18 maggio 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

# TOPOLOGIA IN $\mathbb{R}^n$

**OSS. 0** TUTTE LE PRINCIPALI DEFINIZIONI CHE ABBIAMO DATO IN $\mathbb{R}$ (PROPRIETÀ TOPOLOGICHE DI INSIEMI, LIMITI, CONTINUITÀ, ECC..) DIPENDEVANO ESSENZIALMENTE DAL CONCETTO DI INTORNO, CHE A SUA VOLTA DIPENDEVA DA QUELLO DI DISTANZA. QUELLO CHE FAREMO ORA SARÀ DI DEFINIRE "DISTANZA" E "INTORNO" SU $\mathbb{R}^n$, DOPODICHÉ LA TEORIA SI SVILUPPA FORMALMENTE IN MODO QUASI IDENTICO A QUANTO FATTO IN $\mathbb{R}$, NEL SENSO CHE I TEOREMI E LE DEFINIZIONI SPESSO SEMBRANO IDENTICI, MA NON BISOGNA DIMENTICARE CHE LA PAROLA "INTORNO" HA UN SIGNIFICATO DIVERSO.

---

**DEF. 1** PER OGNI $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ DEFINIAMO

$$\|x\|_1 = |x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|\}$$

**OSS. 1** $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ SONO DELLE "NORME", CIOÈ DELLE APPLICAZIONI DA $\mathbb{R}^n$ IN $\mathbb{R}$ AVENTI LE PROPRIETÀ:

1) $\forall x\in\mathbb{R}^n$ $\|x\|\geq 0$, CON L'UGUAGLIANZA CHE VALE SE E SOLO SE $x=0$.

2) $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$ $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$

3) $\forall x,y\in\mathbb{R}$ $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (DISUG. TRIANGOLARE)

IL FATTO CHE SIA $\|\cdot\|_1$, SIA $\|\cdot\|_2$, SIA $\|\cdot\|_\infty$ SODDISFINO TUTTE LE PROPRIETÀ (1), (2) E (3) È DI DIMOSTRAZIONE MOLTO SEMPLICE E VIENE LASCIATA ALLO STUDENTE. CI LIMITIAMO A RIPORTARE SOLO LA DIMOSTRAZIONE DELLA DISUG. TRIANGOLARE PER $\|\cdot\|_2$.

**DIMO. DI (3) PER $\|\cdot\|_2$**

SE INDICHIAMO CON $\langle\,,\rangle$ IL PRODOTTO SCALARE CANONICO DI $\mathbb{R}^n$, SI HA

$$\|x+y\|_2^2 = \langle x+y,x+y\rangle = \langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle+2\langle x,y\rangle = \|x\|_2^2+\|y\|_2^2+2\langle x,y\rangle\leq$$

PER LA DISUG. DI CAUCHY-SCHWARZ

$$\leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2 \cdot \|y\|_2 = \left(\|x\|_2 + \|y\|_2\right)^2$$

QUINDI $\|x+y\|_2^2 \leq \left(\|x\|_2 + \|y\|_2\right)^2$ DA CUI LA TESI.

---

**DEF. 2** PER OGNI $x, y \in \mathbb{R}^n$ DEFINIAMO

$$d_1(x,y) = \|x-y\|_1$$

$$d_2(x,y) = \|x-y\|_2$$

$$d_\infty(x,y) = \|x-y\|_\infty$$

**OSS. 2** GRAZIE AL FATTO CHE $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ E $\|\cdot\|_\infty$ SONO DELLE NORME, È MOLTO SEMPLICE MOSTRARE CHE $d_1, d_2, d_\infty$ SONO DELLE DISTANZE SU $\mathbb{R}^n$, CIOÈ DELLE APPLICAZIONI DA $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ IN $\mathbb{R}$ CON LE PROPRIETÀ:

1) $\forall x,y \in \mathbb{R}^n \quad d(x,y) \geq 0$ CON L'UGUAGLIANZA CHE VALE SE E SOLO SE $x=y$.

2) $\forall x,y \in \mathbb{R}^n \quad d(x,y) = d(y,x)$

3) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (DISUG. TRIANGOLARE)

(LE DIMOSTRAZIONI SONO SEMPLICISSIME E VENGONO LASCIATE ALLO STUDENTE)

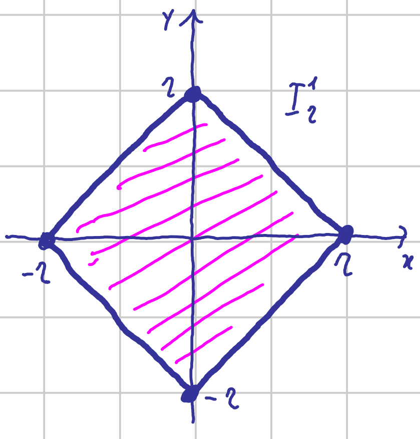
---

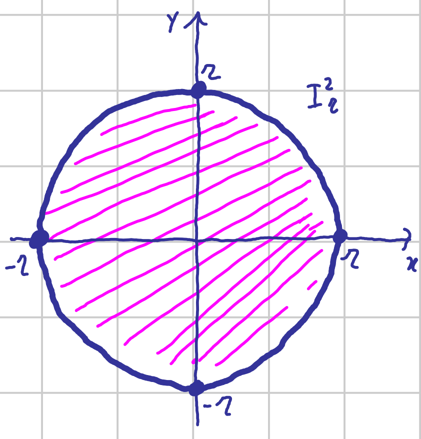
**DEF. 3** DATO $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ E $r > 0$ DEFINIAMO:

