb{R}, Y_3(x))$ CON $Y_3(x)$ DATO DA (2).

$\boxed{d}$ DETTA $Y_4(x)$ LA SOLUZIONE CERCATA, RAGIONANDO COME IN $\boxed{c}$ SI OTTIENE CHE, FINCHÈ ESISTE SI HA $Y_4(x) > 1$, VISTO CHE $Y_4(0) = 2 > 1$.

QUINDI L'EQUAZIONE:

$$Y_4'(t) = 2\, Y_4(t)\big(Y_4(t) - 1\big) \cdot t$$

EQUIVALE A:

$$\frac{Y_4'(t)}{Y_4(t)\big(Y_4(t)-1\big)} = 2t$$

CHE INTEGRATA TRA 0 E x DIVENTA:

$$\int_0^x \frac{Y_4'(t)}{Y_4(t)\big(Y_4(t)-1\big)}\, dt = \int_0^x 2t\, dt = x^2$$

GRAZIE AL CAMBIO DI VARIABILE $y = Y_4(t)$

ANCHE QUI, COME AL PUNTO PRECEDENTE IL FATTO CHE $[2, Y_4(x)] \subset (1, +\infty)$ INFLUISCE SULLA SCELTA DELLA PRIMITIVA

$$\int_{Y_4(0)}^{Y_4(x)} \frac{1}{y(y-1)}\, dy = \int_2^{Y_4(x)} \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\, dy = \Big[\ln(y-1) - \ln y\Big]_2^{Y_4(x)} =$$

$$= \left[\ln\left(1 - \frac{1}{y}\right)\right]_2^{Y_4(x)} = \ln\left(1 - \frac{1}{Y_4(x)}\right) - \ln\frac{1}{2}$$

QUINDI, FINCHÈ ESISTE, $Y_4(x)$ SODDISFA:

$$\ln\left(1 - \frac{1}{Y_4(x)}\right) = \ln\frac{1}{2} + x^2$$

CIOÈ:

$$1 - \frac{1}{Y_4(x)} = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

CIOÈ:

(3) $$Y_4(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{x^2}}$$

CHE NON È DEFINITA PER $x = \pm \ln 2$. QUINDI LA SOL. CERCATA È $(I_4, Y_4(x))$ CON $I_4 = (-\ln 2, \ln 2)$ E $Y_4(x)$ DATA DA (3).

$\boxed{e}$ DETTA $Y_5(x)$ LA SOLUZIONE CERCATA, RAGIONANDO COME IN $\boxed{c}$ SI OTTIENE CHE, FINCHÈ ESISTE SI HA $Y_5(x)<0$, VISTO CHE $Y_5(0)=-1<0$.

QUINDI L'EQUAZIONE:

$$Y_5'(t) = 2\, Y_5(t)\left(Y_5(t)-1\right)\cdot t$$

EQUIVALE A:

$$\frac{Y_5'(t)}{Y_5(t)\left(Y_5(t)-1\right)} = 2t$$

CHE INTEGRATA TRA 0 E x DIVENTA:

$$\int_0^x \frac{Y_5'(t)}{Y_5(t)\cdot\left(Y_5(t)-1\right)}\,dt = \int_0^x 2t\,dt = x^2$$

GRAZIE AL CAMBIO DI VARIABILE $y = Y_5(t)$

$$\parallel$$

STESSA CONSIDERAZIONE FATTA NEI PUNTI PRECEDENTI

$$\int_{Y_5(0)}^{Y_5(x)} \frac{1}{y(y-1)}\,dy = \int_{-1}^{Y_5(x)} \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\,dy = \Big[\ln(1-y) - \ln(-y)\Big]_{-1}^{Y_5(x)} =$$

$$= \left[\ln\left(1-\frac{1}{y}\right)\right]_{-1}^{Y_5(x)} = \ln\left(1-\frac{1}{Y_5(x)}\right) - \ln 2$$

QUINDI, FINCHÈ ESISTE, $Y_5(x)$ SODDISFA:

$$\ln\left(1-\frac{1}{Y_5(x)}\right) = \ln 2 + x^2$$

CIOÈ:

$$1-\frac{1}{Y_5(x)} = 2\cdot e^{x^2}$$

CIOÈ:

(4) $$Y_5(x) = -\frac{1}{2e^{x^2}-1}$$

CHE È DEFINITA SU TUTTO $\mathbb{R}$. QUINDI LA SOL. CERCATA È $(\mathbb{R}, Y_5(x))$ CON $Y_5(x)$ DEFINITO DA (4).

$\boxed{\text{ES. 2}}$ DATO IL PROB. DI CAUCHY

(5) $$\begin{cases} y' = \arctan\left(y(y-1)\right) \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

DETERMINARE IL GRAFICO QUALITATIVO DELLA SUA SOL. MASSIMALE.

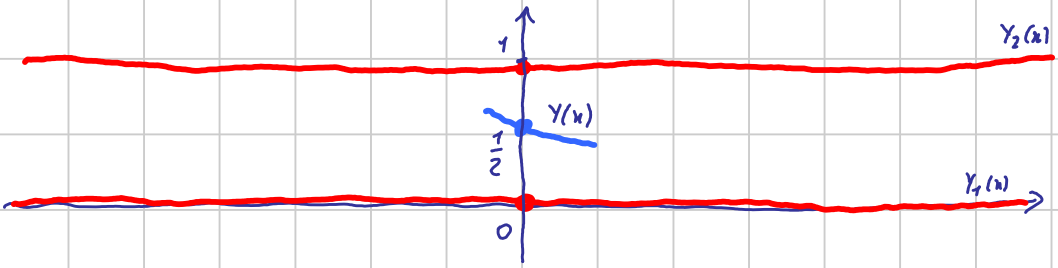
SVOLGIMENTO

SIA $(I, y(x))$ LA SOLUZIONE MASSIMALE DI (S), VISTO CHE IL PROCEDIMENTO DI CALCOLO CI PORTA AD INTEGRALI CHE NON SAPPIAMO RISOLVERE, PROVIAMO A RICAVARE INFORMAZIONI SU I E SU $y(x)$ DIRETTAMENTE DA (S).

INFO 1 PER IL TEO. DI ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE I CONTIENE TUTTO UN INTORNO DI 0.

INFO 2 FINCHÈ $y(x)$ ESISTE RIMANE CONFINATA NELLA STRISCIA $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<y<1\}$

INFATTI LE FUNZIONI COSTANTI $y_1(x)=0$ E $y_2(x)=1$ SONO ANCH'ESSE SOLUZIONI DELLA STESSA EQ. DIFFERENZIALE E QUINDI NON POSSONO ESSERE INTERSECATE DA $y(x)$.



INFO 3 FINCHÈ $y(x)$ ESISTE È DECRESCENTE E LIPSCHITZIANA CON COSTANTE $L=\arctan\frac{1}{4}$.

INFATTI FINCHÈ ESISTE SAPPIAMO CHE $0<y(x)<1$, QUINDI

$$-\frac{1}{4}\leq y(x)\cdot(y(x)-1)<0$$

QUINDI:

$$-\arctan\frac{1}{4}\leq\arctan\left(y(x)\cdot(y(x)-1)\right)<0$$

MA SICCOME $y(x)$ SODDISFA L'EQ. DIFF., SI OTTIENE:

$$-\arctan\frac{1}{4}\leq y'(x)<0$$

DA CUI SEGUE $\boxed{\text{INFO 3}}$.

INFO 4 $I=\mathbb{R}$, CIOÈ POSTO $I=(a,b)$ SI HA $a=-\infty$ E $b=+\infty$.

MOSTRIAMO CHE $b=+\infty$.

SE PER ASSURDO COSÌ NON FOSSE SIA $y_0=\lim_{x\to b^-}y(x)$ (y_0 ESISTE FINITO PERCHÈ $y(x)$ È CRESCENTE E LIMITATA.

CONSIDERO ORA LA SOL. $Y_3(x)$ DI:

$$\begin{cases} Y' = \arctan(Y(Y-1)) \\ Y(b) = Y_0 \end{cases}$$

SO CHE ESISTE IN UN INTERVALLINO $(b-\delta, b+\delta)$.

DEFINISCO ORA $v(x)$ SU $I \cup [b+\delta)$ NEL MODO SEGUENTE:

(6) $$v(x) = \begin{cases} Y(x) & \text{PER } x \in I \\ Y_3(x) & \text{PER } x \in [b+\delta) \end{cases}$$

PER MOSTRARE CHE $v(x)$ È SOL. DELL'EQ. DIFF. (E QUINDI UN PROLUNGAMENTO DI $(I, Y(x))$ BASTA MOSTRARE CHE ANCHE PER $x = b$ SI HA:

(7) $$v'(b) = \arctan(v(b)\cdot(v(b)-1))$$

PER $v'_+(b)$ CIÒ È OVVIO PERCHÈ $v|_{[b,b+\delta)} = Y_3|_{[b,b+\delta)}$.

PER $v'_-(b)$ BASTA OSSERVARE CHE:

$$\lim_{x\to b^-} v'(x) = \lim_{x\to b^-} Y'(x) = \lim_{x\to b^-} \arctan\left(Y(x)(Y(x)-1)\right) = \arctan\left(Y_0(Y_0-1)\right) = \arctan\left(v(b)(v(b)-1)\right)$$

QUINDI ANCHE $v'_-(b) = \arctan(v(b)(v(b)-1))$.

QUINDI VALE (7).

CIÒ SIGNIFICA CHE $v(x)$ PROLUNGA $Y(x)$, IN CONTRADDIZIONE COL FATTO CHE $(I, Y(x))$ È MASSIMALE.

QUINDI È ASSURDO SUPPORRE CHE I SIA SUPERIORMENTE LIMITATO.

ANALOGAMENTE SI DIMOSTRA CHE I NON È INFERIORMENTE LIMITATO.

QUINDI $I = \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{INFO.5}}$ PER $x \to +\infty$ $Y(x)$ HA ASINTOTO ORIZZONTALE LA RETTA $Y = 0$.

VISTO CHE $Y(x)$ È DECRESCENTE E LIMITATA L'ASINTOTO ORIZZONTALE PER $x \to +\infty$ ESISTE E SARÀ DEL TIPO:

$$Y = \lambda \quad \text{CON } \lambda \in [0, \tfrac{1}{2})$$

VISTO CHE $Y(0) = \frac{1}{2}$ E $Y(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

PER AVERE LA TESI BASTA MOSTRARE CHE NON PUÒ ESSERE $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$

INFATTI, SE PER ASSURDO FOSSE $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ ALLORA:

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \lambda \in (0, \tfrac{1}{2})$$

QUINDI:

$$\lim_{x \to +\infty} y'(x) = \lim_{x \to +\infty} \arctan\left(y(x)(y(x)-1)\right) = \arctan\left(\lambda(\lambda-1)\right) = m < 0$$

DI CONSEGUENZA $\exists\, \bar{x} > 0$ T.C. $x > \bar{x} \Rightarrow y'(x) < \frac{m}{2} < 0$, QUINDI PER $x > \bar{x}$ SI HA

$$y(x) = y(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{x} y'(x)\,dx \leq y(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^{x} \frac{m}{2}\,dx \leq y(\bar{x}) + \frac{m}{2}(x-\bar{x}) \xrightarrow{\text{PER } x \to +\infty} -\infty$$

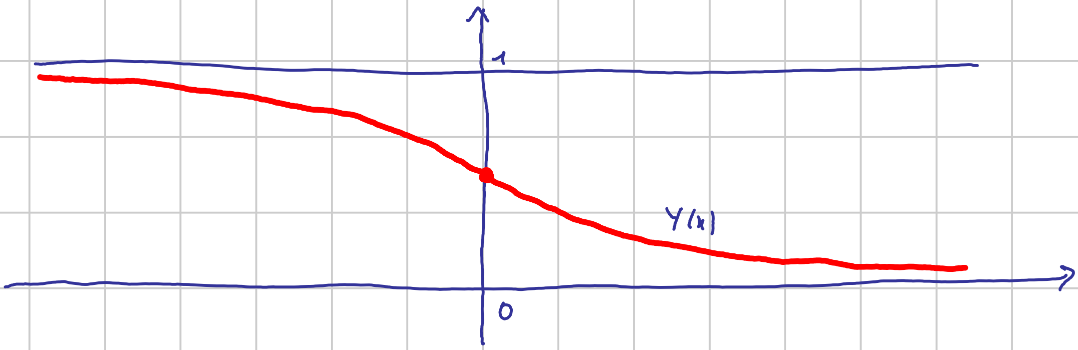
QUINDI $y(x) \to -\infty$ PER $x \to +\infty$ (ASSURDO).

QUINDI È ASSURDO CHE $\lambda \neq 0$. QUINDI L'ASINTOTO È $y = 0$.

INFO 6 PER $x \to -\infty$ $y(x)$ HA COME ASINTOTO ORIZZONTALE LA RETTA $y = 1$.

LA VERIFICA È DEL TUTTO ANALOGA A INFO. 5.

RIASSUMENDO, LE INFORMAZIONI RICAVATE CI PERMETTONO DI TRACCIARE IL SEGUENTE GRAFICO:



4 maggio 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

EQUAZIONI DIFFERENZIALI A VARIABILI SEPARABILI (...CONTINUA...)

OSS. 1

NELLA LEZIONE PRECEDENTE ABBIAMO VISTO COME TROVARE LA SOLUZIONE DI UN PROB. DI CAUCHY CON L'EQUAZIONE A VARIABILI SEPARABILI, GIUSTIFICANDO OGNI PASSAGGIO. IN TAL MODO SIAMO SICURI CHE LA FUNZIONE $y(x)$ CHE SI TROVA ALLA FINE DEL PROCEDIMENTO È LA SOLUZIONE CERCATA, SENZA BISOGNO DI ULTERIORI VERIFICHE.

IN ALTERNATIVA LO STUDENTE PUÒ FARE TUTTI I CALCOLI SENZA ALCUNA GIUSTIFICAZIONE: IN TAL MODO LA FUNZIONE $y(x)$ CHE SI TROVA È SOLO UNA "CANDIDATA SOLUZIONE" E SOLO DOPO LA VERIFICA DIRETTA POSSO DIRE CHE È DAVVERO UNA SOLUZIONE DEL PROB. DI CAUCHY. SE POI SONO ANCHE VERIFICATE LE IPOTESI DEL TEO. ES. E UNIC., POSSO ANCHE DIRE CHE NON CE NE SONO ALTRE.

VEDIAMO QUESTO MODO DI PROCEDERE NEL PROSSIMO ESEMPIO.

ES. 1 TROVARE LA SOL. DEL PROB. DI CAUCHY:
$$\begin{cases} y' = xy - \dfrac{4x}{y} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$
NEI CASI $y_0 = \sqrt{3}$, $y_0 = \sqrt{5}$, $y_0 = -\sqrt{3}$, $y_0 = -\sqrt{5}$.

SVOLGIMENTO

PER COMINCIARE CERCHIAMO, SENZA CURARCI DEL DATO INIZIALE, COME DEVE ESSERE FATTA LA GENERICA SOL. $y(x)$ DELL'EQUAZ. DIFF.:
$$y'(x) = x\,y(x) - \frac{4x}{y(x)}$$
CIOÈ:

(1) $$y'(x) = \frac{(y(x))^2 - 4}{y(x)} \cdot x .$$

TOLTE LE 2 SOL COSTANTI $y(x) = 2$ E $y(x) = -2$, PER CERCARE LE ALTRE, RISCRIVIAMO (1) NEL MODO SEGUENTE:

(2) $$\frac{2 \cdot y(x)}{(y(x))^2 - 4}\, y'(x) = 2x$$

DETTA $h(y) = \frac{2y}{y^2-4}$, LA **(2)** PUÒ ESSERE SCRITTA:

$$h(y(x)) \cdot y'(x) = 2x$$

CIOÈ:

$$\Big(H(y(x)) \Big)' = (x^2)'$$

DOVE $H(y)$ È UNA PRIMITIVA DI $h(y)$, CIOÈ:

$$H(y) = \int h(y)\, dy = \frac{2y}{y^2-4} = \ln|y^2-4|$$

OTTENIAMO QUINDI:

$$\Big(\ln|(y(x))^2-4| \Big)' = (x^2)'$$

DA CUI SEGUE:

$$\ln|(y(x))^2-4| = x^2 + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

CIOÈ:

$$(y(x))^2 - 4 = \pm e^c \cdot e^{x^2} \qquad c \in \mathbb{R}$$

SE ORA, A TALI SOLUZIONI AGGIUNGIAMO LE 2 SOL. COSTANTI GIÀ TROVATE $y(x) = \pm 2$, L'INSIEME DI TUTTE LE SOL. CHE ABBIAMO TROVATO È:

$$(y(x))^2 - 4 = k e^{x^2} \qquad k \in \mathbb{R}$$

CIOÈ:

$$y(x) = \pm\sqrt{4 + k e^{x^2}} \qquad k \in \mathbb{R}$$

DI TALI SOLUZIONI, QUELLA TALE CHE $y(0) = \sqrt{3}$ SI OTTIENE SE

$$\sqrt{3} = \pm\sqrt{4 + k \cdot e^0}$$

CIOÈ SCEGLIENDO IL SEGNO "+" DAVANTI ALLA RADICE E CON $k = -1$, QUINDI È

(3) $$y(x) = \sqrt{4 - e^{x^2}} \qquad \text{SU } \left(-\sqrt{\ln 4}, \sqrt{\ln 4}\right)$$

ANALOGAMENTE LA SOLUZIONE T.C. $y(0) = \sqrt{5}$ È

(4) $$y(x) = \sqrt{4 + e^{x^2}} \qquad \text{SU } \mathbb{R}$$

QUELLA T.C. $y(0) = -\sqrt{3}$ È:

(5) $$y(x) = -\sqrt{4 - e^{x^2}} \qquad \text{SU } \left(-\sqrt{\ln 4}, \sqrt{\ln 4}\right)$$

E QUELLA T.C. $y(0) = -\sqrt{5}$ È:

(6) $$y(x) = -\sqrt{4 + e^{x^2}} \qquad \text{SU } \mathbb{R}$$

PER CIASCUNA DELLE 4 SOL. TROVATE, VISTO CHE NON ABBIAMO CONTROLLATO CHE TUTTI I PASSAGGI FOSSERO DELLE EQUIVALENZE, DOBBIAMO FARE LA VERIFICA PER ACCERTARCI CHE SIANO DAVVERO SOLUZIONI E POI INVOCARE IL TEO. DI ES E UNICITÀ PER DIMOSTRARE CHE NON CE NE SONO ALTRE.

AD ESEMPIO, PER LA **(3)** SI HA:

$$y'(x) = \left(\sqrt{4-e^{x^2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{4-e^{x^2}}}\cdot(-e^{x^2})\cdot 2x = \frac{-e^{x^2}}{\sqrt{4-e^{x^2}}}\cdot x$$

$$\frac{(y(x))^2-4}{y(x)}\cdot x = \frac{4-e^{x^2}-4}{\sqrt{4-e^{x^2}}}\cdot x = \frac{-e^{x^2}}{\sqrt{4-e^{x^2}}}\cdot x$$

QUINDI L'EQUAZIONE **(1)** È SODDISFATTA.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

DEF. 1 UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE DI ORDINE n È UN'EQUAZIONE DEL TIPO

(7)
$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = b(x)$$

DOVE $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), b(x) \in C((a,b))$ E $a_n(x) \neq 0 \;\; \forall x \in (a,b)$.

INOLTRE, SE $b(x)$ È IDENTICAMENTE NULLA, L'EQUAZIONE SI DICE OMOGENEA, ALTRIMENTI SI DICE NON OMOGENEA. IN PARTICOLARE, DATA UN'EQUAZIONE DI TIPO **(7)** NON OMOGENEA, L'EQUAZIONE OMOGENEA CHE HA IL SUO STESSO PRIMO MEMBRO È DETTA OMOGENEA A LEI ASSOCIATA.