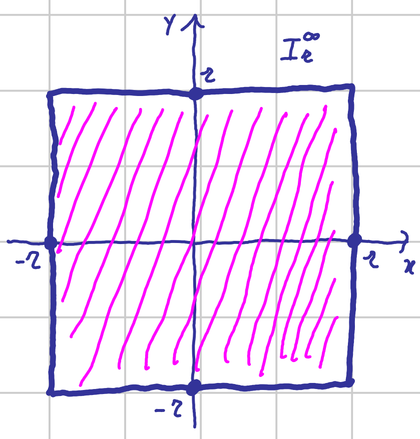
$$\left.\begin{aligned} I_r^1(\bar{x}) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_1(x,\bar{x}) < r\} \\ I_r^2(\bar{x}) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_2(x,\bar{x}) < r\} \\ I_r^\infty(\bar{x}) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_\infty(x,\bar{x}) < r\} \end{aligned}\right\}$$

(INTORNO DI CENTRO $x_0$ E RAGGIO $r$ RISPETTO A $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$)

**ES. 1** SE SIAMO IN $\mathbb{R}^2$ E $\bar{x} = 0$, ALLORA $I_r^1$, $I_r^2$ E $I_r^\infty$ SONO I SEGUENTI INSIEMI:



**TEO. 1** $\forall x \in \mathbb{R}^n$ VALGONO LE DISUGUAGLIANZE:

$$\| x \|_2 \leq \| x \|_1 \leq \sqrt{n} \, \| x \|_2$$

**DIMO**

SIA $x = (x_1, \dots, x_n)$. PER DIMOSTRARE $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ BASTA DIMOSTRARE $\|x\|_2^2 \leq \|x\|_1^2$, CIOÈ

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 \leq \left( |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \right)^2$$

CHE PERÒ È OVVIA.

PER DIMOSTRARE $\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$ OSSERVIAMO CHE:

DISUG. CAUCHY-SCHWARZ

$$\|x_1\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \langle (1,1,\dots,1), (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \rangle \leq$$

$$\leq \| (1,1,\dots,1) \|_2 \cdot \| (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \|_2 = \sqrt{n} \cdot \|x\|_2$$

**COROLLARIO 1**

$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ E $\forall r > 0$ SI HA: $I_r^1(x_0) \subset I_r^2(x_0) \subset I_{r \cdot \sqrt{n}}^1(x_0)$

**DIMO**

$$x \in I_r^1(x_0) \iff \| x - x_0 \|_1 < r \overset{\text{TEO. 1}}{\Rightarrow} \|x - x_0\|_2 < r \iff x \in I_r^2(x_0)$$

QUINDI $I_r^1(x_0) \subset I_r^2(x_0)$

$$x \in I_r^2(x_0) \iff \|x - x_0\|_2 < r \overset{\text{TEO. 1}}{\Rightarrow} \|x - x_0\|_1 < \sqrt{n} \cdot r \iff x \in I_{r \cdot \sqrt{n}}^1(x_0)$$

QUINDI $I_r^2(x_0) \subset I_{r \cdot \sqrt{n}}^1(x_0)$.

**OSS. 3** ESSENZIALMENTE IL COROLLARIO 1 DICE CHE, FISSATO $x_0$, COMUNQUE SI PRENDA UN SUO INTORNO RISPETTO A $\|\cdot\|_1$ CE N'È UNO RISPETTO A $\|\cdot\|_2$ IN ESSO CONTENUTO E VICEVERSA.

CIÒ RENDERÀ INDIFFERENTE L'UTILIZZO DI $\|\cdot\|_1$ E $\|\cdot\|_2$ NELLA MAGGIOR PARTE DI CIÒ CHE DIREMO IN SEGUITO. AD ESEMPIO, PRESO $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ E $(x_n)$ SUCCESSIONE IN $\mathbb{R}^n$ SARÀ LA STESSA COSA DIRE CHE $x_n$ ENTRA DEFINITIVAMENTE IN OGNI INTORNO DI TIPO $I_r^1(\bar{x})$ O IN OGNI INTORNO DI TIPO $I_r^2(\bar{x})$.

QUINDI, NON APPENA DEFINIREMO IL LIMITE DI UNA SUCCESSIONE DI PUNTI, SI AVRÀ CHE $x_n \to \bar{x}$ RISPETTO A $\|\cdot\|_1$ SE E SOLO SE $x_n \to \bar{x}$ RISPETTO A $\|\cdot\|_2$.