OSS. 2 SE INDICHIAMO CON $\mathcal{L}$ L'OPERATORE.

$$\mathcal{L} : C^n((a,b)) \to C((a,b))$$
$$y(x) \longmapsto a_n(x)\,y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)\,y'(x) + a_0(x)\,y(x)$$

L'EQUAZIONE **(7)** PUÒ SCRIVERSI:

$$\mathcal{L}(y) = b(x)$$

IL TERMINE "EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE" DERIVA APPUNTO DAL FATTO CHE $\mathcal{L}$ È LINEARE.

INFATTI, $\forall y_1(x), y_2(x) \in C^n((a,b))$ E $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ SI HA:

$$\mathcal{L}(\alpha y_1 + \beta y_2) = a_n(x)\cdot\left(\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)\right)^{(n)} + \dots + a_1(x)\cdot\left(\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)\right)' + a_0(x)\cdot\left(\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)\right) =$$

$$= a_n(x)\cdot\left(\alpha y_1^{(n)}(x)+\beta y_2^{(n)}(x)\right)+\dots+a_1(x)\cdot\left(\alpha y_1'(x)+\beta y_2'(x)\right)+a_0(x)\left(\alpha y_1(x)+\beta y_2(x)\right)=$$

$$=\alpha\left(a_n(x)y_1^{(n)}(x)+\dots+a_1(x)y_1'(x)+a_0(x)y_1(x)\right)+\beta\left(a_n(x)y_2^{(n)}(x)+\dots+a_1(x)y_2'(x)+a_0(x)y_2(x)\right)=$$

$$=\alpha\mathcal{L}(y_1)+\beta\mathcal{L}(y_2)$$

TEO. 1 (ESISTENZA E UNICITÀ PER EQ. LINEARI)

DATO IL PROB. DI CAUCHY

(8)
$$\begin{cases} a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=b(x) \\ y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_1 \\ y''(x_0)=y_2 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1} \end{cases}$$

DOVE $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), b(x) \in C((a,b))$, CON $a_n(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$, E INOLTRE $x_0\in(a,b)$ E $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\in\mathbb{R}$.

ALLORA $\exists!\, y\in C^n((a,b))$ CHE È SOLUZIONE DI **(8)**.

OSS. 3

IL TEO. 1 È UN CASO PARTICOLARE DI UN TEO. PIÙ GENERALE CHE VERRÀ DIMOSTRATO NEL CORSO DI ANALISI 4, PER CUI NE OMETTIAMO LA DIMOSTRAZIONE.

TEO. 2

DATI $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)\in C((a,b))$, SI CONSIDERI L'EQUAZIONE

(9)
$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

E SIA
$$S=\left\{y\in C^n((a,b)) \mid y(x) \text{ È SOLUZIONE DI } \mathbf{(9)}\right\}$$

ALLORA S È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE n DI $C^n((a,b))$.

DIMO

SAPPIAMO GIÀ (VEDI $\boxed{\text{OSS.2}}$) CHE L'OPERATORE $\mathcal{L}$ DEFINITO DA:

$$\mathcal{L}: C^n((a,b)) \to C((a,b))$$
$$y(x) \longmapsto a_n(x)\,y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)\,y'(x) + a_0(x)\,y(x)$$

È LINEARE.

SI NOTI CHE L'EQUAZIONE **(9)** PUÒ ESSERE RISCRITTA:

$$\mathcal{L}(y) = 0$$

QUINDI S È AUTOMATICAMENTE UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $C^{(n)}((a,b))$ PERCHÉ È IL NUCLEO DI $\mathcal{L}$. RIMANE DA DIMOSTRARE CHE $\dim(S) = n$.

A TALE SCOPO BASTERÀ ESIBIRE UNA BASE DI S COSTITUITA DA n ELEMENTI.

DUNQUE, PRESO $x_0 \in (a,b)$, PER OGNI $k = 0,1,\dots,n-1$ DEFINIAMO $y_k(x)$ COME LA SOLUZIONE DEL PROB. DI CAUCHY:

K-ESIMO, PARTENDO DA ZERO

$$\begin{cases} \mathcal{L}(y) = 0 \\ \left(y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(k-1)}(x_0), y^{(k)}(x_0), y^{(k+1)}(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)\right) = (0,0,\dots,0,1,0,\dots,0) \end{cases}$$

GRAZIE AL TEO. 1, TALI $y_k(x)$ ESISTONO E STANNO IN $C^n((a,b))$ E QUINDI, SICCOME SODDISFANO L'EQUAZIONE $\mathcal{L}(y) = 0$, SI HA $y_k(x) \in S$, PER OGNI $k = 0,1,\dots,n-1$.

DETTO $\mathcal{B} = \{y_0(x), y_1(x), \dots, y_{n-1}(x)\}$, VOGLIAMO MOSTRARE CHE $\mathcal{B}$ È UNA BASE.

PER PRIMA COSA DIMOSTRIAMO CHE GLI $y_k(x)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

SE PER ASSURDO COSÌ NON FOSSE, CI SAREBBE $k \in 0,1,\dots,n-1$ TALE CHE:

$$y_k(x) = \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_{k-1} y_{k-1}(x) + \alpha_{k+1} y_{k+1}(x) + \dots + \alpha_{n-1} y_{n-1}(x)$$

MA ALLORA, DERIVANDO k VOLTE IN AMBO I MEMBRI E VALUTANDO L'UGUAGLIANZA IN x_0, SI AVREBBE:

$$y_k^{(k)}(x_0) = \alpha_1 y_1^{(k)}(x_0) + \dots + \alpha_{k-1} y_{k-1}^{(k)}(x_0) + \alpha_{k+1} y_{k+1}^{(k)}(x_0) + \dots + \alpha_{n-1} y_{n-1}(x_0) =$$

$$= \alpha_1 \cdot 0 + \dots + \alpha_{k-1} \cdot 0 + \alpha_{k+1} \cdot 0 + \dots + \alpha_{n-1} \cdot 0 = 0$$

IN CONTRADDIZIONE COL FATTO CHE $y_k^{(k)}(x_0) = 1$.

QUESTO DIMOSTRA CHE GLI ELEMENTI DI $\mathcal{B}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

MOSTRIAMO CHE $\mathcal{B}$ GENERA.

A TALE SCOPO, PRESO UN QUALSIASI $Y(x) \in S$, PER OGNI $k=0,1,\dots,n-1$ PONIAMO:

$$\beta_k = Y^{(k)}(x_0).$$

MA ALLORA $Y(x)$ È SOLUZIONE DEL PROB. DI CAUCHY:

(10) $$\begin{cases} \mathcal{L}(Y)=0 \\ \left(Y(x_0), Y'(x_0), \dots, Y^{(n-1)}(x_0)\right) = \left(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\right) \end{cases}$$

SI NOTI PERÒ CHE È SOLUZIONE DI (10) ANCHE LA SEGUENTE COMB. LINEARE DI ELEMENTI DI $\mathcal{B}$:

$$\beta_0 Y_0(x) + \beta_1 Y_1(x) + \dots + \beta_{n-1} Y_{n-1}(x).$$

MA SICCOME LA SOLUZIONE DI (10) È UNICA, DEVE ESSERE:

$$Y(x) = \beta_0 Y_0(x) + \beta_1 Y_1(x) + \dots + \beta_{n-1} Y_{n-1}(x)$$

CIOÈ $Y(x)$ È COMB. LINEARE DI ELEMENTI DI $\mathcal{B}$.

QUINDI $\mathcal{B}$ GENERA S. CIÒ CONCLUDE LA DIMOSTRAZIONE.

OSS. 4

IL TEO. 2 CI GARANTISCE CHE PER TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DI (9) BASTA TROVARNE n INDIPENDENTI: $v_1(x), \dots, v_n(x)$. INFATTI TUTTE LE ALTRE SOLUZIONI SARANNO DEL TIPO:

$$Y(x) = \alpha_1 v_1(x) + \dots + \alpha_n v_n(x)$$

TEO. 3

DATI $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), b(x) \in C((a,b))$, SI CONSIDERI L'EQUAZIONE

(11) $$a_n(x) Y^{(n)} + a_{n-1}(x) Y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) Y' + a_0(x) Y = b(x)$$

ALLORA LA SOL. GENERALE DI (11) È DATA DA:

(12) $$Y(x) = Y_0(x) + \alpha_1 v_1(x) + \alpha_2 v_2(x) + \dots + \alpha_n v_n(x)$$

DOVE $Y_0(x) \in C^n((a,b))$ È UNA SOLUZIONE PARTICOLARE DI (11), MENTRE $\{v_1(x), \dots, v_n(x)\}$ È UNA BASE PER LO SPAZIO DELLE SOL. DELLA OMOGENEA ASSOCIATA A (11).

DIMO

PER COMODITÀ INDICHIAMO, COME AL SOLITO, CON $\mathcal{L}$ L'OPERATORE LINEARE CHE TROVIAMO APPLICATO AL I° MEMBRO DELLA **(11)**.

IN TAL MODO LA **(11)** PUÒ ESSERE RISCRITTA COME:

(13)
$$\mathcal{L}(y) = b(x)$$

E LA SUA OMOGENEA ASSOCIATA È:

(14)
$$\mathcal{L}(y) = 0$$

OSSERVIAMO CHE OGNI $y(x)$ DELLA FORMA **(12)** È SOLUZIONE DI **(13)** PERCHÈ:

$$\mathcal{L}(y(x)) = \mathcal{L}\left(y_0(x) + \alpha_1 v_1(x) + \dots + \alpha_n v_n(x)\right) =$$

$$= \mathcal{L}(y_0(x)) + \alpha_1 \mathcal{L}(v_1(x)) + \dots + \alpha_n \mathcal{L}(v_n(x)) =$$

$$= b(x) + \alpha_1 \cdot 0 + \dots + \alpha_n \cdot 0 = b(x)$$

VICEVERSA, OGNI $\tilde{y}(x)$ CHE SIA SOLUZIONE **(13)** DEVE ESSERE DELLA FORMA **(12)**, PERCHÈ, SICCOME ANCHE $y_0(x)$ SODDISFA **(13)** SI HA:

$$\mathcal{L}(\tilde{y}(x) - y_0(x)) = \mathcal{L}(\tilde{y}(x)) - \mathcal{L}(y_0(x)) = b(x) - b(x) = 0$$

QUINDI $\tilde{y}(x) - y_0(x)$ È SOLUZIONE DI **(14)** E QUINDI, ESSENDO $\{v_1(x), \dots, v_n(x)\}$ UNA BASE PER LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DI **(14)**, SI OTTIENE CHE $\tilde{y}(x) - y_0(x)$ È DELLA FORMA:

$$\tilde{y}(x) - y_0(x) = \beta_1 v_1(x) + \dots + \beta_n v_n(x)$$

CIOÈ:

$$\tilde{y}(x) = y_0(x) + \beta_1 v_1(x) + \dots + \beta_n v_n(x)$$

QUINDI LE SOLUZIONI DI **(13)**, CIOÈ QUELLE DI **(11)**, SONO TUTTE E SOLE QUELLE DELLA FORMA **(12)**.

OSS. 5

GRAZIE AL $\boxed{\text{TEO. 3}}$, PER TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DI $L(y) = b(x)$, BASTA TROVARNE UNA SOLA (A CONDIZIONE CHE SI SAPPIA RISOLVERE L'OMOGENEA ASSOCIATA).

NEGLI ESEMPI CHE SEGUONO VEDIAMO UN PO' DI CASI IN CUI SI RIESCE A TROVARE ESPLICITAMENTE LA SOLUZIONE.

ES. 2

TROVARE TUTTE LE $Y(x) \in C^1(\mathbb{R})$ CHE SODDISFANO L'EQ. DIFF.

(15)
$$Y' + \cos x \cdot Y = \cos x \sin x$$

SVOLGIMENTO

RISOLVIAMO PRIMA L'OMOGENEA ASSOCIATA:

(16)
$$y' + \cos x \cdot y = 0$$

SICCOME È DI ORDINE 1, LO SPAZIO S DELLE SOLUZIONI HA DIMENSIONE 1, QUINDI BASTA TROVARE UNA SOLUZIONE $v(x)$ DI (16) CHE NON SIA IDENTICAMENTE NULLA, PER AVERE UNA BASE DI S.

PER TROVARE $v(x)$ SI OSSERVI CHE (16) È A VARIABILI SEPARABILI (TUTTE LE LINEARI OMOGENEE DI ORDINE 1 LO SONO!). SI HA:

$$v'(x) + \cos x \cdot v(x) = 0$$

CHE, SE $v(x) \neq 0$, EQUIVALE A:

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = -\cos x$$

CIOÈ:

$$\left(\ln|v(x)|\right)' = (-\sin x)'$$

CIOÈ:

$$\ln|v(x)| = -\sin x + C$$

SICCOME CI BASTA UNA SOLA $v(x)$ NON IDENTICAMENTE NULLA SCEGLIAMO QUELLA TALE CHE:

$$\ln v(x) = -\sin x$$

CIOÈ:

$$v(x) = e^{-\sin x}$$

LA VERIFICA DIRETTA MOSTRA CHE, EFFETTIVAMENTE, VERIFICA (16).

QUINDI L'INSIEME COSTITUITO DALLA SOLA $v(x)$ È UNA BASE PER S, OVVERO LE SOL. DI (16) SONO TUTTE E SOLE QUELLE DEL TIPO:

(17)
$$Y(x) = \alpha e^{-\sin x} \qquad \text{CON } \alpha \in \mathbb{R}$$

PER CONCLUDERE CI BASTA TROVARE UNA SOLUZIONE PARTICOLARE $Y_0(x)$ DI (15), IN MODO DA POTER APPLICARE IL TEO. 3, OTTENENDO CHE LE SOL. DI (15) SONO TUTTE E SOLE QUELLE DEL TIPO

$$Y(x) = Y_0(x) + \alpha e^{-\sin x} \qquad \text{CON } \alpha \in \mathbb{R}$$

UN METODO STANDARD PER TROVARE $Y_0(x)$ È IL COSIDETTO "METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI", CHE CONSISTE NEL PRENDERE LA SOL. GENERALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA, CIOÈ LA (17), E CERCARE $Y_0(x)$ TRA LE FUNZIONI DEL TIPO

$$Y_0(x) = \alpha(x)\, e^{-\sin x} \tag{18}$$

CIOÈ CHE SI OTTENGONO DALLA SOL. GENERALE DELL'OMOGENEA, TRASFORMANDO LE COSTANTI DELLA COMBINAZIONE LINEARE IN FUNZIONI.

CI CHIEDIAMO QUINDI COME SCEGLIERE $\alpha(x)$ NELLA (18), IN MODO CHE $Y_0(x)$ SIA SOL. DI (15).

PER SCOPRIRLO, SOSTITUIAMO (18) IN (15), OTTENENDO:

$$\left(\alpha(x)\, e^{-\sin x}\right)' + \cos x \cdot \left(\alpha(x)\, e^{-\sin x}\right) = \cos x \sin x$$

CIOÈ:

$$\alpha'(x)\, e^{-\sin x} + \cancel{\alpha(x)\cdot(-\cos x)\, e^{-\sin x}} + \cancel{\cos x \cdot \alpha(x)\, e^{-\sin x}} = \cos x \sin x$$

CIOÈ:

$$\alpha'(x) = \cos x \sin x\, e^{\sin x}$$

QUINDI BASTA PRENDERE:

$$\alpha(x) = \int \cos x \sin x\, e^{\sin x}\, dx \overset{u=\sin x}{=} \int u e^{u}\, du = \dots = (u-1)e^{u} = (\sin x - 1)\, e^{\sin x}$$

CON TALE $\alpha(x)$ LA (18) È SOLUZIONE DI (15).

QUINDI UNA SOL. PARTICOLARE DI (15) È:

$$Y_0(x) = \alpha(x)\, e^{-\sin x} = (\sin x - 1)\, e^{\sin x} \cdot e^{-\sin x} = \sin x - 1$$

A QUESTO PUNTO, GRAZIE AL TEO. 3, POSSO DIRE CHE LE SOL DI (15) SONO TUTTE E SOLE LE $Y(x)$ DELLA FORMA:

$$Y(x) = (\sin x - 1) + \alpha\, e^{-\sin x} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\text{OSS.6}}$

SE L'EQUAZIONE LINEARE DA RISOLVERE È DI ORDINE 1, IL PROCEDIMENTO UTILIZZATO NELL' $\boxed{\text{ES.2}}$ FUNZIONA SEMPRE (A CONDIZIONE CHE SI POSSANO CALCOLARE LE PRIMITIVE DELLE FUNZIONI CHE SI OTTENGONO). RACCOGLIAMO QUESTO FATTO NEI SEGUENTI TEOREMI.

TEO. 4 SE $a(x) \in C((a,b))$, LA SOLUZIONE GENERALE DI:

$$y' + a(x)\,y = 0$$

È:

(19) $$y(x) = \alpha\, e^{-A(x)} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

DOVE $A(x)$ È UNA PRIMITIVA DI $a(x)$.

DIMO

LA VERIFICA DIRETTA MOSTRA CHE $y(x) = e^{-A(x)}$ È SOLUZIONE, DOPODICHÉ IL TEO. 2 GARANTISCE CHE LE **(19)** SONO TUTTE LE SOLUZIONI.

TEO. 5 SE $a(x), b(x) \in C((a,b))$, UNA SOL. PARTICOLARE DI:

(20) $$y' + a(x)\,y = b(x)$$

È DATA DA:

(21) $$y_0(x) = \alpha(x)\, e^{-A(x)}$$

DOVE $A(x)$ È UNA PRIMITIVA DI $a(x)$ E $\alpha(x)$ È UNA PRIMITIVA DI $b(x)\,e^{A(x)}$.

DIMO

LA VERIFICA DIRETTA MOSTRA CHE $y_0(x)$ È SOLUZIONE PERCHÉ SOSTITUENDO **(21)** IN **(20)** SI HA:

$$\left(\alpha(x) \cdot e^{-A(x)}\right)' + a(x) \cdot \alpha(x)\, e^{-A(x)} =$$

$$= \alpha'(x) \cdot e^{-A(x)} + \alpha(x) \cdot (-A(x))'\, e^{-A(x)} + a(x) \cdot \alpha(x)\, e^{-A(x)} =$$

$$= b(x)\, e^{A(x)} \cdot e^{-A(x)} + \cancel{\alpha(x) \cdot (-a(x))\, e^{-A(x)}} + \cancel{a(x) \cdot \alpha(x)\, e^{-A(x)}} =$$

$$= b(x)$$

OSS. 7 ANZICHÉ UTILIZZARE DIRETTAMENTE IL TEO. 5 PER TROVARE $y_0(x)$ È PIÙ FACILE RICORDARE CHE VA CERCATA UNA SOL. DEL TIPO $y_0(x) = \alpha(x)\, e^{-A(x)}$, CON $A(x)$ PRIMITIVA DI $a(x)$. PER TROVARE $\alpha(x)$ SENZA DOVERLO RICORDARE INFATTI BASTA SOSTITUIRE NELL'EQUAZIONE, OTTENENDO.

$$\left(\alpha(x)\, e^{-A(x)}\right)' + a(x) \cdot \alpha(x)\, e^{-A(x)} = b(x)$$

CIOÈ

$$\alpha'(x)\, e^{-A(x)} + \cancel{\alpha(x) \cdot (-a(x))\, e^{-A(x)}} + \cancel{a(x)\, \alpha(x)\, e^{-A(x)}} = b(x)$$

DA CUI SEGUE APPUNTO:

$$\alpha'(x) = b(x)\, e^{A(x)}.$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI (...CONTINUA...)