**OSS. 4** QUELLO CHE ABBIAMO FATTO NEL $\boxed{\text{TEO. 1}}$ PER $\|\cdot\|_1$ E $\|\cdot\|_2$, SI PUÒ FARE ANCHE TRA $\|\cdot\|_2$ E $\|\cdot\|_\infty$ E $\|\cdot\|_1$ E $\|\cdot\|_\infty$ OTTENENDO LE DISUGUAGLIANZE:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty \quad \text{E} \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$$

VALGONO QUINDI GLI ANALOGHI DEL $\boxed{\text{COR. 1}}$ E DELL' $\boxed{\text{OSS. 3}}$.

IL FATTO CHE LE 3 NORME SIANO EQUIVALENTI RENDE IRRILEVANTE QUALE DELLE 3 SI STA USANDO.

VISTO CHE NOI USEREMO DI PREFERENZA $\|\cdot\|_2$ E $d_2$, NEL SEGUITO SCRIVEREMO $\|\cdot\|$, $d$ E $I$ AL POSTO DI $\|\cdot\|_2$, $d_2$ E $I^2$

---

**DEF. 4** DATI $x_0 \in \mathbb{R}^n$ E $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, DIREMO CHE $x_0$ È

1) INTERNO AD $\Omega$ SE $\exists r>0$ T.C. $I_r(x_0) \subset \Omega$
2) ESTERNO AD $\Omega$ SE $\exists r>0$ T.C. $I_r(x_0) \cap \Omega = \emptyset$
3) DI FRONTIERA PER $\Omega$ SE $\forall r>0$ $I_r(x_0)$ INTERSECA SIA $\Omega$ CHE $\Omega^c$.
4) DI ACCUMULAZIONE PER $\Omega$ SE $\forall r>0$ $I_r(x_0) \cap (\Omega - \{x_0\}) \neq \emptyset$
5) ISOLATO DI $\Omega$ SE $\exists r>0$ T.C. $I_r(x_0) \cap \Omega = \{x_0\}$

INOLTRE DEFINIAMO:

$\partial\Omega$ = FRONTIERA DI $\Omega$ = INSIEME DI TUTTI I PUNTI DI FRONTIERA DI $\Omega$

$\mathring{\Omega}$ = PARTE INTERNA DI $\Omega$ = INSIEME DI TUTTI I PUNTI INTERNI DI $\Omega$

$\bar{\Omega}$ = CHIUSURA DI $\Omega$ = $\Omega \cup \partial\Omega$

$D\Omega$ = DERIVATO DI $\Omega$ = INSIEME DI TUTTI I PUNTI DI ACCUMULAZIONE DI $\Omega$

**ES. 2** SIA $\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1,\ y \neq 0,\ y < \sqrt{1-x^2}\right\} \cup \{(2,0)\}$

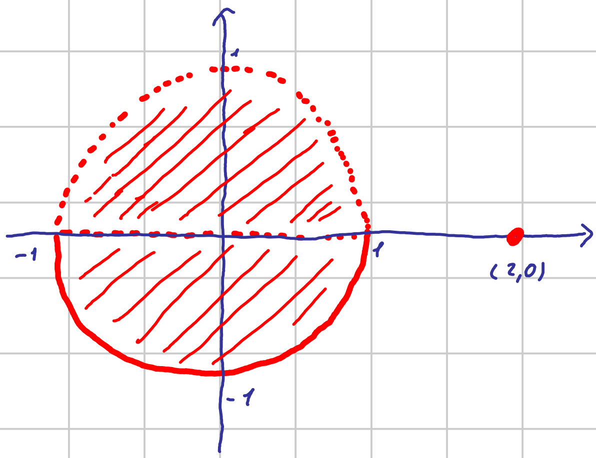
SI HA:

$\partial\Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\} \cup \{(x,y) \mid y=0,\ -1\le x\le 1\} \cup \{(2,0)\}$

$\mathring{\Omega} = \{(x,y) \mid x^2+y^2<1,\ y\neq 0\}$

$\bar{\Omega} = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\} \cup \{(2,0)\}$

$D\Omega = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$




**DEF. 5** DATO $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ DIREMO CHE $\Omega$ È:

1) APERTO SE $\Omega = \mathring{\Omega}$
COMPLEMENTARE DI...
2) CHIUSO SE $\Omega^c$ È APERTO
3) DENSO SE $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^n$
4) DISCRETO SE OGNI $x \in \Omega$ È ISOLATO
5) LIMITATO SE $\exists r>0$ T.C. $\Omega \subset I_r(0)$

**DEF.6** DATA $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ SUCCESSIONE A VALORI IN $\mathbb{R}^n$ E DATO $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$, DIREMO CHE $x_m \to \bar{x}$ SE $\forall \varepsilon>0$, DEFINITIVAMENTE IN $m$, $x_m \in I_\varepsilon(\bar{x})$.