OSS. 1 PER AFFRONTARE CON MAGGIOR COMODITÀ LO STUDIO DELLE EQ. DIFF. LINEARI A COEFF. COSTANTI È CONVENIENTE PRIMA FAMILIARIZZARE COL CONCETTO DI DERIVATA DI UNA FUNZIONE $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. IN REALTÀ BASTA CONVINCERSI CHE NON CAMBIA NULLA, RISPETTO A CIÒ CHE GIÀ SI SA PER LE FUNZIONI A VALORI IN $\mathbb{R}$. (ALTRA COSA SAREBBE SE FOSSE $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, MA QUESTO LO STUDENTE LO IMPARERÀ AL TERZO ANNO)
NELLE PROSSIME DEFINIZIONI O TEOREMI RICHIAMEREMO IL MINIMO CHE CI SERVE SAPERE

DEF 1 DATI $x_0 \in (a,b)$ E $f:(a,b) \to \mathbb{C}$ DIREMO CHE f È DERIVABILE IN x_0 SE ESISTE FINITO IL LIMITE:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

TALE LIMITE SI INDICA CON $f'(x_0)$ E PRENDE IL NOME DI DERIVATA DI f NEL PUNTO x_0.

PROP. 1 DATA $f:(a,b) \to \mathbb{C}$, SIANO $a(x) = \mathrm{Re}(f(x))$ E $b(x) = \mathrm{Im}(f(x))$, CIOÈ SIA $f(x) = a(x) + i\,b(x)$. ALLORA f È DERIVABILE IN $x_0 \in (a,b)$ SE E SOLO SE LO SONO $a(x)$ E $b(x)$ E SI HA:

$$f'(x_0) = a'(x_0) + i\,b'(x_0)$$

DIMO BASTA OSSERVARE CHE:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a(x)+ib(x)-a(x_0)-ib(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{a(x)-a(x_0)}{x-x_0} + i \lim_{x \to x_0} \frac{b(x)-b(x_0)}{x-x_0} = a'(x_0) + i\,b'(x_0)$$

OSS. 2 VALGONO ANCORA LE PRINCIPALI PROPRIETÀ DELLA DERIVATA. NE ELENCHIAMO ALCUNE CHE CI SERVIRANNO, NELLE PROP. CHE SEGUONO.

PROP.2 DATE $f,g:(a,b)\to\mathbb{C}$, ENTRAMBE DERIVABILI IN $x_0\in(a,b)$. ALLORA VALGONO LE PROPRIETÀ:

1) f E g SONO CONTINUE IN x_0
2) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ $\alpha f+\beta g$ È DERIVABILE IN x_0 E $(\alpha f+\beta g)'(x_0)=\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0)$
3) $f\cdot g$ È DERIVABILE IN x_0 E $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$

DIMO OMESSA PERCHÉ IDENTICA A QUELLA DEL CASO REALE.

PROP.3 SIA $\lambda\in\mathbb{C}$ E $f(x)=e^{\lambda x}$. ALLORA $f'(x)=\lambda e^{\lambda x}$.

DIMO PER DEFINIZIONE, SE $\lambda=a+ib$ CON $a,b\in\mathbb{R}$, SI HA:

$$f(x)=e^{\lambda x}=e^{ax}\cdot(\cos bx+i\sin bx)$$

QUINDI:

$$f'(x)=\left(e^{ax}\cdot(\cos bx+i\sin bx)\right)'=$$

$$=a\cdot e^{ax}\cdot(\cos bx+i\sin bx)+e^{ax}\cdot(-b\sin bx+ib\cos bx)=$$

$$=(a+ib)\,e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)=\lambda e^{\lambda x}$$

OSS.3 RICORDIAMO CHE, GRAZIE AL TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA, OGNI POLINOMIO DI GRADO n, A COEFFICIENTI IN $\mathbb{C}$, È FATTORIZZABILE NEL PRODOTTO DI n POLINOMI DI I° GRADO. PIÙ PRECISAMENTE, SE

(1) $$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1 x+a_0 \qquad \text{CON } a_0,\dots,a_n\in\mathbb{C} \text{ E } a_n\neq 0,$$

ALLORA:

(2) $$P(x)=a_n\cdot(x-x_1)^{n_1}\cdot(x-x_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_k)^{n_k} \qquad \begin{pmatrix}\text{DOVE } x_1,\dots,x_k\in\mathbb{C}\\ \text{E } n_1+n_2+\dots+n_k=n\end{pmatrix}$$

DIREMO CHE x_i È RADICE DI $P(x)$ CON MOLTEPLICITÀ n_i (PER OGNI $i=1,\dots,k$)

OSSERVIAMO CHE SE, NELLA **(1)**, I COEFFICIENTI DI $P(x)$ SONO TUTTI REALI, ALLORA SE $\lambda\in\mathbb{C}$ È RADICE DI $P(x)$ CON MOLTEPLICITÀ n_1, ANCHE IL SUO

CONIUGATO $\bar{\lambda}$ LO È, CON LA STESSA MOLTEPLICITÀ.

QUESTO PERCHÉ SE λ SODDISFA $P(\lambda)=0$, CIOÈ

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

FACENDO IL CONIUGATO DI AMBO I MEMBRI, E RICORDANDO CHE $\overline{a_i} = a_i$ PERCHÉ $a_i \in \mathbb{R}$, SI OTTIENE:

$$a_n (\bar{\lambda})^n + a_{n-1} (\bar{\lambda})^{n-1} + \dots + a_1 \bar{\lambda} + a_0 = 0$$

QUINDI TUTTE LE VOLTE CHE DA $P(\lambda)$ POSSO RACCOGLIERE IL FATTORE $(x-\lambda)$, POSSO ANCHE RACCOGLIERE IL FATTORE $(x-\bar{\lambda})$.

MA POICHÈ $(x-\lambda)(x-\bar{\lambda}) = (x^2 + |\lambda|^2)$, DOPO AVER RACCOLTO I DUE FATTORI $(x-\lambda)$ E $(x-\bar{\lambda})$ SI OTTIENE UN POLINOMIO ANCORA A COEFF. REALI, SUL QUALE SI PUÒ RIAPPLICARE IL PROCEDIMENTO.

QUESTO SIGNIFICA CHE SE POSSO RACCOGLIERE $(x-\lambda)^i$ ALLORA POSSO RACCOGLIERE ANCHE $(x-\bar{\lambda})^i$, CHE È QUANTO VOLEVAMO MOSTRARE.

DEF. 2 (CASO PARTICOLARE DELLA DEF. 1 DI LEZ 23)

UN'EQ. DIFF. LINEARE A COEFFICIENTI COSTANTI DI ORDINE n È UN'EQ. DEL TIPO:

(3) $$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

DOVE $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ CON $a_n \neq 0$, E $b(x) \in C((a,b))$.

SE $b(x)$ È IDENTICAMENTE NULLA LA (3) SI DICE OMOGENEA, ALTRIMENTI SI DICE NON OMOGENEA. IN PARTICOLARE, DATA UN'EQ DI TIPO (3) NON OMOGENEA, L'EQUAZIONE OMOGENEA CHE HA LO STESSO I° MEMBRO SI DICE OMOGENEA AD ESSA ASSOCIATA.

IL POLINOMIO AVENTE GLI STESSI COEFFICIENTI DI (3), CIOÈ

(4) $$P(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

PRENDE IL NOME DI POLINOMIO CARATTERISTICO DI (3).

INFINE L'OPERATORE:

(5) $$\mathcal{L} : C^n(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$$
$$y(x) \longmapsto a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x)$$

VIENE DETTO OPERATORE LINEARE ASSOCIATO A (3). DIREMO CHE (4) È POLINOMIO CARATTERISTICO ANCHE DI $\mathcal{L}$.

OSS.4 ABBIAMO GIÀ OSSERVATO IN UN CASO PIÙ GENERALE (OSS.2 LEZ.23) CHE $\mathcal{L}$ È LINEARE E CHE LA **(3)** PUÒ ESSERE SCRITTA PIÙ SINTETICAMENTE COME:

$$\mathcal{L}(y) = b(x)$$

CIOÈ, LE SOLUZIONI DI **(3)** SONO LA CONTROIMMAGINE DI $b(x)$ TRAMITE $\mathcal{L}$.

ABBIAMO GIÀ DIMOSTRATO CHE TALE CONTROIMMAGINE È:

a) NEL CASO OMOGENEO, UN SSP. VETTORIALE DI DIM n DI $C^n(\mathbb{R})$ [TEO.2, LEZ 23]

b) NEL CASO NON OMOG., UN SSP. AFFINE DI DIM n DI $C^n(\mathbb{R})$ [TEO 3, LEZ 23]

ORA, NEL CASO PARTICOLARE DEI COEFF. COSTANTI, VOGLIAMO DARE UN METODO PER TROVARE ESPLICITAMENTE UNA BASE PER LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI.

ES.1 TROVARE TUTTE LE SOLUZ. DI: $y'' - 8y' + 15y = 0$

SVOLGIMENTO

LO SPAZIO S DI TUTTE LE SOL. HA DIM. 2, PERCHÉ L'EQ È DEL SECONDO ORDINE. BASTERÀ QUINDI TROVARE 2 SOL. INDIPENDENTI, PER AVERE UNA BASE.

IL POLINOMIO CARATTERISTICO È:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda-3)(\lambda-5)$$

HA 2 RADICI: $\lambda = 3$ E $\lambda = 5$.

SE PRENDIAMO LE 2 FUNZIONI

IL PERCHÉ ABBIAMO SCELTO PROPRIO QUESTE 2 FUNZIONI SARÀ CHIARO A FINE LEZIONE

$$v_1(x) = e^{3x} \quad \text{E} \quad v_2(x) = e^{5x}$$

SCOPRIAMO, SOSTITUENDOLE NELL'EQUAZIONE, CHE ENTRAMBE SONO SOLUZIONI.

AD ESEMPIO FACCIAMO IL CALCOLO CON $v_2(x)$:

$$(v_2(x))'' - 8\cdot(v_2(x))' + 15\cdot v_2(x) = (e^{5x})'' - 8(e^{5x})' + 15(e^{5x}) =$$

$$= (5e^{5x})' - 8\cdot 5 e^{5x} + 15\cdot e^{5x} =$$

$$= 5^2 e^{5x} - 8\cdot 5\, e^{5x} + 15\, e^{5x} =$$

$$= (5^2 - 8\cdot 5 + 15)\, e^{5x} = p(5)\, e^{5x} = 0$$

DA QUESTI ULTIMI PASSAGGI SI PUÒ SOSPETTARE (CON TANTO SENNO DEL POI) PERCHÉ SI SONO SCELTE LE RADICI DI $p(\lambda)$

LA VERIFICA È IDENTICA PER $v_1(x)$. QUINDI $v_1(x)$ E $v_2(x)$ SONO ENTRAMBE SOLUZIONI.

PER CONVINCERSI CHE SONO INDIPENDENTI BASTA OSSERVARE CHE HANNO ORDINI DI INFINITO DIVERSI PER $x \to +\infty$.

QUINDI $\mathcal{B} = \{v_1(x), v_2(x)\}$ È UNA BASE PER LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI, OVVERO LE SOLUZIONI SONO TUTTE E SOLE LE FUNZIONI DEL TIPO:

$$y(x) = \alpha e^{3x} + \beta e^{5x} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

OSS. 5 PER DIMOSTRARE IL TEO. PRINCIPALE DELLA LEZIONE, CI SERVONO ALCUNI LEMMI TECNICI SUGLI OPERATORI ASSOCIATI ALLE EQ DIFF LINEARI A COEFF. COSTANTI.

LEMMA 1 SIANO $\mathcal{L}_1$ E $\mathcal{L}_2$ DUE OPERATORI DIFFERENZIALI A COEFFICIENTI COSTANTI AVENTI COME POLINOMI CARATTERISTICI RISPETTIVAMENTE $p(\lambda)$ E $q(\lambda)$ DEFINITI DA:

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

$$q(\lambda) = b_m \lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0$$

ALLORA L'OPERATORE $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$ HA COME POLINOMIO CARATTERISTICO $p(\lambda)\cdot q(\lambda)$.

DIMO

SI OSSERVI CHE $p(\lambda)\cdot q(\lambda)$ È DATO DA:

$$p(\lambda)\cdot q(\lambda) = (a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n)\cdot(b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \dots + b_m\lambda^m) =$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\lambda + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)\lambda^2 + \dots + \Big(\sum_{i+j=k} a_i b_j\Big)\lambda^k + \dots + a_n b_m \lambda^{m+n} =$$

$$= \boxed{\sum_{k=0}^{m+n} \Big(\sum_{\substack{i+j=k \\ i\le n \ j\le m}} a_i b_j\Big)\lambda^k}$$

ORA, COMUNQUE SI PRENDA $y(x) \in C^{n+m}(\mathbb{R})$ SI HA:

$$(\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2)(y(x)) = \mathcal{L}_1(\mathcal{L}_2(y(x))) = \mathcal{L}_1\Big(\sum_{j=0}^{m} b_j y^{(j)}(x)\Big) = \sum_{j=0}^{m} b_j \mathcal{L}_1(y^{(j)}(x)) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} b_j \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i \big(y^{(j)}(x)\big)^{(i)}\Big) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} b_j a_i\, y^{(i+j)}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m+n} \Big(\sum_{\substack{i+j=k \\ i\le n \\ j\le m}} a_i b_j\Big) y^{(k)}(x) = \mathcal{L}(y(x))$$

OPERATORE AVENTE COME POL. CARATTERISTICO $\boxed{p(\lambda)\cdot q(\lambda)}$

COROLLARIO 1 SIANO $\mathcal{L}_1$ E $\mathcal{L}_2$ COME NEL LEMMA 1. ALLORA $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2 \circ \mathcal{L}_1$.

DIMO SEGUE SUBITO DAL FATTO CHE $p(\lambda)\cdot q(\lambda) = q(\lambda)\cdot p(\lambda)$.

---

8 maggio 2020 (9.00-11.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma *Tor Vergata*

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI (...CONTINUA...)

LEMMA 1 SIA $\alpha \in \mathbb{C}$ E $\mathcal{L}: C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ TALE CHE $\mathcal{L}(y(x)) = y'(x) - \alpha y(x)$.

ALLORA $\mathcal{L}$ HA LE SEGUENTI PROPRIETÀ

(a) $\mathcal{L}(e^{\alpha x}) = 0$

(b) SE $P(x)$ È UN POLINOMIO DI GRADO m ALLORA IL MINIMO k TALE CHE $\boxed{\mathcal{L}^k}(P(x)e^{\alpha x}) = 0$ È $k = m+1$

SIGNIFICA: $\underbrace{\mathcal{L}\circ\mathcal{L}\circ\dots\circ\mathcal{L}}_{k}$

(c) SE $\beta \neq \alpha$ E $P(x)$ È UN POLINOMIO ALLORA $\mathcal{L}(P(x)e^{\beta x}) = Q(x)e^{\beta x}$ CON $Q(x)$ POLINOMIO CHE HA LO STESSO GRADO DI $P(x)$.

DIMO

(a) $\mathcal{L}(e^{\alpha x}) = (e^{\alpha x})' - \alpha e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x} - \alpha e^{\alpha x} = 0$

(b) $\mathcal{L}(P(x)e^{\alpha x}) = (P(x)e^{\alpha x})' - \alpha P(x)e^{\alpha x} = P'(x)e^{\alpha x} + \cancel{P(x)\alpha e^{\alpha x}} - \cancel{\alpha P(x) e^{\alpha x}} = P'(x)e^{\alpha x}$

QUINDI:

$$\mathcal{L}^k(P(x)e^{\alpha x}) = (P(x))^{(k)} e^{\alpha x}$$

CIÒ SIGNIFICA CHE SE $P(x)$ HA GRADO m, IL MINIMO VALORE DI k CHE FA OTTENERE ZERO È $k = m+1$

(c) $\mathcal{L}(P(x)e^{\beta x}) = P'(x)e^{\beta x} + P(x)\beta e^{\beta x} - \alpha P(x)e^{\beta x} = (P'(x) + (\beta-\alpha)P(x))\, e^{\beta x}$

SE $\alpha \neq \beta$ IL GRADO DI $P(x)$ È LO STESSO DI $P'(x) + (\beta-\alpha)P(x)$.

TEO. 1 DATI $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, CON $a_n \neq 0$ SI CONSIDERI L'EQUAZIONE DIFF.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

SI SUPPONGA CHE LE RADICI DEL SUO POL. CARATTERISTICO $p(\lambda)$, SIANO $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ CON MOLTEPLICITÀ RISPETTIVAMENTE $m_1, \dots, m_k$.

ALLORA UNA BASE PER LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI S È DATA DA

$$\mathcal{B} = \{ e^{\alpha_1 x}, x e^{\alpha_1 x}, \dots, x^{m_1 - 1} e^{\alpha_1 x},$$
$$e^{\alpha_2 x}, x e^{\alpha_2 x}, \dots, x^{m_2 - 1} e^{\alpha_2 x},$$
$$\vdots$$
$$e^{\alpha_k x}, x e^{\alpha_k x}, \dots, x^{m_k - 1} e^{\alpha_k x} \}$$

DIMO

$\mathcal{B}$ È COMPOSTA DA $m_1+m_2+\dots+m_k$ ELEMENTI, MA GRAZIE AL TEO. FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA $m_1+m_2+\dots+m_k=n$. DI CONSEGUENZA, SICCOME $\dim(S)=n$, UNA VOLTA VERIFICATO CHE $\mathcal{B}\subset S$, BASTERÀ MOSTRARE L'INDIPENDENZA LINEARE PER AVERE CHE $\mathcal{B}$ È UNA BASE. DOBBIAMO QUINDI DIMOSTRARE 2 COSE:

(I) OGNI ELEMENTO DI $\mathcal{B}$ È UNA SOLUZIONE.

(II) $\mathcal{B}$ È UN INSIEME LINEARMENTE INDIPENDENTE.

A TALE SCOPO, DETTO $\mathcal{L}$ L'OPERATORE CHE HA COME POL. CARATTERISTICO LO STESSO $P(\lambda)$ DELL'EQUAZIONE. SAPPIAMO CHE

$$P(\lambda)=a_n(\lambda-\alpha_1)^{m_1}(\lambda-\alpha_2)^{m_2}\dots(\lambda-\alpha_k)^{m_k}$$

QUINDI, SE INDICHIAMO CON $\mathcal{L}_i$ L'OPERATORE

(1) $$\mathcal{L}_i(y(x))=y'(x)-\alpha_i y(x)$$

AVREMO CHE:

(2) $$\mathcal{L}(y)=a_n\cdot\mathcal{L}_1^{m_1}\circ\mathcal{L}_2^{m_2}\circ\dots\circ\mathcal{L}_k^{m_k}$$

SI NOTI CHE, GRAZIE AL LEMMA 1, OGNI FUNZIONE DEL TIPO $x^p\cdot e^{\alpha_i x}$, CON $p<m_i$, SODDISFA:

$$\mathcal{L}_i^{m_i}(x^p e^{\alpha_i x})=0$$

QUINDI SODDISFA ANCHE:

$$\mathcal{L}(x^p e^{\alpha_i x})=0$$

PERCHÈ NELLA **(2)** POSSO SEMPRE CAMBIARE L'ORDINE DEGLI OPERATORI IN MODO CHE IL PRIMO AD AGIRE SIA $\mathcal{L}_i^{m_i}$.

QUINDI OGNI ELEMENTO DI $\mathcal{B}$ È SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE.

MOSTRIAMO CHE SONO INDIPENDENTI.