INVECE DIREMO CHE $x_m \to \infty$ SE $\forall r>0$, DEFINITIVAMENTE IN $m$, $x_m \notin I_r(0)$.

**OSS.5** ORA CHE ABBIAMO INTRODOTTO I CONCETTI DI BASE COME IN $\mathbb{R}$, SIAMO PRONTI A ENUNCIARE E DIMOSTRARE I CORRISPONDENTI TEOREMI CHE AVEVAMO FATTO NEL CASO DI $\mathbb{R}$. NE FAREMO SOLO ALCUNI, LASCIANDO ALLO STUDENTE LA LISTA COMPLETA, VISTO CHE NELLA MAGGIOR PARTE DEI CASI LA DIMOSTRAZIONE È IDENTICA, PUR DI DARE ALLA PAROLA "INTORNO" IL SIGNIFICATO CORRETTO.

**TEO.2** DATO $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

(1) $\Omega$ È CHIUSO (CIOÈ $\Omega^c$ È APERTO)

(2) $\partial\Omega \subset \Omega$

(3) $D\Omega \subset \Omega$

(4) $\left((x_m)\subset\Omega \text{ E } x_m\to\bar{x}\right) \Rightarrow \bar{x}\in\Omega$

**DIMO**

$\boxed{(1)\Leftrightarrow(2)}$ DALLA DEFINIZIONE DI FRONTIERA È IMMEDIATO CHE $\partial\Omega = \partial(\Omega^c)$, QUINDI:

$\Omega$ È CHIUSO $\Leftrightarrow$ $\Omega^c$ È APERTO $\Leftrightarrow$ $\partial(\Omega^c)\subset\Omega \Leftrightarrow \partial\Omega\subset\Omega$

$\boxed{(2)\Rightarrow(3)}$ SI NOTI CHE UN PUNTO DI ACC. NON PUÒ ESSERE ESTERNO QUINDI O È INTERNO (E QUINDI STA IN $\Omega$) O È DI FRONTIERA (E ALLORA STA IN $\Omega$ PERCHÉ VALE (2)). QUINDI $D\Omega\subset\Omega$

$\boxed{(3)\Rightarrow(2)}$ SE $x\in\partial\Omega$ MA $x\notin D\Omega$ ALLORA $\exists r>0$ T.C. $I_r(x)\cap\Omega=\{x\}$, QUINDI $x\in\Omega$. SE INVECE $x\in\partial\Omega$ E $x\in D\Omega$ ALLORA $x\in\Omega$ GRAZIE A (3). QUINDI $\partial\Omega\subset\Omega$.

$\boxed{(2)\Rightarrow(4)}$ $x_m\to\bar{x} \Rightarrow \forall r>0\ I_r(\bar{x})\cap\Omega\neq\emptyset \Rightarrow \bar{x}$ NON È ESTERNO $\Rightarrow \bar{x}\in\partial\Omega\cup\Omega \overset{\text{GRAZIE A (2)}}{\subset} \Omega$

QUINDI VALE (4).

$\boxed{(4)\Rightarrow(2)}$ $\bar{x}\in\partial\Omega \Rightarrow \forall m\in\mathbb{N}-\{0\}\ I_{\frac{1}{m}}(\bar{x})\cap\Omega\neq\emptyset$ QUINDI $\forall m$ PRENDO $x_m\in I_{\frac{1}{m}}(\bar{x})\cap\Omega$. TALE $(x_m)$ È UNA SUCC. A VALORI IN $\Omega$ CHE CONVERGE A $\bar{x}$ QUINDI, GRAZIE A (4), SI HA $\bar{x}\in\Omega$.

QUINDI $\bar{x}\in\partial\Omega \Rightarrow \bar{x}\in\Omega$. CIÒ SIGNIFICA CHE VALE (2).

# TOPOLOGIA IN $\mathbb{R}^n$ (... CONTINUA...)

**TEO. 1** DATA $(x_m)$ A VALORI IN $\mathbb{R}^n$ E $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

(1) $x_m \to \bar{x}$

(2) $d(x_m, \bar{x}) \to 0$

(3) PER OGNI $k = 1, \dots, n$ $x_m^{(k)} \to \bar{x}^{(k)}$ (DOVE, SE $x \in \mathbb{R}^n$, $x^{(k)}$ SIGNIFICA "$k$-ESIMA COMPONENTE DI $x$")

**DIMO**

L'EQUIVALENZA TRA (1) E (2) È OVVIA.

MOSTRIAMO $(2) \Rightarrow (3)$.

$\forall k = 1, \dots, n$ SI HA:

$$|x_m^{(k)} - \bar{x}^{(k)}| = \sqrt{(x_m^{(k)} - \bar{x}^{(k)})^2} \le \sqrt{(x_m^{(1)} - \bar{x}^{(1)})^2 + \dots + (x_m^{(n)} - \bar{x}^{(n)})^2} = d(x_m, \bar{x})$$

QUINDI SE $d(x_m, \bar{x}) \to 0$ ANCHE $|x_m^{(k)} - \bar{x}^{(k)}| \to 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$

MOSTRIAMO INFINE CHE $(3) \Rightarrow (2)$.