SE COSÌ NON FOSSE ESISTEREBBE UNA LORO COMB. LINEARE A COEFF. NON TUTTI NULLI UGUALE ALLA FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA, CIOÈ ESISTEREBBERO k POLINOMI $A_1(x), A_2(x),\dots,A_k(x)$ NON TUTTI IDENTICAMENTE NULLI TALI CHE

(3) $$A_1(x)e^{\alpha_1 x}+A_2(x)e^{\alpha_2 x}+\dots+A_k(x)e^{\alpha_k x}=0$$

CON $\text{grado}(A_i(x))<m_i$, PER OGNI $i=1,\dots,k$.

SUPPONIAMO CHE SIA $A_{i_0}(x)$ NON IDENTICAMENTE NULLO. SE GLI $\mathcal{L}_i$ SONO ANCORA GLI OPERATORI DEFINITI DA **(1)**, APPLICHIAMO AD AMBO I MEMBRI DI **(3)** L'OPERATORE OTTENUTO COMPONENDO TUTTI GLI OPERATORI $\mathcal{L}_i^{m_i}$, CON $i \neq i_0$.

IN TAL MODO, GRAZIE AL LEMMA 1, LA **(3)** DIVENTA

$$B_{i_0}(x) \cdot e^{a_{i_0} x} = 0$$

CON $\text{grado}(B_{i_0}(x)) = \text{grado}(A_{i_0}(x))$. CHE È ASSURDO VISTO CHE $B_{i_0}(x)$ È UN POLINOMIO NON NULLO.

OSS. 1 NEL $\boxed{\text{TEO. 1}}$ GLI ELEMENTI DELLA BASE $\mathcal{B}$ SONO IN GENERALE FUNZIONI A VALORI IN $\mathbb{C}$ MENTRE, VISTO CHE I COEFFICIENTI DELL'EQUAZ. SONO TUTTI REALI, CI PIACEREBBE AVERE FUNZIONI A VALORI IN $\mathbb{R}$. VEDIAMO COME FARE.

PER COMODITÀ SCRIVIAMO:

(4) $$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\lambda_1} \cup \mathcal{B}_{\lambda_2} \cup \dots \cup \mathcal{B}_{\lambda_k}$$

DOVE, PER OGNI $i = 0, 1, \dots, k$, SI È POSTO:

$$\mathcal{B}_{\lambda_i} = \{ e^{\lambda_i x}, x e^{\lambda_i x}, \dots, x^{m_i - 1} e^{\lambda_i x} \}$$

ABBIAMO GIÀ VISTO CHE, ESSENDO REALI I COEFF. DEL POL. CARATTERISTICO, PER OGNI λ_i, SE NON È REALE, CI SARÀ TRA LE ALTRE RADICI $\lambda_j = \bar{\lambda}_i$ CON $m_i = m_j$.

QUINDI IN REALTÀ SE INDICHIAMO CON r_i LE RADICI REALI E CON c_i E $\bar{c}_i$ LE COPPIE DI RADICI COMPLESSE CONIUGATE, LA **(4)** PUÒ ESSERE SCRITTA:

(5) $$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{r_1} \cup \dots \cup \mathcal{B}_{r_p} \cup \mathcal{B}_{c_1} \cup \mathcal{B}_{\bar{c}_1} \cup \dots \cup \mathcal{B}_{c_q} \cup \mathcal{B}_{\bar{c}_q}$$

SI NOTI CHE PER OGNI $j = 1, \dots, q$ SI HA:

$$\mathcal{B}_{c_j} \cup \mathcal{B}_{\bar{c}_j} = \{ e^{c_j x}, e^{\bar{c}_j x}, x e^{c_j x}, x e^{\bar{c}_j x}, \dots, x^{m_j - 1} e^{c_j x}, x^{m_j - 1} e^{\bar{c}_j x} \}$$

ORA, VISTO CHE $c_j = a_j + i b_j$ E $\bar{c}_j = a_j - i b_j$, SI HA:

$$e^{c_j x} = 1 \cdot e^{a_j x} \cos b_j x + i \cdot e^{a_j x} \sin b_j x$$

E

$$e^{\bar{c}_j x} = 1 \cdot e^{a_j x} \cos b_j x - i \cdot e^{a_j x} \sin b_j x$$

D'ALTRA PARTE

$$e^{a_j x}\cos b_j x = \frac{1}{2} e^{c_j x} + \frac{1}{2} e^{\bar{c}_j x}$$

E

$$e^{a_j x}\sin b_j x = \frac{1}{2i} e^{c_j x} - \frac{1}{2i} e^{\bar{c}_j x}$$

DI CONSEGUENZA:

$$\mathrm{Span}\{\mathcal{B}_{c_j} \cup \mathcal{B}_{\bar{c}_j}\} = \mathrm{Span}\,\mathcal{B}_j$$

DOVE ABBIAMO DEFINITO:

$$\mathcal{B}_j = \{ e^{a_j x}\cos b_j x, x e^{a_j x}\cos b_j x, \dots, x^{m_j - 1} e^{a_j x}\cos b_j x, \tag{6}$$
$$e^{a_j x}\sin b_j x, x e^{a_j x}\sin b_j x, \dots, x^{m_j - 1} e^{a_j x}\sin b_j x \}$$

ESSENDO a_j E b_j, RISPETTIVAMENTE, PARTE REALE E IMMAGINARIA DELLA RADICE c_j DEL POLINOMIO CARATTERISTICO.

DI CONSEGUENZA, PER GENERARE LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI, INVECE DI **(5)** POSSO PRENDERE:

$$\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_{r_1} \cup \dots \cup \mathcal{B}_{r_p} \cup \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p \tag{7}$$

DOVE, PER OGNI $j = 1, \dots, q$, $\mathcal{B}_j$ È DEFINITO DA **(6)**.

SICCOME $\tilde{\mathcal{B}}$ HA ESATTAMENTE n ELEMENTI E LO SPAZIO DA LUI GENERATO, CIOÈ LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI, HA DIMENSIONE n, GLI ELEMENTI DI $\tilde{\mathcal{B}}$ SONO PER FORZA LINEARMENTE INDIPENDENTI.

SI NOTI CHE, PUR ESSENDO $\tilde{\mathcal{B}}$ UNA BASE PER LO SPAZIO DELLE SOL. A VALORI <u>COMPLESSI</u> DELL'EQUAZIONE, LE n FUNZIONI CHE STANNO IN $\tilde{\mathcal{B}}$ SONO A VALORI <u>REALI</u>.

SI NOTI ANCHE CHE SE $\tilde{\mathcal{B}}$ È LINEARMENTE INDIPENDENTE PRENDENDO COME CAMPO DI SCALARI $\mathbb{C}$, LO È A MAGGIOR RAGIONE SU $\mathbb{R}$. QUINDI $\tilde{\mathcal{B}}$ È UNA BASE ANCHE PER LO SPAZIO DELLE SOL. A VALORI IN $\mathbb{R}$, CHE È CIÒ CHE CERCAVAMO.

ES. 1 TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DI: $y^{(5)} + 3y^{(4)} + 4y' + 12y = 0$

SVOLGIMENTO

IL POLINOMIO CARATTERISTICO È:

$$p(\lambda) = \lambda^5 + 3\lambda^4 + 4\lambda + 12 = (\lambda^4 + 4)(\lambda + 3)$$

LE CUI 5 RADICI SONO $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1+i$, $\lambda_3 = 1-i$, $\lambda_4 = -1+i$, $\lambda_5 = -1-i$.

A PARTIRE DA ESSE COSTRUIAMO LE FUNZIONI CHE STANNO IN $\tilde{\mathcal{B}}$.

$$\lambda_1 = -3 \longrightarrow e^{-3x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_2 = 1+i \\ \lambda_3 = 1-i\end{array}\right\} \longrightarrow e^{x}\cos x, \; e^{x}\sin x$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_4 = -1+i \\ \lambda_5 = -1-i\end{array}\right\} \longrightarrow e^{-x}\cos x, \; e^{-x}\sin x$$

QUINDI LA SOL. GENERALE DELLA NOSTRA EQUAZIONE È:

$$y(x) = A e^{-3x} + B e^{x}\cos x + C e^{x}\sin x + D e^{-x}\cos x + E e^{-x}\sin x \qquad A,B,C,D,E \in \mathbb{R}$$

ES. 2 TROVARE TUTTE LE SOLUZIONI DI: $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 8y'' - 8y' + 4y = 0$

SVOLGIMENTO

IL POLINOMIO CARATTERISTICO È:

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4$$

SE SI PROVA A FATTORIZZARLO SI OTTIENE:

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = \dots = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2$$

MA L'EQUAZIONE:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

HA SOLUZIONI $\lambda_1 = 1+i$ E $\lambda_2 = 1-i$

QUINDI λ_1 E λ_2 SONO ANCHE RADICI DI $p(\lambda)$, CON MOLTEPLICITÀ 2.

A PARTIRE DA ESSE COSTRUIAMO LE SOLUZIONI:

$$\text{MOLT.}=2 \quad \left.\begin{array}{l}\lambda_1 = 1+i \\ \lambda_2 = 1-i\end{array}\right\} \longrightarrow e^{x}\cos x, \; e^{x}\sin x, \; xe^{x}\cos x, \; xe^{x}\sin x$$

QUINDI LA SOL. GENERALE È:

$$y(x) = (A + Bx)e^{x}\cos x + (C + Dx)e^{x}\sin x$$

CASO NON OMOGENEO

ES. 3 TROVARE LA SOL. GENERALE DI

(8)
$$y''-y'-2y=e^{x}$$

SVOLGIMENTO

PRIMA RISOLVIAMO L'OMOGENEA ASSOCIATA:

(9)
$$y''-y'-y=0$$

IL CUI POLINOMIO CARATT. $p(\lambda)=\lambda^2-\lambda-1$ HA RADICI $\lambda_1=-1$ E $\lambda_2=2$.

QUINDI LA SOL. GEN. DI **(9)** E':

(10)
$$y(x)=\alpha e^{-x}+\beta e^{2x} \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

SAPPIAMO CHE SE TROVIAMO UNA SOL. $y_0(x)$ DELLA NON OMOGENEA ABBIAMO CONCLUSO, PERCHÉ LA SOL. GENERALE È:

$$y(x)=y_0(x)+\alpha e^{-x}+\beta e^{2x} \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

CI SERVE QUINDI UN MODO PER TROVARE UNA SOL. PARTICOLARE $y_0(x)$ DELLA NON OMOGENEA.

NE FAREMO VEDERE 2.

1° MODO (METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI)

CONSISTE NEL CERCARE $y_0(x)$ TRA LE FUNZIONI DEL TIPO

(11)
$$y_0(x)=\alpha(x)e^{-x}+\beta(x)e^{2x}$$

CIOÈ TRA LE FUNZIONI FATTE COME LA SOLUZIONE GENERALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA MA CON LE COSTANTI α E β CHE DIVENTANO FUNZIONI. (DA QUI IL NOME DEL METODO)

CI CHIEDIAMO DUNQUE COME SCEGLIERE $\alpha(x)$ E $\beta(x)$ NELLA **(11)** AFFINCHÈ $y_0(x)$ SODDISFI L'EQUAZIONE **(8)**.

SI NOTI CHE IN QUESTO MODO LE INCOGNITE SONO 2: $\alpha(x)$ E $\beta(x)$.

TUTTAVIA L'EQUAZIONE CHE DEVONO SODDISFARE È UNA SOLA: QUELLA CHE SI OTTIENE SOSTITUENDO LA **(11)** IN **(8)**.

SICCOME PERÒ NON CI INTERESSA TROVARE TUTTE LE COPPIE $(\alpha(x),\beta(x))$ CHE VANNO BENE, MA CI BASTA UNA COPPIA SOLA, SIAMO LIBERI DI AGGIUNGERE UN'ALTRA EQUAZIONE AD ARBITRIO NOSTRO, CHE SCEGLIEREMO IN MODO DA RENDERE PIÙ FACILI I CALCOLI.

PER SOSTITUIRE $y_0(x)$ IN **(8)** COMINCIAMO A CALCOLARE $y_0'(x)$ E $y_0''(x)$.

COMINCIAMO DA $y_0'(x)$. SI HA:

$$y_0'(x) = \left(\alpha(x)\, e^{-x} + \beta(x) e^{2x} \right)' = \underbrace{\alpha'(x) e^{-x} + \beta'(x) e^{2x}}_{(*)} - \alpha(x) e^{-x} + 2\beta(x) e^{2x}$$

A QUESTO PUNTO DECIDO CHE L'EQUAZIONE IN PIÙ CHE POSSO AGGIUNGERE È:

(12) $$\alpha'(x) e^{-x} + \beta'(x) e^{2x} = 0$$

IN TAL MODO SCOMPARE IL TERMINE (*) E SI OTTIENE:

$$y_0'(x) = -e^{-x}\alpha(x) + 2e^{2x}\beta(x)$$

DA CUI RICAVO:

$$y_0''(x) = e^{-x}\alpha(x) + 4e^{2x}\beta(x) - e^{-x}\alpha'(x) + 2e^{2x}\beta'(x)$$

SOSTITUENDO $y_0(x)$, $y_0'(x)$ E $y_0''(x)$ IN (8) SI OTTIENE:

$$\cancel{e^{-x}\alpha(x)} + \cancel{4e^{2x}\beta(x)} - e^{-x}\alpha'(x) + 2e^{2x}\beta'(x) + \cancel{e^{-x}\alpha(x)} - \cancel{2e^{2x}\beta(x)} - \cancel{2e^{-x}\alpha(x)} - \cancel{2e^{2x}\beta(x)} = e^{x}$$

CIOÈ:

(13) $$-e^{-x}\alpha'(x) + 2e^{2x}\beta'(x) = e^{x}$$

QUEST'ULTIMA EQUAZIONE, ACCOPPIATA CON LA (12), CHE ABBIAMO FISSATO NOI, CI PERMETTE DI TROVARE $\alpha'(x)$ E $\beta'(x)$. INFATTI IL SISTEMA CHE SI OTTIENE:

$$\begin{cases} e^{-x}\alpha'(x) + e^{2x}\beta'(x) = 0 \\ -e^{-x}\alpha'(x) + 2e^{2x}\beta'(x) = e^{x} \end{cases}$$

ESPLICITANDO RISPETTO AD $\alpha'(x)$ E $\beta'(x)$ CI FORNISCE:

$$\begin{cases} \alpha'(x) = -\frac{1}{3} e^{2x} \\ \beta'(x) = \frac{1}{3} e^{-x} \end{cases}$$

QUINDI UNA SCELTA POSSIBILE PER $\alpha(x)$ E $\beta(x)$ È:

$$\begin{cases} \alpha(x) = -\frac{1}{6} e^{2x} \\ \beta(x) = -\frac{1}{3} e^{-x} \end{cases}$$

QUINDI SI OTTIENE:

$$y_0(x) = \alpha(x)\, e^{-x} + \beta(x)\, e^{2x} = -\frac{1}{6} e^{2x} \cdot e^{-x} - \frac{1}{3} e^{-x} e^{2x} = -\frac{1}{2} e^{x}$$

LA VERIFICA DIRETTA MOSTRA CHE TALE $y_0(x)$ VA BENE:

$$\left(-\frac{1}{2} e^{x}\right)'' - \left(-\frac{1}{2} e^{x}\right)' - 2\left(-\frac{1}{2} e^{x}\right) = -\frac{1}{2} e^{x} + \frac{1}{2} e^{x} + e^{x} = e^{x}$$

QUINDI LA SOL. GENERALE DELLA NON OMOGENEA È:

$$y(x) = -\frac{1}{2} e^{x} + \alpha\, e^{-x} + \beta\, e^{2x} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$\boxed{2^{\circ} \text{ MODO}}$ (METODO DELL'ANNICHILATORE)

(.... CONTINUA NELLA LEZ. 26 ...)

11 maggio 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI (...CONTINUA...)

(... CONTINUA DA ES.3 LEZ. 25 ...)

$\boxed{2^\circ \text{ MODO}}$ (METODO DELL'ANNICHILATORE)

LA NOSTRA EQUAZIONE:

$$y''-y'-2y=e^x$$

PUÒ ESSERE RISCRITTA:

(1) $$\mathcal{L}(y)=e^x$$

DOVE $\mathcal{L}$ È L'OPERATORE CON POL. CARATTERISTICO $p(\lambda)=\lambda^2-\lambda-2$.

MI SERVE ORA UN OPERATORE $\mathcal{L}_0$ TALE CHE $\mathcal{L}_0(e^x)=0$. A TALE SCOPO BASTA PRENDERE $\mathcal{L}_0$ IN MODO CHE IL SUO POL. CARATTERISTICO SIA $p_0(\lambda)=\lambda-1$.

APPLICANDO $\mathcal{L}_0$ IN AMBO I MEMBRI DELLA (1) OTTENGO:

$$\mathcal{L}_0\big(\mathcal{L}(y)\big)=\mathcal{L}_0(e^x)$$

CIOÈ:

(2) $$(\mathcal{L}_0\circ\mathcal{L})(y)=0$$

SI NOTI CHE OGNI SOLUZIONE DI (1) È ANCHE SOL. DI (2), MA NON VICEVERSA.

SICCOME $\mathcal{L}_0\circ\mathcal{L}$ HA COME POLINOMIO CARATTERISTICO:

$$p_0(\lambda)\cdot p(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda-2)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$$

LA SOL. GENERALE DI (2) È:

(3) $$y(x)=\alpha e^{-x}+\beta e^{2x}+\gamma e^x$$

QUINDI BASTA CERCARE $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ IN MODO CHE (3) SODDISFI $\mathcal{L}(y)=e^x$.

NOTIAMO PERÒ CHE, SICCOME $\mathcal{L}(\alpha e^{-x}+\beta e^{2x})=0 \quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, BASTERÀ CERCARE UNA SOL. DI $\mathcal{L}(y)=e^x$ TRA LE FUNZIONI DEL TIPO:

(4) $$y(x)=\gamma e^x \qquad \text{CON } \gamma\in\mathbb{R}.$$

FACCIAMOLO:

$$(\gamma e^x)'' - (\gamma e^x)' - 2(\gamma e^x) = e^x$$

$$\gamma e^x - \gamma e^x - 2\gamma e^x = e^x$$

$$-2\gamma e^x = e^x$$

$$-2\gamma = 1$$

$$\gamma = -\frac{1}{2}$$

QUINDI UNA SOL. PARTICOLARE DELLA NON OMOGENEA È DATA DA $y_0(x) = -\frac{1}{2}e^x$.

QUINDI LA SOL. GENERALE È:

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^x + \alpha e^{-x} + \beta e^{2x} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{OSS.1}}$ (METODO DELL'ANNICHILATORE - CASO GENERALE)

DATA UN'EQUAZIONE DEL TIPO:

(5) $$\mathcal{L}(y) = b(x)$$

CON $\mathcal{L}$ OPERATORE DIFF. LINEARE A COEFFICIENTI COSTANTI DI ORDINE n.

SE $b(x)$ È DI UNO DEI 3 TIPI:

(6) $$b(x) = q(x)\, e^{ax}$$

(7) $$b(x) = q(x)\, e^{ax} \cos bx$$

(8) $$b(x) = q(x)\, e^{ax} \sin bx$$

$q(x)$ È UN POLINOMIO DI GRADO k E $a, b \in \mathbb{R}$

SI RIESCE A TROVARE UN OPERATORE DIFFERENZIALE LINEARE A COEFF. COSTANTI $\tilde{\mathcal{L}}$ TALE CHE $\tilde{\mathcal{L}}(b(x)) = 0$. A QUESTO PUNTO APPLICO $\tilde{\mathcal{L}}$ AD AMBO I MEMBRI DI (5)

E OTTENGO:

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathcal{L}(y)) = \tilde{\mathcal{L}}(b(x))$$

CIOÈ

(9) $$(\tilde{\mathcal{L}} \circ \mathcal{L})(y) = 0$$

CHE È OMOGENEA E QUINDI SO RISOLVERE.