SAPPIAMO CHE

$$d(x_m, \bar{x}) = d_2(x_m, \bar{x}) \le d_1(x_m, \bar{x}) = |x_m^{(1)} - \bar{x}^{(1)}| + \dots + |x_m^{(n)} - \bar{x}^{(n)}|$$

QUINDI SE TUTTI I $|x_m^{(k)} - \bar{x}^{(k)}|$ TENDONO A ZERO PER $m \to +\infty$, ANCHE $d_1(x_m, \bar{x}) \to 0$

E QUINDI ANCHE $d(x_m, \bar{x}) \to 0$.

**OSS. 1** IL FATTO CHE IL LIMITE DI $(x_m)$ SI POSSA FARE COMPONENTE PER COMPONENTE RENDE BANALI LE DIMOSTRAZIONI DI ALCUNI TEOREMI CHE SAPPIAMO GIÀ VALERE IN $\mathbb{R}$, COME AD ESEMPIO L'UNICITÀ DEL LIMITE E IL LIMITE DELLA SOMMA.

**DEF. 1** DATA LA SUCCESSIONE $(x_m)$ A VALORI IN $\mathbb{R}^n$, DIREMO CHE È DI CAUCHY SE:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE $\forall m, k \ge m_0$ SI HA $d(x_m, x_k) < \varepsilon$

**TEO.2** DATA $(x_m)$ A VALORI IN $\mathbb{R}^n$ È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

(1) $(x_m)$ HA LIMITE $\bar{x} \in \mathbb{R}$

(2) $(x_m)$ È DI CAUCHY.

**DIMO**

È CONSEGUENZA IMMEDIATA DEL FATTO CHE $(x_m)$ È DI CAUCHY SE E SOLO SE SONO DI CAUCHY LE SUCCESSIONI DELLE SUE COMPONENTI.

**DEF.2** DATO $K \subset \mathbb{R}^n$, DIREMO CHE $K$ È COMPATTO PER SUCCESSIONI SE DA OGNI SUCC. $(x_m)$ A VALORI IN $K$ E SEMPRE POSSIBILE ESTRARRE UNA SSUCC. $(x_{m_k})$ TALE CHE $x_{m_k} \to \bar{x} \in K$.

**TEO.3** DATO $K \subset \mathbb{R}^n$, È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

1) $K$ È COMPATTO PER SUCCESSIONI

2) $K$ E CHIUSO E LIMITATO

**DIMO**

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ PRESA $(x_m)$ A VALORI IN $K$ VOGLIAMO ESTRARRE DA ESSA UNA SSUCC. CONVERGENTE AD UN $\bar{x} \in K$. OSSERVIAMO CHE

$$(x_m)_{m \in \mathbb{N}} = \left( \left( x_m^{(1)}, x_m^{(2)}, \dots, x_m^{(n)} \right) \right)_{m \in \mathbb{N}}$$

QUINDI SE $(x_m)$ È LIMITATA ANCHE LE $n$ SUCCESSIONI IN $\mathbb{R}$ DATE DA $(x_m^{(k)})$ SONO LIMITATE. POSSIAMO QUINDI ESTRARRE UNA SOTTOSUCCESSIONE DA $(x_m)$ IN MODO CHE $(x_{m_k}^{(1)})$ CONVERGA A UN $\bar{x}^{(1)} \in \mathbb{R}$, POI DA QUESTA ESTRARRE UNA SOTTOSUCCESSIONE IN MODO CHE ANCHE $(x_{m_k}^{(2)})$ CONVERGA A UN $\bar{x}^{(2)} \in \mathbb{R}$, E COSÌ VIA.

DOPO $n$ PASSI LA SOTTOSUCCESSIONE ESTRATTA $(x_{m_k})$ È TALE CHE TUTTE LE SUE COMPONENTI CONVERGONO, CIOÈ:

$$x_{m_k}^{(1)} \to \bar{x}^{(1)}, \quad x_{m_k}^{(2)} \to \bar{x}^{(2)}, \dots, \quad x_{m_k}^{(n)} \to \bar{x}^{(n)}$$

MA CIÒ SIGNIFICA CHE:

$$x_{m_k} \to \bar{x} = \left( \bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(n)} \right)$$

ORA, ESSENDO $K$ CHIUSO E $(x_{m_k})$ A VALORI IN $K$, SEGUE CHE ANCHE $\bar{x} \in K$.
QUINDI VALE (1)

$\boxed{(1)\Rightarrow(2)}$ SE K NON FOSSE LIMITATO ALLORA $\forall n \in \mathbb{N}-\{0\}$ POSSO PRENDERE $x_n \in K - I_n(0)$. QUINDI LA SUCCESSIONE $(x_n)$ STA DEFINITIVAMENTE FUORI DA OGNI PALLA CENTRATA IN 0. CIÒ SIGNIFICA CHE $x_n \to \infty$ E QUINDI ANCHE OGNI SUA SOTTOSUCCESSIONE TENDE A $+\infty$. QUINDI $(x_n)$ È UNA SUCCESSIONE A VALORI IN K DALLA QUALE NON POSSO ESTRARRE ALCUNA SOTTOSUCC. CHE CONVERGA A UN PUNTO DI K. ASSURDO, PERCHÈ K È COMPATTO.