SI NOTI CHE L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DI (5) È UN SOTTOINSIEME DELL'INSIEME DELLE SOLUZIONI DI (9), QUINDI BASTA CERCARE LA SOL. $y_0(x)$ TRA QUESTE ULTIME.

VEDIAMO COSA SUCCEDE IN DETTAGLIO NEI CASI (6), (7) E (8).

NEL SEGUITO $P(\lambda)$ INDICA SEMPRE IL POL. CAR. DI $\mathcal{L}$ E $\mathcal{B}=\{v_1(x),\dots,v_n(x)\}$ INDICA LA BASE FATTA DI FUNZIONI REALI COSTRUITA A PARTIRE DALLE RADICI DI $P(\lambda)$ PER LO SPAZIO DELLE SOL. DI $\mathcal{L}(y)=0$.

CASO (6) $\boxed{b(x)=q(x)e^{ax} \quad \text{CON } a\in\mathbb{R} \text{ E } q(x) \text{ POL. DI GRADO } k.}$

IN TAL CASO $\tilde{\mathcal{L}}=\mathcal{L}_a^{k+1}$ DOVE $\mathcal{L}_a(y)=y'-ay$, QUINDI OGNI SOL. DI

(10) $$\mathcal{L}(y)=b(x)$$

È ANCHE SOL. DI:

(11) $$\left(\mathcal{L}_a^{k+1}\circ\mathcal{L}\right)(y)=0$$

DISTINGUIAMO 2 SOTTOCASI:

I $\boxed{a \text{ NON COMPARE TRA LE RADICI DI } P(\lambda).}$

IN TAL CASO UNA BASE PER LO SPAZIO DELLE SOL DI (11) È DATA DA:

$$\mathcal{B}\cup\{e^{ax}, xe^{ax},\dots,x^k e^{ax}\}$$

QUINDI LA SOLUZIONE GENERALE (11) È:

(12) $$y(x)=\alpha_1 v_1(x)+\dots+\alpha_n v_n(x)+\beta_0 e^{ax}+\beta_1 xe^{ax}+\dots+\beta_k x^k e^{ax} \qquad \alpha_i,\beta_j\in\mathbb{R}$$

DI ESSE QUELLE CHE SODDISFANO $\mathcal{L}(y)=b(x)$ SONO TUTTE E SOLE QUELLE TALI CHE:

$$\mathcal{L}\left(\alpha_1 v_1(x)+\dots+\alpha_n v_n(x)+\beta_0 e^{ax}+\beta_1 xe^{ax}+\dots+\beta_k x^k e^{ax}\right)=b(x)$$

CIOÈ TALI CHE:

(13) $$\mathcal{L}\left(\beta_0 e^{ax}+\beta_1 xe^{ax}+\dots+\beta_k x^k e^{ax}\right)=b(x)$$

SICCOME SAPPIAMO GIÀ CHE LE SOL. DI $\mathcal{L}(y)=b(x)$ SONO TUTTE CONTENUTE IN (12)

ALLORA C'È ALMENO UN MODO DI SCEGLIERE $\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_k\in\mathbb{R}$ IN MODO CHE VALGA (13).

TALE MODO IN REALTÀ È UNICO PERCHÈ SE CE NE FOSSE UN'ALTRO:

(14) $$\mathcal{L}\left(\beta_0' e^{ax}+\beta_1' xe^{ax}+\dots+\beta_k' x^k e^{ax}\right)=b(x)$$

ALLORA, SOTTRAENDO MEMBRO A MEMBRO (13) E (14) SI AVREBBE:

$$\mathcal{L}\left((\beta_0-\beta_0')e^{ax}+(\beta_1-\beta_1')xe^{ax}+\dots+(\beta_k-\beta_k')x^k e^{ax}\right)=0$$

CIOÈ CI SAREBBE UNA COMB. LINEARE DI $\{e^{ax}, xe^{ax},\dots,x^k e^{ax}\}$ CON COEFF. NON TUTTI NULLI CHE SODDISFA $\mathcal{L}(y)=0$ E QUINDI STA IN $\mathrm{Span}(\mathcal{B})$. MA CIÒ È ASSURDO

PERCHÉ $\mathcal{B} \cup \{e^{ax}, \dots, x^k e^{ax}\}$ È UN INSIEME DI ELEMENTI INDIPENDENTI.

QUINDI ESISTE ESATTAMENTE UN MODO DI SCEGLIERE $\beta_0, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$ IN:

(15)
$$Y_0(x) = \beta_0 e^{ax} + \dots + \beta_k x^k e^{ax}$$

IN MODO CHE $\mathcal{L}(Y_0(x)) = b(x)$

II $\boxed{a \text{ È RADICE DI } p(a) \text{ CON MOLTEPLICITÀ } m.}$

IN TAL CASO $\mathcal{B}$ CONTIENE GIÀ $e^{ax}, xe^{ax}, \dots, x^{m-1}e^{ax}$, QUINDI LA BASE PER LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DI **(11)** STAVOLTA È:

$$\mathcal{B} \cup \{x^m e^{ax}, x^{m+1} e^{ax}, \dots, x^{m+k} e^{ax}\}$$

PROCEDENDO COME NEL PUNTO **I** SI TROVA CHE $\exists!\ Y_0(x)$ SOLUZIONE DI $\mathcal{L}(Y_0) = b(x)$ DELLA FORMA:

(16)
$$Y_0(x) = \beta_0 x^m e^{ax} + \beta_1 x^{m+1} e^{ax} + \dots + \beta_k x^{m+k} e^{ax}$$

$\boxed{\text{CASO } (2)}$ $\boxed{b(x) = q(x)e^{ax}\cos bx \quad \text{CON } a, b \in \mathbb{R} \text{ E } q(x) \text{ POLINOMIO DI GRADO } k.}$

STAVOLTA, POSTO $\lambda_0 = a + ib$ (E QUINDI $\bar{\lambda}_0 = a - ib$), SIANO

$$\mathcal{L}_1(Y) = Y' - \lambda_0 Y \quad \text{E} \quad \mathcal{L}_2(Y) = Y' - \bar{\lambda}_0 Y.$$

SICCOME:

$$b(x) = q(x)e^{ax}\cos bx = q(x)\,\frac{e^{\lambda_0 x} + e^{\bar{\lambda}_0 x}}{2}$$

SI HA:
$$\left(\mathcal{L}_1^{(k+1)} \circ \mathcal{L}_2^{(k+1)}\right)(b(x)) = 0$$

QUINDI, APPLICANDO AD AMBO I MEMBRI DI:

(17)
$$\mathcal{L}(Y) = b(x)$$

L'OPERATORE $\mathcal{L}_1^{(k+1)} \circ \mathcal{L}_2^{(k+1)}$, SI OTTIENE

(18)
$$\left(\mathcal{L}_1^{(k+1)} \circ \mathcal{L}_2^{(k+1)} \circ \mathcal{L}\right)(Y) = 0$$

QUINDI TUTTE LE SOLUZIONI DI **(17)** SONO ANCHE SOL. DI **(18)**.

ORA, DETTA m LA MOLTEPLICITÀ CON CUI $\lambda_0 = a + ib$ COMPARE TRA LE RADICI DI $p(\lambda)$ (INTENDENDO CHE, SE NON VI COMPARE, SIGNIFICA CHE $m = 0$), AVREMO CHE ANCHE $\bar{\lambda}_0 = a - ib$ VI COMPARE CON LA STESSA MOLTEPLICITÀ m, QUINDI UNA BASE PER LO SPAZIO

DELLE SOLUZIONI DI **(18)** È DATA DA:

$$\mathcal{B} \cup \{ x^m e^{ax} \cos bx,\ x^{m+1} e^{ax} \cos bx, \dots, x^{m+k} e^{ax} \cos bx,$$
$$x^m e^{ax} \sin bx,\ x^{m+1} e^{ax} \sin bx, \dots, x^{m+k} e^{ax} \sin bx \}$$

RAGIONANDO COME NEI PUNTI PRECEDENTI SI TROVA CHE UNA E UNA SOLA $Y_0(x)$ SOLUZIONE DI **(17)** DELLA FORMA:

$$Y_0(x) = \beta_0 x^m e^{ax} \cos bx + \dots + \beta_k x^{m+k} e^{ax} \cos bx + \gamma_0 x^m e^{ax} \sin bx + \dots + \gamma_k x^{m+k} e^{ax} \sin bx$$

CASO (8) $b(x) = q(x) e^{ax} \sin bx$ CON $a, b \in \mathbb{R}$ E $q(x)$ POLINOMIO DI GRADO k.

IDENTICO AL CASO **(7)**

RIASSUMIAMO QUANTO APPENA DIMOSTRATO NEI 2 SEGUENTI TEOREMI:

TEO. 1 DATA L'EQ. DIFF.

(19) $$a_n Y^{(n)} + a_{n-1} Y^{(n-1)} + \dots + a_1 Y' + a_0 Y = b(x)$$

CON $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ E $b(x) = q(x) e^{ax}$, CON $a \in \mathbb{R}$ E $q(x)$ POL DI GRADO k.

INDICHIAMO CON $P(\lambda)$ IL POL. CARATTERISTICO DELL'EQUAZIONE E SIA m LA MOLTEPLICITÀ CON CUI a COMPARE TRA LE RADICI DI $P(\lambda)$ (SI CONVIENE CHE $m=0$ SIGNIFICA CHE NON È RADICE DI $P(\lambda)$).

ALLORA $\exists!\ Y_0(x)$ SOL. DI **(19)** DELLA FORMA:

$$Y_0(x) = \beta_0 x^m e^{ax} + \beta_1 x^{m+1} e^{ax} + \dots + \beta_k x^{m+k} e^{ax} \quad \text{CON OPPORTUNI } \beta_0, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$$

TEO. 2 DATA L'EQ. DIFF.

(20) $$a_n Y^{(n)} + a_{n-1} Y^{(n-1)} + \dots + a_1 Y' + a_0 Y = b(x)$$

CON $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ E $b(x) = q(x) e^{ax} \cos bx$ (OPPURE $b(x) = q(x) e^{ax} \sin bx$), DOVE $a, b \in \mathbb{R}$ E $q(x)$ È UN POLINOMIO DI GRADO k. INOLTRE, INDICATO CON $P(\lambda)$ IL POL. CARATTERISTICO DI **(20)**, SIA m LA MOLTEPLICITÀ CON CUI $a+ib$ COMPARE TRA LE RADICI DI $P(\lambda)$ (SE NON È RADICE DI $P(\lambda)$ DIREMO CHE $m=0$).

ALLORA ESISTE UNA E UNA SOLA $Y_0(x)$, SOLUZ. DI **(20)**, DELLA FORMA:

$$Y_0(x) = \beta_0 x^m e^{ax} \cos bx + \dots + \beta_k x^{m+k} e^{ax} \cos bx + \gamma_0 x^m e^{ax} \sin bx + \dots + \gamma_k x^{m+k} e^{ax} \sin bx.$$

CON OPPORTUNI $\beta_0, \dots, \beta_k, \gamma_0, \dots, \gamma_k \in \mathbb{R}$.

ES. 1 RISOLVERE

(21)

$$y^{(3)}+y''+y'+y=e^{-x}$$

SVOLGIMENTO

L'OMOGENEA ASSOCIATA È:

$$y^{(3)}+y''+y'+y=0$$

E IL POL. CARATTERISTICO È:

$$p(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1=(\lambda^2+1)(\lambda+1)$$

LE CUI RADICI SONO:

$\lambda_1=-1$ CON $m_1=1$ $\longrightarrow$ e^{-x}

$\lambda_2=i$ CON $m_2=1$

$\lambda_3=-i$ CON $m_3=1$ $\longrightarrow$ $\cos x$, $\sin x$

BASE $\mathcal{B}$ PER LO SPAZIO DELLE SOL. DELL'OMOGENEA ASSOCIATA

QUINDI LA SOL. GENERALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA È:

$$y(x)=\alpha e^{-x}+\beta\sin x+\gamma\cos x$$

CERCHIAMO ORA $y_0(x)$ SOL. PARTICOLARE DELLA NON OMOGENEA.

SICCOME $b(x)=e^{-1\cdot x}$ E -1 COMPARE GIÀ TRA LE RADICI DI $p(\lambda)$ CON MOLT. 1, IL $\boxed{\text{TEO. 1}}$ MI GARANTISCE CHE $\exists!$ UNA SOL. DI **(21)** DELLA FORMA:

$$y_0(x)=c\,x\,e^{-x}$$

PER TROVARLA SOSTITUISCO IN **(21)**. A TALE SCOPO TROVIAMO:

$$y_0'(x)=c\left(e^{-x}+x\cdot(-1)e^{-x}\right)=c(1-x)e^{-x}$$

$$y_0''(x)=c\left(-e^{-x}+(1-x)\cdot(-1)e^{-x}\right)=c(x-2)e^{-x}$$

$$y_0'''(x)=c\left(e^{-x}+(x-2)\cdot(-1)e^{-x}\right)=c(3-x)e^{-x}$$

SOSTITUENDO IN **(21)** OTTENGO.

$$c(3-\cancel{x})e^{-x}+c(\cancel{x}-2)e^{-x}+c(1-\cancel{x})e^{-x}+\cancel{c\,x\,e^{-x}}=e^{-x}$$

CIOÈ:

$$2c\,e^{-x}=e^{-x}$$

DA CUI SEGUE $c=\frac{1}{2}$. DUNQUE LA SOL. PARTICOLARE DI **(21)** È $y_0(x)=\frac{1}{2}xe^{-x}$ E QUINDI LA SOL. GENERALE È:

$$y_0(x)=\frac{1}{2}xe^{-x}+\alpha e^{-x}+\beta\sin x+\gamma\cos x\qquad\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}.$$

ES. 2 RISOLVERE

(22)
$$y^{(3)} + y'' + y' + y = \cos x$$

SVOLGIMENTO

LA OMOGENEA ASSOCIATA È LA STESSA DI ES. 1 QUINDI LE RADICI DEL POL. CARATTERISTICO SONO LE STESSE DI PRIMA. BASTA QUINDI TROVARE UNA SOL. PARTICOLARE DI (22). SICCOME $b(x)$ È DELLA FORMA:

$$b(x) = e^{ax} \cos bx$$

CON $a=0$ E $b=1$, LA CORRISPONDENTE RADICE COMPLESSA È $\lambda_0 = i$, CHE COMPARE COME RADICE DI $p(\lambda)$ CON MOLTEPLICITÀ 1. GRAZIE AL TEO. 2, ESISTE UNA E UNA SOLA $y_0(x)$, SOLUZIONE DI (22), DELLA FORMA:

$$y_0(x) = A\, x \cos x + B\, x \sin x$$

PER DETERMINARE A E B, DOBBIAMO CALCOLARE y_0', y_0'' E y_0''' E SOSTITUIRE IN (22).

SI HA:

$$y_0'(x) = A \cos x + B \sin x - Ax \sin x + Bx \cos x$$

$$y_0''(x) = -A \sin x + B \cos x - A \sin x + B \cos x - Ax \cos x - Bx \sin x =$$

$$= -2A \sin x + 2B \cos x - Ax \cos x - Bx \sin x$$

$$y_0'''(x) = -2A \cos x - 2B \sin x - A \cos x - B \sin x + Ax \sin x - Bx \cos x =$$

$$= -3A \cos x - 3B \sin x + Ax \sin x - Bx \cos x$$

CHE, SOSTITUENDO IN (22) DANNO:

$$y_0'''(x) + y_0''(x) + y_0'(x) + y_0(x) = \cos x$$

CIOÈ, DOPO UN PÒ DI CALCOLI:

$$(2B - 2A) \cos x + (-2A - 2B) \sin x = \cos x$$

AFFINCHÉ AL PRIMO MEMBRO CI SIA LA STESSA FUNZIONE CHE AL SECONDO MEMBRO, BISOGNA (E BASTA) CHE:

$$\begin{cases} 2B - 2A = 1 \\ -2B - 2A = 0 \end{cases}$$

CIOÈ $A = -\frac{1}{4}$ E $B = \frac{1}{4}$.

QUINDI:

$$y_0(x) = -\frac{1}{4} x \cos x + \frac{1}{4} x \sin x$$

QUINDI LA SOL. GEN DI (22) È:

$$y(x) = -\frac{1}{4} x \cos x + \frac{1}{4} x \sin x + \alpha e^{-x} + \beta \sin x + \gamma \cos x \qquad \text{CON } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\text{ES. 3}}$ RISOLVERE

(23)

$$y^{(3)} + y'' + y' + y = 4e^{-x} + 5\cos x$$

$\boxed{\text{SVOLGIMENTO}}$

L'OMOGENEA ASSOCIATA È ANCORA LA STESSA DI $\boxed{\text{ES. 1}}$ E $\boxed{\text{ES. 2}}$. INOLTRE SAPPIAMO GIÀ CHE, DETTO $\mathcal{L}$ L'OPERATORE ASSOCIATO AL I° MEMBRO, SI HA:

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{2}x e^{-x}\right) = e^{-x}$$

E

$$\mathcal{L}\left(-\frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}x\sin x\right) = \cos x$$

DI CONSEGUENZA, PER OTTENERE $4\cdot e^{-x} + 5\cdot\cos x$ BASTERÀ PRENDERE

$$\mathcal{L}\left(4\cdot\frac{1}{2}xe^{-x} + 5\cdot\left(-\frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}x\sin x\right)\right) = 4e^{-x} + 5\cdot\cos x$$

QUINDI, STAVOLTA, LA SOL PARTICOLARE $y_0(x)$ È DATA DA:

$$y_0(x) = 2xe^{-x} - \frac{5}{4}x\cos x + \frac{5}{4}x\sin x$$

QUINDI LA SOL. GENERALE È:

$$y(x) = 2xe^{-x} - \frac{5}{4}x\cos x + \frac{5}{4}x\sin x + \alpha e^{-x} + \beta\sin x + \gamma\cos x \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

13 maggio 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI (...CONTINUA...)

TEO. 1

DATA L'EQ. DIFF.

(1) $$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

CON $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x) \in C((a,b))$.

SIANO INOLTRE $v_1(x), \dots, v_n(x) \in C^n((a,b))$ n SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE, A PARTIRE DALLE QUALI DEFINIAMO LA MATRICE:

(2) $$W(x)=\begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) & \dots & v_n(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) & \dots & v_n'(x) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ v_1^{(n-1)}(x) & v_2^{(n-1)}(x) & \dots & v_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

ALLORA SONO TRA LORO EQUIVALENTI LE AFFERMAZIONI:

(a) $v_1(x), \dots, v_n(x)$ SONO LINEARMENTE DIPENDENTI

(b) $\forall x \in (a,b)$ $\det(W(x))=0$

(c) $\exists x_0 \in (a,b)$ TALE CHE $\det(W(x_0))=0$

INOLTRE SONO EQUIVALENTI TRA LORO LE AFFERMAZIONI

(A) $v_1(x), \dots, v_n(x)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

(B) $\forall x \in (a,b)$ $\det(W(x))\neq 0$

(C) $\exists x_0 \in (a,b)$ TALE CHE $\det(W(x_0))\neq 0$

DIMO

(a)⇒(b) SE VALE **(a)** ALLORA $\exists^{ne}$ $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, NON TUTTI NULLI TALI CHE

$$y(x)=\alpha_1 v_1(x)+\dots+\alpha_n v_n(x)$$

È LA FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA.

MA ALLORA SONO IDENTICAMENTE NULLE ANCHE TUTTE LE SUE DERIVATE; QUINDI $\forall x \in (a,b)$ SI HA:

$$\begin{cases} \alpha_1 v_1(x) + \cdots + \alpha_n v_n(x) = 0 \\ \alpha_1 v_1'(x) + \cdots + \alpha_n v_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 v_1^{(n-1)}(x) + \cdots + \alpha_n v_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

CIOÈ

(3)
$$W(x) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

QUINDI, $\forall x \in (a,b)$ IL SISTEMA LINEARE **(3)** HA UNA SOL. NON IDENTICAMENTE NULLA, DA CUI SEGUE CHE $\forall x \in (a,b)$ $\det(W(x)) = 0$, CIOÈ **(b)**.

(b)⇒(c) È OVVIO.

(c)⇒(a) SE PER $x_0 \in (a,b)$ SI HA $\det W(x_0) = 0$ ALLORA $\exists\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, CON $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq \overline{0}$, TALE CHE:

$$W(x_0) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

CIOÈ TALE CHE:

$$\begin{cases} \alpha_1 v_1(x_0) + \cdots + \alpha_n v_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 v_1'(x_0) + \cdots + \alpha_n v_n'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 v_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + \alpha_n v_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

CIÒ SIGNIFICA CHE LA FUNZIONE:

$$y(x) = \alpha_1 v_1(x) + \cdots + \alpha_n v_n(x)$$

SODDISFA LE CONDIZIONI:

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

MA SICCOME È ANCHE SOL. DI **(1)** (PERCHÈ LO SONO TUTTE LE $v_i(x)$) PER IL TEO. DI UNICITÀ DEVE COINCIDERE CON LA SOLUZIONE IDENTICAMENTE NULLA.

QUINDI $\forall x \in (a,b)$ SI HA:

$$y(x) = 0$$

CIOÈ

$$\alpha_1 v_1(x) + \cdots + \alpha_n v_n(x) = 0$$

IL FATTO CHE ESISTA UNA COMB. LINEARE DELLE $v_1(x), \dots v_n(x)$, A COEFFICIENTI NON TUTTI NULLI, CHE È UGUALE ALLA FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA, SIGNIFICA CHE LE $v_1(x), \dots, v_n(x)$ SONO DIPENDENTI, CIOÈ CHE VALE **(a)**.

(A)⇔(B)⇔(C)

BASTA OSSERVARE CHE:

(A) È LA NEGAZIONE DI **(a)**

(B) È LA NEGAZIONE DI **(c)**

(C) È LA NEGAZIONE DI **(b)**

OSS. 1

LA MATRICE **(2)** PRENDE IL NOME DI MATRICE WRONSKIANA DI $v_1(x), \dots, v_n(x)$, MENTRE IL SUO DETERMINANTE È DETTO DETERMINANTE WRONSKIANO.

TEO. 2 (METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI)

DATA L'EQ. DIFF.

(4) $$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

CON $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x), b(x) \in C((a,b))$

SIANO INOLTRE $v_1(x), \dots, v_n(x) \in C^n((a,b))$ UNA BASE PER LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DELL'OMOGENEA ASSOCIATA A **(4)**.

ALLORE ESISTE UNA SOL. PARTICOLARE $y_0(x)$ DI **(4)** DELLA FORMA:

(5) $$y_0(x) = \alpha_1(x)v_1(x) + \dots + \alpha_n(x)v_n(x)$$

DOVE $\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)$ SODDISFANO:

(6) $$W(x) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1'(x) \\ \vdots \\ \alpha_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

DOVE $W(x)$ È LA MATRICE WRONSKIANA DELLE $v_1(x), \dots, v_n(x)$.

DIMO

CERCHIAMO UNA SOL. DI **(4)** DELLA FORMA **(5)**.

PER COMODITÀ INDICHIAMO CON $\alpha(x)$ E $v(x)$ I VETTORI:

$$\alpha(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x))$$

E

$$v(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x))$$

COSICCHÉ LA **(5)** PUÒ RISCRIVERSI:

(7) $$Y_0(x) = \langle \alpha(x), v(x) \rangle$$

DOBBIAMO QUINDI TROVARE $\alpha(x)$ IN MODO CHE CALCOLANDO TUTTE LE DERIVATE DI $Y_0(x)$ FINO ALLA $(n-1)$ESIMA E SOSTITUENDO IN **(5)**, LA SODDISFI.

SI NOTI CHE:

$$Y_0'(x) = \left(\langle \alpha(x), v(x) \rangle \right)' = \left(\alpha_1(x) v_1(x) + \dots + \alpha_n(x) v_n(x) \right)' =$$

$$= \alpha_1'(x) v_1(x) + \dots + \alpha_n'(x) v_n(x) + \alpha_1(x) v_1'(x) + \dots + \alpha_n(x) v_n'(x) =$$

$$= \langle \alpha'(x), v(x) \rangle + \langle \alpha(x), v'(x) \rangle$$

ORA, VISTO CHE NON CI INTERESSA TROVARE TUTTI I POSSIBILI $\alpha(x)$, MA SOLO UNO, DECIDIAMO DI TROVARE QUELLI CHE SODDISFANO LA CONDIZIONE AGGIUNTIVA

(8) $$\langle \alpha'(x), v(x) \rangle = 0$$

COSICHÉ SI OTTIENE:

(9) $$Y_0'(x) = \langle \alpha(x), v'(x) \rangle$$

A QUESTO PUNTO, DERIVANDO **(9)** SI OTTIENE:

$$Y_0''(x) = \langle \alpha'(x), v'(x) \rangle + \langle \alpha(x), v''(x) \rangle$$

QUINDI, IMPONENDO LA CONDIZIONE AGGIUNTIVA

(10) $$\langle \alpha'(x), v'(x) \rangle = 0$$

OTTENGO

(11) $$Y_0''(x) = \langle \alpha(x), v''(x) \rangle$$

PROSEGUENDO NELLA STESSA MANIERA FINO $Y_0^{(n-1)}(x)$, SI OTTIENE CHE SE $\alpha(x)$ SODDISFA LE CONDIZIONI

(12)
$$\begin{cases} \langle \alpha'(x), v(x) \rangle = 0 \\ \langle \alpha'(x), v'(x) \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle \alpha'(x), v^{(n-2)}(x) \rangle = 0 \end{cases}$$

ALLORA LE DERIVATE DI $y_0(x) = \langle \alpha(x), v(x) \rangle$ SONO:

(13)
$$y_0'(x) = \langle \alpha(x), v'(x) \rangle$$
$$\vdots$$
$$y^{(n-1)}(x) = \langle \alpha(x), v^{(n-1)}(x) \rangle$$

QUINDI UNA FUNZIONE DEL TIPO:

$$y_0(x) = \langle \alpha(x), v(x) \rangle$$

CON $\alpha(x)$ CHE SODDISFI **(12)**, SODDISFA L'EQUAZIONE **(4)** SE E SOLO SE:

$$\left(\langle \alpha(x), v^{(n-1)}(x) \rangle \right)' + a_{n-1}(x) \langle \alpha(x), v^{(n-1)}(x) \rangle + \dots + a_1(x) \langle \alpha(x), v'(x) \rangle + a_0(x) \langle \alpha(x), v(x) \rangle = b(x)$$

CIOÈ:

$$\langle \alpha'(x), v^{(n-1)}(x) \rangle + \langle \alpha(x), v^{(n)}(x) \rangle + a_{n-1}(x) \langle \alpha(x), v^{(n-1)}(x) \rangle + \dots + a_1(x) \langle \alpha(x), v'(x) \rangle + a_0(x) \langle \alpha(x), v(x) \rangle = b(x)$$

CIOÈ

$$\langle \alpha'(x), v^{(n-1)}(x) \rangle + \langle \alpha(x), \underbrace{v^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) v^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) v'(x) + a_0(x) v(x)}_{=0} \rangle = b(x)$$

PERCHÈ TUTTE LE COMPONENTI DI $v(x)$ SODDISFANO L'OMOGENEA ASSOCIATA

CIOÈ

(14)
$$\langle \alpha'(x), v^{(n-1)}(x) \rangle = b(x)$$

QUINDI, CONDIZIONE SUFFICIENTE PERCHÈ $y_0(x) = \langle \alpha(x), v(x) \rangle$ SODDISFI L'EQUAZIONE **(4)** È CHE $\alpha(x)$ SODDISFI **(12)** E **(14)**, CIOÈ CHE SI ABBIA:

$$\begin{cases} \langle \alpha'(x), v(x) \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle \alpha'(x), v^{(n-2)}(x) \rangle = 0 \\ \langle \alpha'(x), v^{(n-1)}(x) \rangle = b(x) \end{cases}$$

CIOÈ:

$$W(x) \cdot \alpha'(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

TALE SISTEMA HA CERTAMENTE UNA SOLUZIONE PERCHÈ $v_1(x),\dots,v_n(x)$ SONO INDIPENDENTI E QUINDI $\det(W(x))\neq 0$ PER OGNI $x\in(a,b)$.

ES. 1 RISOLVERE $y''-y=\frac{1}{e^{2x}+1}$

SVOLGIMENTO L'OMOGENEA ASSOCIATA È

$$y''-y=0$$

IL CUI POL. CARATTERISTICO È $p(\lambda)=\lambda^2-1$, CON RADICI $\lambda=1$ E $\lambda=-1$.

QUINDI LA SOL. GENERALE DELL'OMOGENEA È

$$y(x)=\alpha e^{x}+\beta e^{-x}$$

CERCHIAMO ORA UNA SOL PARTICOLARE DELLA NON OMOGENEA DEL TIPO:

$$y_0(x)=\alpha(x)e^{x}+\beta(x)e^{-x}.$$

PER IL TEO. 2 BASTA SCEGLIERE $\alpha(x)$ E $\beta(x)$ IN MODO CHE:

$$W(x)\begin{pmatrix}\alpha'(x)\\ \beta'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{e^{2x}+1}\end{pmatrix}$$

CIOÈ

$$\begin{cases} e^{x}\alpha'(x)+e^{-x}\beta'(x)=0\\ e^{x}\alpha'(x)-e^{-x}\beta'(x)=\frac{1}{e^{2x}+1}\end{cases}$$

DA CUI SEGUE:

$$\begin{cases}\alpha'(x)=\frac{1}{2e^{x}(e^{2x}+1)}\\ \beta'(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}\end{cases}$$

$$\alpha(x)=\int\frac{1}{2e^{x}(e^{2x}+1)}\,dx\overset{x=\ln t}{=}$$

$$=\frac12\int\frac{1}{t(t^2+1)}\cdot\frac1t\,dt=$$

$$=\frac12\int\frac{1+t^2-t^2}{t^2(t^2+1)}\,dt=$$

$$=\frac12\int\frac{1}{t^2}-\frac{1}{1+t^2}\,dt=$$

$$=\frac12\left(-\frac1t-\arctan t\right)=$$

$$=-\frac12 e^{-x}-\frac12\arctan(e^{x})$$

QUINDI UNA SCELTA POSSIBILE È:

$$\begin{cases}\alpha(x)=-\frac12 e^{-x}-\frac12\arctan(e^{x})\\ \beta(x)=-\frac12\arctan(e^{x})\end{cases}$$

QUINDI:

$$y_0(x)=\left(-\frac12 e^{-x}-\frac12\arctan e^{x}\right)e^{x}-\frac12\arctan(e^{x})\cdot e^{-x}$$

$$=-\frac12-\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\arctan e^{x}$$

QUINDI LA SOL. GENERALE È:

$$y(x)=-\frac12-\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\arctan e^{x}+\alpha e^{x}+\beta e^{-x}\qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

17-05-2021 (14:00-16:00) LEZ. 40

DEF.1 DATI Ω APERTO DI $\mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0)\in\Omega$, $F:\Omega\to\mathbb{R}$ CONTINUA, $I=(a,b)$, $f:I\to\mathbb{R}$ DI CLASSE C^1, DIREMO CHE LA COPPIA (I,f) È SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE $y'=F(x,y)$ SE:

$$\forall x\in I \text{ SI HA } (x,f(x))\in\Omega \text{ E } f'(x)=F(x,f(x)).$$

SE INOLTRE SI HA ANCHE $f(x_0)=y_0$, DIREMO CHE (I,f) È ANCHE SOL. DEL PROB. DI CAUCHY:

(1)
$$\begin{cases} y'=F(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

ES.1 (VEDI ES.0 DELLA LEZ.21 DELL' A.A. 2019/20)

DEF.2 DATI Ω, (x_0,y_0), F E I COME NELLA DEF.1, ED $f:I\to\mathbb{R}$ CONTINUA, DIREMO CHE LA COPPIA (I,f) È SOLUZ. DELL'EQUAZIONE INTEGRALE:

(2)
$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}F(t,y(t))\,dt$$

SE:
$$\forall x\in I \text{ SI HA } (x,f(x))\in\Omega \text{ E } f(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}F(t,y(t))\,dt$$

PROP.1 DATI Ω, (x_0,y_0), F E I COME NELLA DEF.1, ED $f:I\to\mathbb{R}$, È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

(a) f È CONTINUA E SODDISFA (2)

(b) f È DI CLASSE C^1 E SODDISFA (1)

DIMO

(a)⇒(b) SE f È CONTINUA E SODDISFA

(3)
$$f(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}F(t,f(t))\,dt$$

ALLORA $F(t,f(t))$ È CONTINUA. DI CONSEGUENZA, DAL T. FOND. DEL CALCOLO INTEG. SEGUE CHE IL 2° MEMBRO DI (3) È DI CLASSE C^1. QUINDI È DI CLASSE C^1 ANCHE IL 1° MEMBRO, CIOÈ f.

DERIVANDO AMBO I MEMBRI DI (3) SI OTTIENE:

(4) $$f'(x) = F(x, f(x)).$$

INFINE, CALCOLANDO AMBO I MEMBRI DI (3) PER $x = x_0$, SI OTTIENE:

(5) $$f(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} F(t, f(t))\, dt = y_0 + 0 = y_0$$

METTENDO INSIEME (4) E (5) OTTENIAMO CHE VALE (b).

$\boxed{(b) \Rightarrow (a)}$ SE f È DI CLASSE C^1 E SODDISFA:

$$f'(t) = F(t, f(t))$$

ALLORA, INTEGRANDO AMBO I MEMBRI TRA x_0 E x, SI OTTIENE:

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} F(t, f(t))\, dt$$

CIOÈ:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} F(t, f(t))\, dt$$

DA CUI, RICORDANDO CHE $f(x_0) = y_0$, SEGUE CHE:

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, f(t))\, dt$$

QUINDI VALE (a).

$\boxed{\text{ES. 2}}$ $(\mathbb{R}, e^{x^2})$ È SOLUZIONE SIA DI $y(x) = 1 + \int_{x_0}^{x} 2t\, y(t)\, dt$, CHE DI

$$\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

TEO.1 (ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE)

DATI Ω APERTO DI $\mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0)\in\Omega$ ED $F:\Omega\to\mathbb{R}$ CONTINUA E LOCALMENTE LIPSCHITZIANA NELLA VARIABILE y, CIOÈ TALE CHE:

(6) $\forall(\bar{x},\bar{y})\in\Omega$ $\exists V$ INTORNO DI $(\bar{x},\bar{y})$ ED $\exists L>0$ TALE CHE $\forall(x,y_1)(x,y_2)\in V$ SI HA $|F(x,y_1)-F(x,y_2)|<L|y_1-y_2|$

ALLORA $\exists\delta>0$ TALE CHE $\exists! f:[x_0-\delta,x_0+\delta]\to\mathbb{R}$ DI CLASSE C^1 TALE CHE LA COPPIA $\big((x_0-\delta,x_0+\delta),f\big)$ È SOLUZIONE DI:

$$\begin{cases} y'=F(x,y) \\ y(0)=y_0 \end{cases}$$

OSS.1 DEL $\boxed{\text{TEO.1}}$ NON DAREMO LA DIMOSTRAZIONE (CHE INVECE SARÀ DATA NEL CORSO DI ANALISI MAT. 4). CI LIMITEREMO, PIÙ AVANTI A DIMOSTRARE LA SOLA UNICITÀ, PRESUPPONENDO L'ESISTENZA. SEGNALIAMO INOLTRE CHE SAREBBE POSSIBILE DIMOSTRARE L'ESISTENZA (SENZA L'UNICITÀ) ANCHE SENZA L'IPOTESI (6). OSSERVIAMO INFINE CHE L'IPOTESI (6) È BANALMENTE SODDISFATTA SE $\frac{\partial F}{\partial y}$ È CONTINUA SU Ω.

PROP.2 NELLE STESSE IPOTESI DEL $\boxed{\text{TEO.1}}$, SIANO $(I_1,y_1(x))$ E $(I_2,y_2(x))$ DUE SOLUZIONI DEL PROB. DI CAUCHY

$$\begin{cases} y'=F(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

ALLORA $\forall x\in I_1\cap I_2$ SI HA $y_1(x)=y_2(x)$.

DIMO

(VEDI LA DIMOSTRAZIONE DELLA $\boxed{\text{PROP.2}}$ DELLA $\boxed{\text{LEZ.21}}$ DELL'A.A. 2019/20)

NOTAZIONE SE $F(x,y)$ È DELLA FORMA $f(y)g(x)$, CIOÈ L'EQUAZIONE È DEL TIPO $y'=f(y)g(x)$, ALLORA L'EQUAZIONE SI DICE A VARIABILI SEPARABILI. IN TAL CASO, NEL $\boxed{\text{TEO.1}}$, Ω È IL PRODOTTO CARTESIANO DI 2 INTERVALLI APERTI (ANCHE NON LIMITATI) E LE IPOTESI SU $F(x,y)$ DIVENTANO: f E g CONTINUE ED f LOCALMENTE LIPSCHITZIANA.

PER DETERMINARNE LE SOLUZIONI SI PROCEDE COME NELL'ESEMPIO SEGUENTE:

ES. 3 (VEDI $\boxed{\text{ES. 1}}$ DELLA $\boxed{\text{LEZ. 21}}$ DELL'A.A. 2019/2020)

21-05-2021 (9:00-11:00) LEZ. 42

NOTAZIONE SALVO AVVISO CONTRARIO, PER TUTTA LA LEZIONE Ω È UN APERTO DI $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ ED $F: \Omega \to \mathbb{R}$ È UNA FUNZIONE CONTINUA E LOCALMENTE LIPSCHITZIANA NELLA VARIABILE y. IN PARTICOLARE SUPPORREMO TALI IPOTESI OGNI VOLTA CHE CONSIDERIAMO IL PROB. DI CAUCHY:

$$(1) \qquad \begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

DEF 1 DATE DUE SOLUZIONI $(I_1, y_1(x))$ E $(I_2, y_2(x))$ DELLA STESSA EQUAZIONE DIFFERENZIALE $y' = F(x,y)$, DIREMO CHE LA PRIMA È UN PROLUNGAMENTO DELLA SECONDA SE $I_2 \subset I_1$ E $\forall x \in I_2$ SI HA $y_1(x) = y_2(x)$.

OSS. 1 SE $(I_1, y_1(x))$ E $(I_2, y_2(x))$ SODDISFANO NON SOLO LA STESSA EQUAZIONE MA ANCHE LO STESSO DATO INIZIALE ALLORA, GRAZIE ALLA PROP. 2 DELLA LEZ. 40, LA CONDIZIONE $I_2 \subset I_1$ BASTA, DA SOLA, A GARANTIRE CHE $y_1(x) = y_2(x)$ SU TUTTO I_2 E QUINDI CHE $(I_1, y_1(x))$ SIA UN PROLUNGAMENTO DI $(I_2, y_2(x))$.

DEF. 2 DATA UNA SOLUZIONE $(I, y(x))$ DELL'EQUAZIONE $y' = F(x,y)$ DIREMO CHE È MASSIMALE SE NON È ULTERIORMENTE PROLUNGABILE, CIOÈ SE IL SUO UNICO PROLUNGAMENTO È SE STESSA.

TEO. 1 LA SOLUZIONE MASSIMALE DI (1) ESISTE SEMPRE.