QUINDI K NON PUÒ NON ESSERE LIMITATO.

SE K NON FOSSE CHIUSO CI SAREBBE $\bar{x}$ DI ACCUMULAZIONE PER K, MA CON $\bar{x} \notin K$.

MA ALLORA $\forall n \in \mathbb{N}-\{0\}$ POSSO PRENDERE $x_n \in I_{\frac{1}{n}}(\bar{x}) \cap (K - \{\bar{x}\})$.

OTTENGO UNA SUCCESSIONE $(x_n)$ A VALORI IN K TALE CHE $x_n \to \bar{x} \notin K$.

CIÒ SIGNIFICA CHE OGNI SUA SOTTOSUCCESSIONE TENDE ANCORA A $\bar{x}$, QUINDI DA $(x_n)$ NON POSSO ESTRARRE ALCUNA SOTTOSUCCESSIONE CHE TENDA A UN PUNTO DI K.

ASSURDO PERCHÈ K È COMPATTO.

QUINDI È ASSURDO SUPPORRE CHE K NON SIA CHIUSO.

**OSS.2** IN REALTÀ CI SAREBBE UNA TERZA PROPRIETÀ CHE IN $\mathbb{R}^n$ (ANZI IN UN GENERICO SPAZIO METRICO) È EQUIVALENTE A (1). È LA SEGUENTE:

(3) SE $\mathcal{F}$ È UNA QUALSIASI FAMIGLIA DI APERTI CHE RICOPRE K, CIOÈ TALE CHE $K \subset \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$, ALLORA ESISTE SEMPRE UNA SOTTOFAMIGLIA FINITA DI $\mathcal{F}$ CHE RICOPRE ANCORA K.

LO STUDENTE LA INCONTRERÀ NEL CORSO DI ANALISI 3 QUANDO STUDIERÀ GLI SPAZI METRICI IN GENERALE.

---

**OSS.3** QUANDO SI PASSA DA $\mathbb{R}$ A $\mathbb{R}^n$, LA NOZIONE DI INTERVALLO PUÒ ESSERE GENERALIZZATA IN PIÙ MODI. IL PIÙ SEMPLICE È QUELLO DI DEFINIRE L'INTERVALLO n-DIMENSIONALE COME IL PRODOTTO CARTESIANO DI n INTERVALLI DI $\mathbb{R}$. AD ESEMPIO IN $\mathbb{R}^2$ GLI INTERVALLI SONO I RETTANGOLI MENTRE IN $\mathbb{R}^3$ SONO I PARALLELEPIPEDI RETTANGOLI.

CI SONO COMUNQUE ALTRI MODI, PIÙ UTILI, DI GENERALIZZARE IN $\mathbb{R}^n$ IL CONCETTO DI INTERVALLO: SONO QUELLI DI INSIEME CONVESSO E INSIEME CONNESSO, CHE ANDIAMO A DESCRIVERE.

**DEF. 3** DATI $x, y \in \mathbb{R}^n$ DEFINIAMO SEGMENTO DI ESTREMI $x$ E $y$ E INDICHIAMO CON $[x,y]$ L'INSIEME $\{\lambda x + (1-\lambda) y \mid \lambda \in [0,1]\}$.

**DEF. 4** DATO $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, DIREMO CHE $\Omega$ È "CONVESSO" SE $\forall x, y \in \Omega$ SI HA $[x,y] \subset \Omega$.

**DEF. 5** DATO $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, DIREMO CHE $\Omega$ È "NON CONNESSO" SE ESISTONO $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$, DISGIUNTI ENTRAMBI APERTI, TALI CHE $A_1 \cup A_2 \supset \Omega$ CON $A_1 \cap \Omega$ E $A_2 \cap \Omega$ ENTRAMBI NON VUOTI.
SE $\Omega$ NON È "NON CONNESSO", DIREMO CHE È CONNESSO.

**DEF. 6** DATO $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, DIREMO CHE $\Omega$ È CONNESSO PER SPEZZATE SE, $\forall x, y \in \Omega$ $\exists^{no}$ $x_1, x_2, \dots, x_m \in \Omega$ TALI CHE I SEGMENTI $[x, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{m-1}, x_m], [x_m, y]$ SONO TUTTI CONTENUTI IN $\Omega$.

**TEO. 4** SIA $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ APERTO. ALLORA È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

(1) $\Omega$ È CONNESSO.

(2) $\Omega$ È CONNESSO PER SPEZZATE.

**DIMO**

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ BASTERÀ MOSTRARE CHE, PRESO $\bar{x} \in \Omega$, L'INSIEME $A = \{x \in \Omega \mid \exists \text{ SPEZZATA TRA } x \text{ E } \bar{x}\}$ È TUTTO $\Omega$. SE PER ASSURDO COSÌ NON FOSSE ALLORA SAREBBE NON VUOTO L'INSIEME $B = \{x \in \Omega \mid \text{NON ESISTE ALCUNA SPEZZATA TRA } x \text{ E } \bar{x}\}$.

OVVIAMENTE $A \cup B = \Omega$. SE RIUSCIAMO A DIMOSTRARE CHA $A$ E $B$ SONO ENTRAMBI APERTI ABBIAMO OTTENUTO L'ASSURDO, VISTO CHE $\Omega$ È CONNESSO.

$A$ È APERTO PERCHÈ SE $x \in A$, ESSENDO $\Omega$ APERTO POSSO PRENDERE $I_2(x)$ TUTTO CONTENUTO IN $\Omega$, DOPODICHÈ OGNI $y \in I_2(x)$ È CONNESSO DA UN SEGMENTO A $x$ E QUINDI DA UNA SPEZZATA A $\bar{x}$. QUINDI SE $x \in A$ È ANCHE $x$ INTERNO AD $A$.
QUINDI $A$ È APERTO.

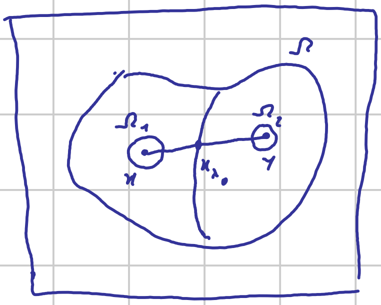
$B$ È APERTO PERCHÈ SE $x \in B$, BASTA PRENDERE $I_2(x) \subset \Omega$ E NESSUNO DEGLI $y \in I_2(x)$ PUÒ ESSERE CONNESSO A $\bar{x}$ CON UNA SPEZZATA, ALTRIMENTI LO SAREBBE ANCHE $x$.
QUINDI SE $x \in B$, ESISTE $I_2(x)$ TUTTO CONTENUTO IN $B$. QUINDI $B$ È APERTO.

QUINDI ABBIAMO OTTENUTO UNA CONTRADDIZIONE, VISTO CHE $\Omega$ È CONNESSO.

QUINDI SI ARRIVA AD ASSURDO SUPPONENDO CHE $\Omega$ NON SIA CONNESSO PER SPEZZATE, QUINDI DEVE VALERE (2).

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ PER ASSURDO SUPPONIAMO CHE ESISTANO $\Omega_1$ E $\Omega_2$ APERTI E NON VUOTI TALI CHE $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$. PRESO $\bar{x} \in \Omega_1$ E $\tilde{x} \in \Omega_2$, SICCOME VALE (2), $\exists$ SPEZZATA CONTENUTA

IN $\Omega$ CHE CONGIUNGE $\bar{x}$ E $\tilde{x}$, QUINDI ESISTONO $x, y \in \Omega$ TALI CHE $[x,y] \subset \Omega$ E $x \in \Omega_1$ E $y \in \Omega_2$. PER OGNI $\lambda \in [0,1]$ SIA $x_\lambda = (1-\lambda)x + \lambda y$. SI NOTI CHE $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ SI HA:




$$d(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}) = \| (1-\lambda_1)x + \lambda_1 y - ((1-\lambda_2)x + \lambda_2 y) \| =$$

$$= \| (\lambda_2 - \lambda_1)x - (\lambda_2 - \lambda_1) y \| = |\lambda_1 - \lambda_2| \, \|x - y\|$$

IN PARTICOLARE:

$$d(x_\lambda, y) = (1-\lambda)\|x-y\|$$

E

$$d(x_\lambda, x) = \lambda \|x-y\|$$

SIA ORA $\lambda_0 = \inf\{\lambda \mid x_\lambda \in \Omega_2\}$

VISTO CHE $y \in \Omega_2$ E CHE $\Omega_2$ È APERTO C'È TUTTO UN INTORNO $I_r(y) \subset \Omega_2$

QUINDI $d(x_{\lambda_0}, y) > r$, CIOÈ $(1-\lambda_0)\|x-y\| > r$, QUINDI $\lambda_0 < 1$.

ANALOGAMENTE DA $x \in \Omega_1$ SEGUE $\lambda_0 > 0$.

QUINDI $0 < \lambda_0 < 1$.

PER COME È DEFINITO $\lambda_0$, $\forall \lambda \in [0, \lambda_0)$ SI HA $x_\lambda \in \Omega_1$, MENTRE $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon]$ TALE CHE $x_\lambda \in \Omega_2$. CIÒ SIGNIFICA CHE OGNI INTORNO DI $x_{\lambda_0}$ INTERSECA SIA $\Omega_1$ CHE $\Omega_2$. MA SICCOME $\Omega_1$ E $\Omega_2$ SONO DISGIUNTI, QUESTO SIGNIFICA CHE $x_{\lambda_0}$ STA SIA IN $\partial\Omega_1$, CHE IN $\partial\Omega_2$. DI CONSEGUENZA $x \notin \Omega_1$ E $x \notin \Omega_2$, PERCHÉ SONO APERTI. ASSURDO PERCHÉ $x_{\lambda_0} \in \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

SIAMO QUINDI ARRIVATI AD ASSURDO SUPPONENDO $\Omega$ NON CONNESSO.