DIMO LA DIMOSTRAZIONE È IDENTICA A QUELLA DEL TEO. 1 DELLA LEZ. 22 DELL' A.A. 2019/2020.

TEO.2 DATO IL P. DI CAUCHY (1), SIA $K \subset \Omega$ CON K COMPATTO, E SIA $((a,b), y(x))$ UNA SOL. DI (1) IL CUI GRAFICO É TUTTO CONTENUTO IN K, ALLORA $((a,b), y(x))$ È ULTERIORMENTE PROLUNGABILE SIA A DESTRA CHE A SINISTRA.

DIMO

SIA $M = \max\{|F(x,y)| \mid (x,y) \in K\}$, CHE ESISTE PER IL T. DI WEIERSTRASS.

PER OGNI $x \in (a,b)$ SI HA $(x, y(x)) \in K$ E QUINDI:

$$|y'(x)| = |F(x, y(x))| \leq M$$

MA ALLORA, GRAZIE AL T. DI LAGRANGE, $y(x)$ È LIPSCHITZIANA CON COSTANTE DI LIPSCHITZ M, QUINDI È ANCHE UNIF. CONTINUA E QUINDI È ESTENDIBILE CON CONTINUITÀ PER $x = b$. SIA QUINDI

(2) $$\mathbb{R} \ni \bar{y} = \lim_{x \to b^-} y(x)$$

SICCOME K È COMPATTO, E QUINDI CHIUSO, AVREMO CHE $(b, \bar{y}) \in K \subset \Omega$.

QUINDI, AL P. DI CAUCHY:

(3) $$\begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(b) = \bar{y} \end{cases}$$

POSSIAMO APPLICARE IL T. DI ESIST. E UNIC. LOCALE E DIRE CHE ESISTE $((b-\delta, b+\delta), y_1(x))$ CHE NE È SOLUZIONE, DOVE $\delta > 0$.

MA ALLORA, POSTO:

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} y(x) & \forall x \in (a,b) \\ y_1(x) & \forall x \in [b, b+\delta) \end{cases}$$

MOSTRIAMO CHE $((a, b+\delta), \tilde{y}(x))$ È UN PROLUNGAMENTO DI $((a,b), y(x))$.

IL FATTO CHE $\tilde{y}(x)$ SODDISFI L'EQUAZIONE PER $x \neq b$ È IMMEDIATO PER COME È STATA COSTRUITA $\tilde{y}(x)$. RIMANE DA VERIFICARE CHE $\tilde{y}(x)$ È REGOLARE QUANTO BASTA E SODDISFA L'EQUAZIONE ANCHE PER $x = b$. LA CONTINUITÀ È IMMEDIATA PERCHÉ:

$$\lim_{x \to b^-} \tilde{y}(x) = \lim_{x \to b^-} y(x) \overset{(2)}{=} \bar{y} = y_1(\bar{x}) \overset{\text{PERCHÉ } y_1(x) \text{ È CONTINUA}}{=} \lim_{x \to b^+} y_1(x) = \lim_{x \to b^+} \tilde{y}(x)$$

INOLTRE ANCHE $\tilde{Y}'(x)$ È CONTINUA IN $x=b$.

PER DIMOSTRARLO SI OSSERVI CHE:

GRAZIE A (2) E ALLA CONTINUITÀ DI $F(x,y)$

(4) $$\lim_{x\to b^-} \tilde{Y}'(x) = \lim_{x\to b^-} Y'(x) = \lim_{x\to b^-} F(x,Y(x)) = F(b,\bar{Y})$$

E

PERCHÉ $Y_1(x)$ È C^1 PERCHÉ $Y_1(x)$ SODDISFA (3)

(5) $$\lim_{x\to b^+} \tilde{Y}'(x) = \lim_{x\to b^+} Y_1'(x) = Y_1'(b) = F(b,\bar{Y}).$$

SICCOME SAPPIAMO GIÀ CHE $\tilde{Y}(x)$ È CONTINUA PER $x=b$, GRAZIE AL T. DI LAGRANGE, DA (4) E (5) SEGUE CHE:

$$\tilde{Y}'(b) = \lim_{x\to b} \frac{\tilde{Y}(x)-\tilde{Y}(b)}{x-b} = \lim_{\xi\to b} \tilde{Y}'(\xi) \overset{(4)(5)}{=} F(b,\bar{Y})$$

QUESTO SIGNIFICA CHE $\tilde{Y}'(x)$ È CONTINUA ANCHE PER $x=b$ E SODDISFA $Y'=F(x,y)$.

CIÒ DIMOSTRA CHE $((a,b+\delta),\tilde{Y}(x))$ È UN PROLUNGAMENTO DI $((a,b),Y(x))$, CIOÈ CHE $((a,b),Y(x))$ È PROLUNGABILE A DESTRA.

IN MODO DEL TUTTO ANALOGO SI DIMOSTRA CHE $((a,b),Y(x))$ È PROLUNGABILE A SINISTRA.

ES. 1 DATO IL PROB. DI CAUCHY

(6) $$\begin{cases} Y' = \dfrac{xY}{x^2+Y^2} \\ Y(1)=1 \end{cases}$$

a) MOSTRARE CHE LA SUA SOLUZIONE $Y(x)$ È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.

b) CALCOLARE $\lim_{x\to+\infty} Y(x)$.

c) CALCOLARE $\lim_{x\to+\infty} Y'(x)$.

d) COSA SUCCEDE A $Y(x)$ PER $x<1$?

SOLUZIONE

a) INDICHIAMO CON (a,b) L'INTERVALLO MASSIMALE DI PROLUNGABILITÀ DI $Y(x)$. SAPPIAMO PER IL $\boxed{\text{TEO.1}}$ CHE TALE INTERVALLO ESISTE E CHE, OVVIAMENTE, $a<1<b$. DOBBIAMO MOSTRARE CHE $b=+\infty$.

PREMETTIAMO UN'OSSERVAZIONE CHE CI SARÀ UTILE ANCHE IN SEGUITO:

E CIOÈ CHE:

(7) $\forall m>0$, SE LA DISUGUAGLIANZA $y(x)<mx$ VALE PER UN CERTO $x_0\in[1,b)$ ALLORA VALE ANCHE PER OGNI x TALE CHE $x_0\leq x<b$.

INFATTI, SE COSÌ NON FOSSE, L'INSIEME:

$$A=\{x\in[1,b)\mid y(x)\geq mx\}$$

SAREBBE NON VUOTO, QUINDI, POSTO $\bar{x}=\inf(A)$ SI HA $\bar{x}<b$. INOLTRE $\bar{x}>x_0$ PER IL T. DI PERMANENZA DEL SEGNO, PERCHÉ $y(x)-mx$ È CONTINUA E $y(x_0)<mx_0$. INOLTRE, SEMPRE GRAZIE ALLA CONTINUITÀ DI $y(x)$ E mx, POSSIAMO DIRE CHE:

$$y(\bar{x})\leq m\bar{x} \quad \left\{ \text{PERCHÉ } \forall x\in[x_0,\bar{x}) \text{ SI HA } y(x)<mx \right.$$

E CHE:

$$y(\bar{x})\geq m\bar{x} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{PERCHÉ, ESSENDO } \bar{x}=\inf(A) \text{ ESISTONO} \\ x\in(\bar{x},b) \text{ ARBITRARIAMENTE VICINI A } \bar{x}, \\ \text{NEI QUALI } y(x)\geq mx. \end{array} \right.$$

QUINDI SI OTTERREBBE CHE:

$$y(\bar{x})=m\bar{x} \quad \text{E} \quad y(x)<mx \quad \text{PER} \quad x_0\leq x<\bar{x}.$$

DI CONSEGUENZA $\forall x\in[x_0,\bar{x})$ SI HA:

$$\frac{y(\bar{x})-y(x)}{\bar{x}-x}=\frac{m\bar{x}-y(x)}{\bar{x}-x}>\frac{m\bar{x}-mx}{\bar{x}-x}=m$$

QUINDI:

(8) $$y'(\bar{x})=y'_-(x)=\lim_{x\to\bar{x}^-}\frac{y(x)-y(\bar{x})}{x-\bar{x}}\geq m$$

D'ALTRA PARTE, SICCOME $y(x)$ È SOLUZIONE DI (6), SI HA

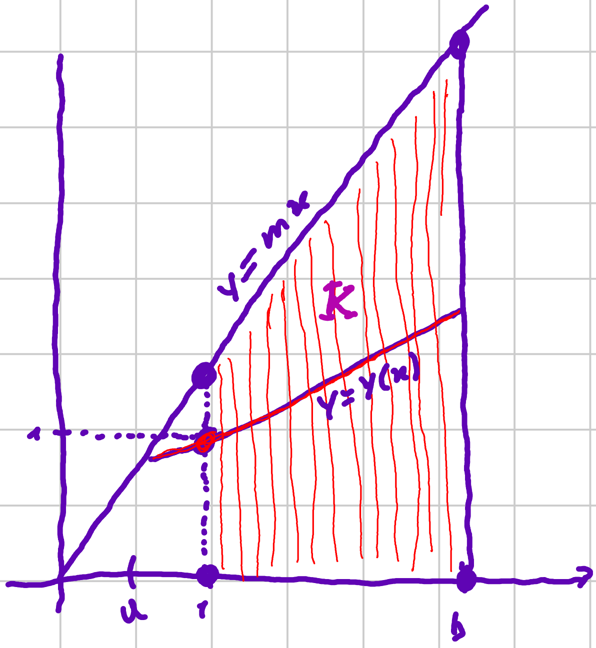
$$y'(\bar{x})=\frac{\bar{x}\,y(\bar{x})}{(\bar{x})^2+(y(\bar{x}))^2}=\frac{\bar{x}\cdot m\bar{x}}{\bar{x}^2+m^2\bar{x}^2}=\frac{m}{1+m^2}<m$$

CHE CONTRADDICE (8). QUINDI È ASSURDO SUPPORRE FALSA LA (7)

GRAZIE A (7) SIAMO ORA IN GRADO DI MOSTRARE CHE $b=+\infty$. SE INFATTI COSÌ NON FOSSE, PRENDIAMO $m>1$, IN MODO CHE $y(x)<mx$ VALGA PER $x=1$ E QUINDI, GRAZIE A (7), ANCHE PER $x>1$.

SIA $K=\{(x,y)\mid 1\le x\le b,\ 0\le y\le mx\}$

LA ZONA TRATTEGGIATA IN ROSSO NELLA FIGURA A FIANCO. K È COMPATTO



PERCHÉ È CHIUSO E LIMITATO E IL GRAFICO DI $y(x)$, PER $1\le x<b$, È TUTTO CONTENUTO IN K, VISTO CHE NON PUÒ INTERSECARE NÉ $y=mx$ (A CAUSA DI (7)) NÉ $y=0$ (CHE È SOL. COSTANTE DELL'EQUAZIONE). MA ALLORA, GRAZIE AL $\boxed{\text{TEO. 2}}$, $y(x)$ PUÒ ESSERE PROLUNGATA A DESTRA, IN CONTRADDIZIONE COL FATTO CHE È MASSIMALE. QUINDI È ASSURDO SUPPORRE $b\neq+\infty$.

$\boxed{b}$ MOSTRIAMO CHE $\lim_{x\to+\infty} y(x)=+\infty$.

INTANTO, SICCOME $F(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ NEL I° QUADRANTE È POSITIVA, POICHÉ PER $x\geq 1$ IL GRAFICO DI $y(x)$ STA NEL I° QUADRANTE, AVREMO CHE $\forall x\geq 1$ $y'(x)>0$, QUINDI $y(x)$ È CRESCENTE, QUINDI $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ ESISTE.

SE PER ASSURDO FOSSE:

(9)
$$\lim_{x\to+\infty} y(x)=\ell<+\infty$$

ALLORA SI AVREBBE:

PERCHÉ $y(x)$ È CRESCENTE E $y(1)=1$ QUINDI PER $x\geq 1$ SI HA $y(x)\geq y(1)=1$

PERCHÉ $y(x)\to\ell$ CRESCENDO E QUINDI $y(x)\le\ell$

PERCHÉ PER $x\geq1$ $\dfrac{x^2}{x^2+\ell^2}$ È CRESCENTE

$$y'(x)=\frac{x\,y(x)}{x^2+(y(x))^2}\geq\frac{x\cdot 1}{x^2+(y(x))^2}\geq\frac{x}{x^2+\ell^2}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{x^2+\ell^2}\geq\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\ell^2}$$

DA CUI SEGUIREBBE:

$$\int_1^x y'(t)\,dt\geq\int_1^t\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1+\ell^2}\,dt=\frac{1}{1+\ell^2}\ln x$$

CIOÈ

$$y(x)-y(1)\geq\frac{1}{1+\ell^2}\ln x$$

OVVERO

$$y(x) \geq 1 + \frac{1}{1+\ell^2} \cdot \ln x \to +\infty \quad \text{PER } x \to +\infty$$

CHE È IN CONTRADDIZIONE CON (9).

QUINDI È ASSURDO AVER SUPPOSTO CHE $\ell < +\infty$. QUINDI $\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$.

$\boxed{C}$ MOSTRIAMO CHE $\lim_{x \to +\infty} y'(x) = 0$.

(... CONTINUA NELLA PROSSIMA LEZIONE...)

24-05-2021(14:00-16:00) LEZ. 44

(… continua dalla Lezione 42 ...)

ES. 1 (CONTINUAZIONE)

DATO IL P. DI CAUCHY $\begin{cases} y' = \dfrac{xy}{x^2+y^2} \\ y(1)=1 \end{cases}$ NELLA LEZ. 42 ABBIAMO GIÀ DIMOSTRATO CHE LA SUA SOL. $y(x)$ È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$ E CHE $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$.

RICORDIAMO INFINE CHE, COME PASSO INTERMEDIO, ABBIAMO DIMOSTRATO CHE $y(x)$ SODDISFA LA SEGUENTE PROPRIETÀ:

(1) $\forall m>0$ SE PER UN CERTO $x_0 \geq 1$ SI HA $y(x_0) < m x_0$ ALLORA SI HA $y(x) < mx$ PER OGNI $x \geq x_0$.

SIAMO ORA PRONTI PER IL PUNTO SUCCESSIVO:

C MOSTRIAMO CHE $\lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0$.

OSSERVIAMO CHE DA (1) SEGUE CHE

(2) $$\frac{y(x)}{x} \text{ È DECRESCENTE SU } [1,+\infty)$$

INFATTI, SE PER ASSURDO NON VALESSE (2), ESISTEREBBERO x_1 E x_2, CON $1 \leq x_1 < x_2$, TALI CHE

$$0 < \frac{y(x_1)}{x_1} < \frac{y(x_2)}{x_2}.$$

QUINDI PRESO $m>0$ TALE CHE

$$0 < \frac{y(x_1)}{x_1} < m < \frac{y(x_2)}{x_2}$$

SI OTTERREBBE CHE

$$y(x_1) < m x_1 \quad \text{E} \quad y(x_2) > m x_2$$

PUR ESSENDO $x_1 < x_2$, CONTRADDICENDO (1).

DA (2) E DAL FATTO CHE $Y(x)>0$ SEGUE CHE

$$(3) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{Y(x)}{x} = \lambda \quad \text{CON } \lambda \geq 0 \text{ E FINITO.}$$

MA ALLORA:

$$\lim_{x\to+\infty} Y'(x) = \lim_{x\to+\infty} F(x,Y(x)) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\,Y(x)}{x^2+(Y(x))^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{Y(x)}{x}}{1+\left(\frac{Y(x)}{x}\right)^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

QUINDI:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{Y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{Y'(x)}{1} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

CHE, COMBINATA CON (3), IMPLICA

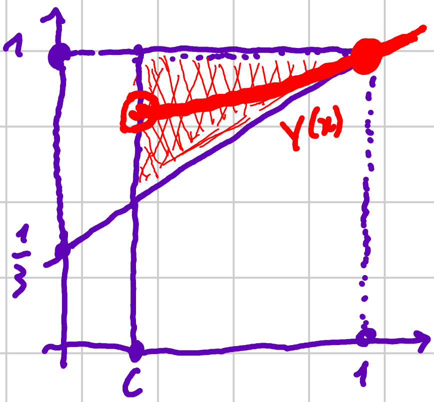
$$\lambda = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

DA CUI SEGUE $\lambda=0$ E QUINDI CHE $\lim_{x\to+\infty} Y'(x) = 0$.

$\boxed{d}$ MOSTRIAMO INTANTO CHE, ALL'INDIETRO, $Y(x)$ È PROLUNGABILE ALMENO FINO A 0, CIOÈ CHE L'INTERVALLO MASSIMALE DI ESISTENZA $(c,+\infty)$ HA $c<0$. A TALE SCOPO OSSERVIAMO CHE SE $x>0$ E $Y>0$ SI HA:

$$0 < \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$$

QUINDI, FINCHÉ IL GRAFICO DI $Y(x)$ È INTERNO AL 1° QUADRANTE SI HA $0<Y'(x)\leq\frac{1}{2}$. QUINDI, SE PER ASSURDO, FOSSE $c\geq 0$ (VEDI FIGURA) IL GRAFICO DI $Y(x)$ SAREBBE TUTTO CONTENUTO NEL COMPATTO SEGNATO IN ROSSO E QUINDI SAREBBE ANCORA PROLUNGABILE A SINISTRA.



A QUESTO PUNTO IL MODO PIÙ RAPIDO PER MOSTRARE CHE $y(x)$ È PROLUNGABILE FINO A $-\infty$ È DI MOSTRARE CHE PROLUNGANDOLA PER PARITÀ SI OTTIENE ANCORA UNA SOLUZIONE.

PIÙ PRECISAMENTE, DETTO $y_0 = y(0)$, SAPPIAMO CHE IL P. DI CAUCHY:

(4) $$\begin{cases} y' = \dfrac{xy}{x^2+y^2} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

HA SICURAMENTE $\left((c,+\infty),\ y(x)\right)$ COME SOLUZIONE.

MOSTRIAMO CHE HA COME SOLUZIONE ANCHE $\left((-\infty,-c),\ v(x)\right)$ DOVE $v(x) = y(-x)$. INFATTI $v(0) = y(-0) = y(0) = y_0$ E INOLTRE

$$v'(x) = \left(y(-x)\right)' = -y'(-x) = -\frac{(-x)\,y(-x)}{(-x)^2+\left(y(-x)\right)^2} =$$

$$= \frac{x \cdot y(-x)}{x^2+\left(y(-x)\right)^2} = \frac{xv}{x^2+v^2}$$

QUINDI $\left((c,+\infty),\ y(x)\right)$ E $\left((-\infty,-c),\ y(-x)\right)$ SONO ENTRAMBE SOLUZIONI DI (4) CHE QUINDI HA COME SOLUZIONE MASSIMALE:

$$\left((-\infty,+\infty),\ \tilde{y}(x)\right)$$

DOVE $\tilde{y}(x)$ È UNA FUNZIONE PARI CHE COINCIDE CON $y(x)$ PER $x \geq 0$.

$\boxed{\text{DEF 1}}$ DATI Ω E F COME AL SOLITO E $g:(a,b) \to \mathbb{R}$ DI CLASSE C^1 TALE CHE $\forall x \in (a,b)$ $(x, g(x)) \in \Omega$, DIREMO CHE $\left((a,b),\ g(x)\right)$ È UNA SOPRASOLUZIONE DELL'EQUAZIONE $y' = F(x,y)$ SE:

(5) $$\forall x \in (a,b) \text{ SI HA } g'(x) \geq F(x, g(x))$$

DIREMO INOLTRE CHE È UNA SOPRASOLUZIONE STRETTA SE NELLA (5) LA DISUGUAGLIANZA È STRETTA. SI DICE INVECE SOTTOSOLUZIONE (STRETTA) SE NELLA (5) C'È IL "$\leq$" ("$<$").

TEO.1 (DELLA SOPRASOLUZIONE STRETTA)

SIANO Ω E F COME AL SOLITO E SIANO $((a,b), y(x))$ E $((a,b), g(x))$ RISPETTIVAMENTE UNA SOLUZIONE E UNA SOPRASOLUZIONE STRETTA DI $y' = F(x,y)$. SIA INOLTRE $x_0 \in (a,b)$. ALLORA VALGONO LE IMPLICAZIONI:

$\boxed{a}$ $y(x_0) < g(x_0) \Rightarrow y(x) < g(x) \quad \forall x \in (x_0, b)$

$\boxed{b}$ $y(x_0) > g(x_0) \Rightarrow y(x) > g(x) \quad \forall x \in (a, x_0)$

DIMO

DIMOSTRIAMO SOLO $\boxed{a}$ ($\boxed{b}$ È ANALOGA).

SE PER ASSURDO $\boxed{a}$ FOSSE FALSA ALLORA L'INSIEME

(6) $$A = \{ x \in (x_0, b) \mid y(x) \geq g(x) \}$$

SAREBBE NON VUOTO, QUINDI ESISTE $\bar{x} = \text{INF}(A) \in [x_0, b)$.

IN REALTÀ È ANCHE $\bar{x} > x_0$ PERCHÈ $y(x)$ E $g(x)$ SONO CONTINUE E $y(x_0) < g(x_0)$ QUINDI C'È TUTTO UN INTORNO DESTRO DI x_0 IN CUI CONTINUA A VALERE $y(x) < g(x)$ E QUINDI NON CONTIENE PUNTI DI A.

MOSTRIAMO ORA CHE $y(\bar{x}) = g(\bar{x})$. INFATTI, ESSENDO $y(x)$ E $g(x)$ CONTINUE, SI HA:

$y(\bar{x}) \leq g(\bar{x})$ PERCHÈ $y(x) < g(x) \quad \forall x \in (x_0, \bar{x})$,

E:

$y(\bar{x}) \geq g(\bar{x})$ PERCHÈ, ESSENDO $\bar{x} = \text{INF}(A)$, $y(x) \geq g(x)$ VALE PER PUNTI x ARBITRARIAMENTE VICINI A $\bar{x}$.

QUINDI SI HA $y(x) < g(x) \quad \forall x \in [x_0, \bar{x})$ E $y(\bar{x}) = g(\bar{x})$, QUINDI:

$$\frac{y(x) - y(\bar{x})}{x - \bar{x}} > \frac{g(x) - g(\bar{x})}{x - \bar{x}} \quad \forall x \in [x_0, \bar{x})$$

QUINDI, PASSANDO AL LIMITE PER $x \to \bar{x}^-$, SI OTTIENE $y'(\bar{x}) \geq g'(\bar{x})$, CHE È ASSURDO PERCHE' $g(x)$ È UNA SOPRASOLUZIONE STRETTA E QUINDI:

$$g'(\bar{x}) > F(\bar{x}, g(\bar{x})) = F(\bar{x}, y(\bar{x})) = y'(\bar{x}).$$

TEO.2 (DELLA SOTTOSOLUZIONE STRETTA)

SIANO Ω E F COME AL SOLITO E SIANO $((a,b), y(x))$ E $((a,b), g(x))$ RISPETTIVAMENTE UNA SOLUZIONE E UNA SOTTOSOLUZIONE STRETTA DI $y' = F(x,y)$. SIA INOLTRE $x_0 \in (a,b)$. ALLORA VALGONO LE IMPLICAZIONI:

$\boxed{a}$ $y(x_0) > g(x_0) \Rightarrow y(x) > g(x) \quad \forall x \in (x_0, b)$

$\boxed{b}$ $y(x_0) < g(x_0) \Rightarrow y(x) < g(x) \quad \forall x \in (a, x_0)$

DIMO IDENTICA A QUELLA DEL $\boxed{\text{TEO. 1}}$

OSS. 1 $\boxed{\text{TEO. 1}}$ E $\boxed{\text{TEO. 2}}$ POSSONO ESSERE LEGGERMENTE MIGLIORATI.

AD ESEMPIO L'IMPLICAZIONE $\boxed{a}$ DI $\boxed{\text{TEO. 1}}$ VALE ANCHE SE L'IPOTESI "$y(x_0) < g(x_0)$" DIVENTA "$y(x_0) \leq g(x_0)$". QUESTO PERCHÉ, ESSENDO $y'(x_0) < g'(x_0)$, ANCHE SE $y(x_0) = g(x_0)$ SI HA COMUNQUE $y(x) < g(x)$ ALMENO IN UN INTORNO DESTRO DI x_0, QUINDI NELLA DIMOSTRAZIONE SI RIESCE LO STESSO A MOSTRARE CHE L'INF. DELL'INSIEME (6) È STRETTAMENTE MAGGIORE DI x_0.

LA STESSA MODIFICA SI PUÒ FARE ANCHE IN $\boxed{b}$ E IN $\boxed{\text{TEO. 2}}$.

TEO. 3 (DEL CONFRONTO)

SIANO Ω, F E (x_0, y_0) COME AL SOLITO, $(x_0, \tilde{y}_0) \in \Omega$ E $G: \Omega \to \mathbb{R}$ CONTINUA E TALE CHE $G(x,y) > F(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega$. CONSIDERIAMO I 2 PR. DI CAUCHY:

$$(7) \begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (8) \begin{cases} y' = G(x,y) \\ y(x_0) = \tilde{y}_0 \end{cases}$$

SIANO $f, g: (a,b) \to \mathbb{R}$ DI CLASSE C^1 TALI CHE $((a,b), f(x))$ È SOLUZIONE DI (7) E $((a,b), g(x))$ È SOLUZIONE DI (8). ALLORA VALGONO LE IMPLICAZIONI:

$\boxed{a}$ $y_0 \leq \tilde{y}_0 \Rightarrow f(x) < g(x) \quad \forall x \in (x_0, b)$

$\boxed{b}$ $y_0 \geq \tilde{y}_0 \Rightarrow f(x) > g(x) \quad \forall x \in (a, x_0)$

$\boxed{\text{DIMO}}$ BASTA OSSERVARE CHE $g(x)$ È UNA SOPRASOLUZIONE STRETTA DI $y'=F(x,y)$ IN QUANTO:

$$g'(x) = G(x,g(x)) > F(x,g(x)).$$

FATTO CIÒ BASTA APPLICARE IL $\boxed{\text{TEO.1}}$.

$\boxed{\text{ES.2}}$ DATO IL P. DI CAUCHY: $\begin{cases} y' = y^2 - x^2 \\ y(0) = \alpha > 0 \end{cases}$

$\boxed{a}$ NEL CASO $\alpha = 2$ DIRE SE LA SOLUZ. È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.

$\boxed{b}$ COME $\boxed{a}$ MA CON $\alpha = \frac{1}{4}$.

$\boxed{c}$ COSA SUCCEDE PER TUTTI GLI ALTRI $\alpha > 0$?

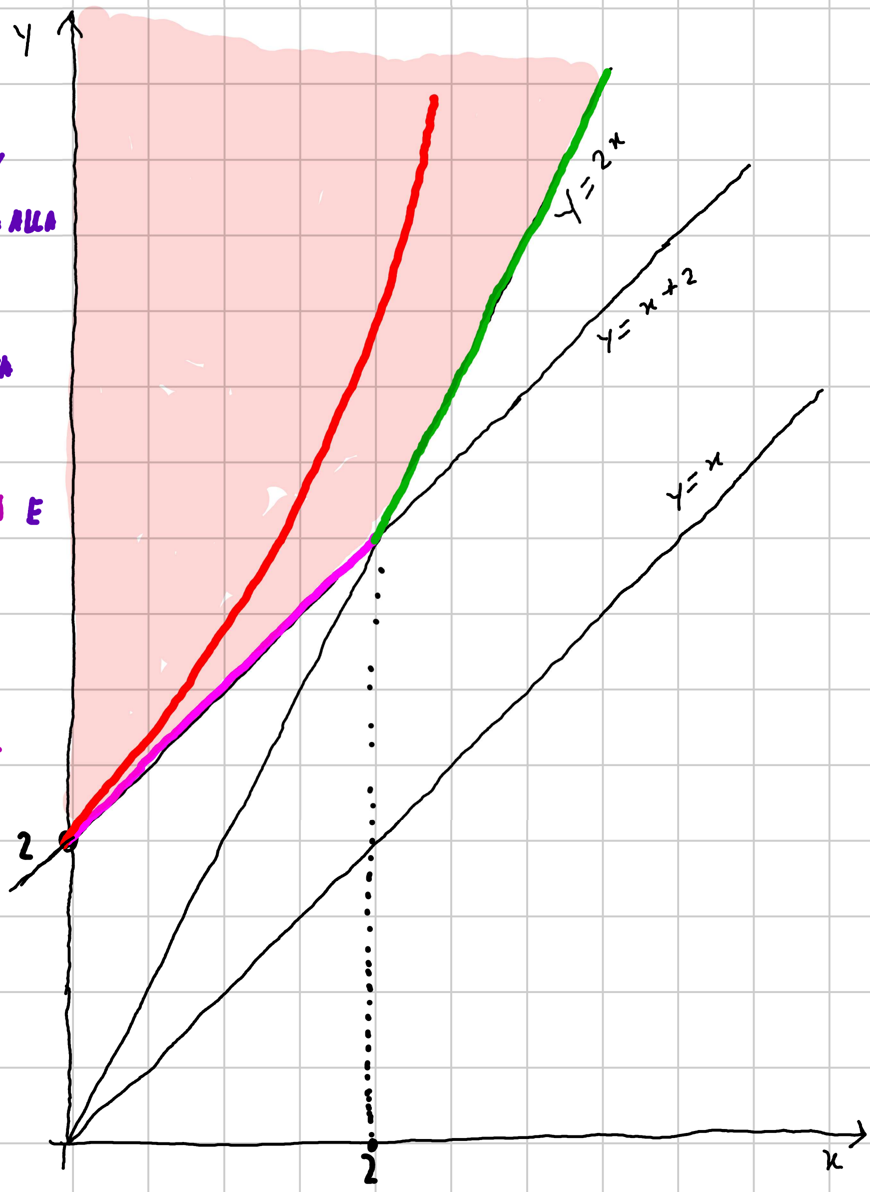
$\boxed{\text{SVOLGIMENTO}}$

$\boxed{a}$ LA SOLUZIONE $y(x)$ CON DATO INIZIALE $y(0)=2$, PER $x>0$, FINCHÉ ESISTE, È STRETTAMENTE SOPRA ALLA RETTA $y=2+x$ PERCHÉ QUESTA È UNA SOTTOSOLUZIONE STRETTA DI $y'=y^2-x^2$ PER $x\geq 0$.

INFATTI, SE $x\geq 0$, SI HA $y'=(x+2)'=1$ E $y^2-x^2=(x+2)^2-x^2=4+4x>1$.

MA ANCHE LA RETTA $y=2x$ È SOTTOSOLUZIONE STRETTA PER $x\geq 2$ PERCHÉ $y'=(2x)'=2$ MENTRE $y^2-x^2=(2x)^2-x^2=3x^2>2$.

QUINDI, FINCHÉ ESISTE, $y(x)$ STA NELLA ZONA COLORATA DI ROSA.



OSSERVIAMO CHE NELLA ZONA ROSA, ANZI NELLA ZONA (PIÙ AMPIA) DATA DA:

$$\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 2|x|\}$$

VALE LA DISUGUAGLIANZA:

$$y^2 - x^2 = \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{4}(y^2 - 4x^2) > \frac{3}{4}y^2 \geq \frac{1}{2}y^2$$

QUINDI SE CONSIDERO SU Ω_1 I 2 P. DI CAUCHY:

$$(9)\ \begin{cases} y' = y^2 - x^2 \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad (10)\ \begin{cases} y' = \frac{1}{2}y^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

POSSO APPLICARE IL T. DEL CONFRONTO E DIRE CHE PER $x>0$, FINCHÉ ESISTONO ENTRAMBE, QUELLA DI (9) STA SOPRA QUELLA DI (10). MA QUELLA DI (10) SI TROVA ESPLICITAMENTE PERCHÉ È A VARIABILI SEPARABILI:

$$\frac{y'(x)}{(y(x))^2} = \frac{1}{2} \iff \left(-\frac{1}{y(x)}\right)' = \left(\frac{1}{2}x\right)' \iff -\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{2}x + c \iff y(x) = \frac{1}{-c-\frac{x}{2}}$$

MA DOVENDO ESSERE $y(0)=2$, SI OTTIENE:

$$y(x) = \frac{2}{1-x}.$$

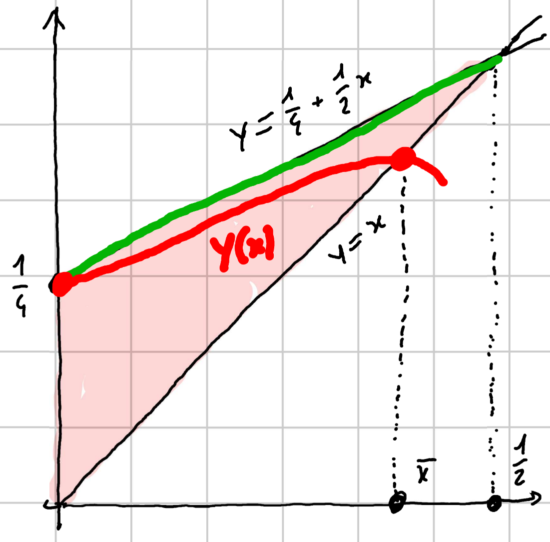
CHE QUINDI È LA SOL. DI (10). SI NOTI CHE TENDE A $+\infty$ PER $x \to 1^-$, DI CONSEGUENZA ANCHE LA SOL. DI (9), CHE PER IL T. DEL CONFRONTO GLI STA SOPRA, DEVE AVERE UN ASINTOTO VERTICALE DEL TIPO $x = c$ CON $c \leq 1$.

QUINDI LA NOSTRA SOL. NON È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.

6 SIA $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ x \leq y \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x\}$

LA REGIONE EVIDENZIATA IN ROSA IN FIGURA.

LA LINEA VERDE È UNA SOPRASOLUZIONE STRETTA PER $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ PERCHÉ [... SOLITI CALCOLI ...], QUINDI LA SOL. $y(x)$ DEL NOSTRO P. DI CAUCHY, FINCHÉ ESISTE, DEVE STARE SOTTO.



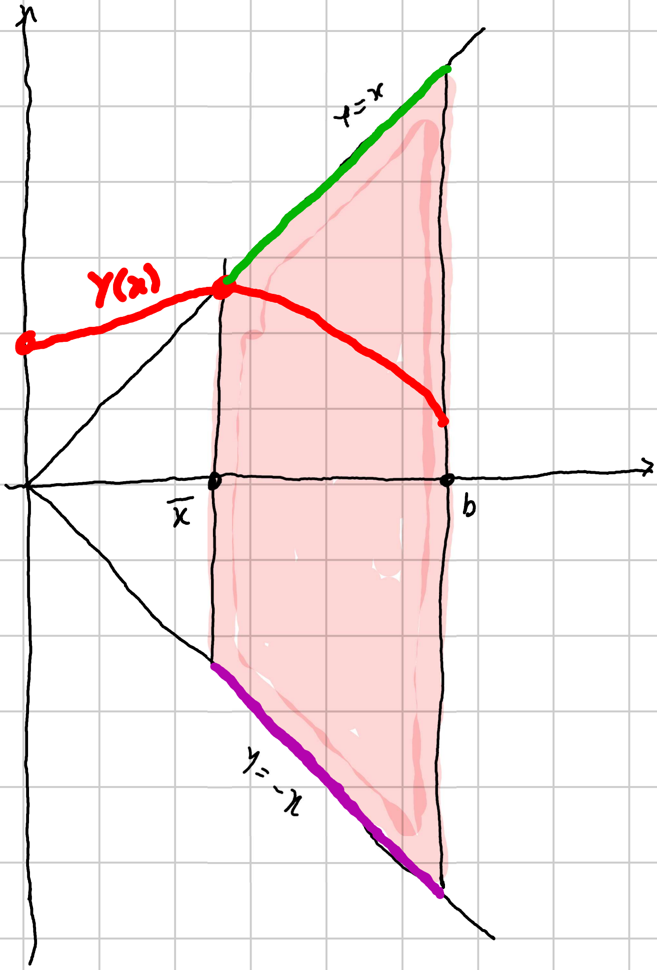
MA SICCOME È PROLUNGABILE FINO AD USCIRE DA K, DEVE NECESSARIAMENTE INTERSECARE LA RETTA $y=x$ PER $x=\bar{x}\in(0,\frac{1}{2})$.

SI NOTI CHE LA RETTA $y=x$ È UNA SOPRASOLUZIONE STRETTA PERCHÉ, SOSTITUITA IN $y'=y^2-x^2$, IL PRIMO MEMBRO VIENE 1 E IL SECONDO 0.

ANALOGAMENTE SI OTTIENE CHE $y=-x$ È UNA SOTTOSOLUZIONE STRETTA.

DI CONSEGUENZA, PER $x>\bar{x}$ $y(x)$ RIMANE SEMPRE COMPRESA TRA LE 2 RETTE.

SE QUINDI FOSSE PROLUNGABILE SOLO FINO A UN CERTO $b<+\infty$ SI AVREBBE UNA CONTRADDIZIONE PERCHÉ STAREBBE IN UN COMPATTO (LA ZONA ROSA) E QUINDI SAREBBE ULTERIORMENTE PROLUNGABILE.



QUINDI È PROLUNGABILE FINO A $+\infty$.

ANCHÉ SE NON È RICHIESTO DAL PROBLEMA LO STUDENTE PUÒ DIVERTIRSI (!!!) A DIMOSTRARE CHE, PER $x\to+\infty$, LA RETTA $y=-x$ È ASINTOTO OBLIQUO DI $y(x)$.

$\boxed{C}$ PRESO IL NOSTRO PROB. DI CAUCHY:

$$(11)\qquad \begin{cases} y'=y^2-x^2 \\ y(0)=\alpha \end{cases}$$

PER OGNI DATO INIZIALE $\alpha>0$ INDICHIAMO CON $y_\alpha(x)$ LA SOLUZIONE CHE SI OTTIENE.

CONSIDERIAMO I SEGUENTI INSIEMI DI DATI INIZIALI:

$B = \{\alpha > 0 \mid$ IL GRAFICO DI $y_\alpha(x)$ INTERSECA LA RETTA $y = x\}$

E

$C = \{\alpha > 0 \mid \exists b \in (0, +\infty)$ TALE CHE $\lim_{x \to b^-} y(x) = +\infty\}$

AD ESEMPIO $2 \in C$ E $\frac{1}{4} \in B$.

SI POSSONO DIMOSTRARE I SEGUENTI PASSI (DI CUI LASCIAMO I DETTAGLI ALLO STUDENTE, EVENTUALMENTE DA CHIEDERE AL RICEVIMENTO):

$\boxed{\text{I° PASSO}}$ GLI INSIEMI B E C SONO DELLA FORMA $B = (0, \alpha_1)$ E $C = (\alpha_2, +\infty)$. IN PARTICOLARE B NON HA MASSIMO E C NON HA MINIMO.

$\boxed{\text{II° PASSO}}$ SE $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ ALLORA $y_\alpha(x)$ È ASINTOTICA A $y = x$

$\boxed{\text{III° PASSO}}$ SI HA $\alpha_1 = \alpha_2$, CIOÈ C'È UN SOLO DATO INIZIALE CHE NON STA NÉ IN B NÉ IN C.