QUESTO DIMOSTRA (1).

$\boxed{\text{OSS. 4}}$ SI NOTI CHE I CONVESSI SONO PARTICOLARI INSIEMI CONNESSI PER SPEZZATE

# 30-04-2021 (9:00-11:00)

# LEZ 30

## DETTAGLI AGGIUNTI NELLA LEZIONE DI QUEST'ANNO

**ES. 1** INDICHIAMO CON $\ell^2$ L'INSIEME DI TUTTE LE SUCCESSIONI $(a_n)$ TALI CHE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ CONVERGE. NEL SEGUITO, PER BREVITÀ SCRIVEREMO SPESSO $\bar{a}$ AL POSTO DI $(a_n)$. INOLTRE $\forall \bar{a} \in \ell^2$ DEFINIAMO $\|\bar{a}\|_2 = \sqrt{\sum a_n^2}$.
ALLORA $\ell^2$ È UNO SP. VETTORIALE DI DIMENSIONE INFINITA E $\|\cdot\|_2$ È UNA NORMA.

**DIMO**

PRESI $\bar{a} = (a_n) \in \ell^2$ E $\bar{b} = (b_n) \in \ell^2$ SI HA $\bar{a} + \bar{b} \in \ell^2$ PERCHÉ:

$$0 \leq (a_n + b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n \leq 2a_n^2 + 2b_n^2$$

QUINDI $\sum (a_n + b_n)^2$ CONVERGE PER IL CRIT. DEL CONFRONTO.

IL FATTO CHE $\bar{a} \in \ell^2 \Rightarrow \lambda \bar{a} \in \ell^2 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ È OVVIO, COME PURE TUTTE LE ALTRE PROPRIETÀ DI SP. VETTORIALE. QUINDI $\ell^2$ È UNO SP. VETT.

LA DIMENSIONE NON È FINITA PERCHÉ, SE $\forall n \in \mathbb{N}$ DEFINIAMO LA SUCCESSIONE

(1) $$\bar{e}_n = (0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-ESIMO TERMINE}}}{1}, 0, \dots, 0, \dots\dots)$$

SI HA $\bar{e}_n \in \ell^2 \ \forall n \in \mathbb{N}$, INOLTRE NESSUNO DEGLI $\bar{e}_n$ PUÒ ESSERE SCRITTO COME COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ALTRI.

INFINE $\|\cdot\|_2$ È UNA NORMA.

INFATTI $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \ell^2$ E $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ SI HA:

1) $\|\bar{a}\|_2 = \sqrt{\sum a_n^2} \geq 0$ CON "=" CHE VALE SE E SOLO SE $a_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

2) $\|\lambda\bar{a}\|_2 = \sqrt{\sum(\lambda a_n)^2} = \sqrt{\lambda^2\sum a_n^2} = |\lambda|\sqrt{\sum a_n^2} = |\lambda|\,\|\bar{a}\|_2$

3) $\|\bar{a}+\bar{b}\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)^2} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)^2} \leq$

PER LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE PER LA NORMA EUCLIDEA IN $\mathbb{R}^n$

$$\leq \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\sum_{k=0}^{n}a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=0}^{n}b_k^2}\right) =$$

$$= \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty}a_n^2} + \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty}b_n^2} = \|\bar{a}\|_2 + \|\bar{b}\|_2$$

**ES. 2** SIA $K = \{\bar{a}\in\ell^2 \mid \|\bar{a}\|_2 \leq 1\}$ ALLORA $K$ È CHIUSO E LIMITATO MA NON È COMPATTO.

**DIMO**

CHE $K$ SIA LIMITATO È OVVIO.

MOSTRIAMO CHE $K$ È CHIUSO.

$$x\in K^c \Rightarrow \left(\|x\|_2 = 1+2\delta \text{ CON } \delta>0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(I_x(\delta)\cap K = \emptyset\right) \Rightarrow \left(x \text{ INTERNO A } K^c\right)$$

PERCHÈ SE $y\in I_x(\delta)$, GRAZIE ALLA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE SI HA:

$$\|y\|_2 \geq \|x\|_2 - \|y-x\|_2 > 1+2\delta-\delta = 1+\delta > 1$$

QUINDI $K^c$ È APERTO, QUINDI $K$ È CHIUSO.

INFINE MOSTRIAMO CHE $K$ NON È COMPATTO.

INFATTI, SE $\bar{e}_n$ È DEFINITO DA (1), LA SUCCESSIONE $(\bar{e}_n)$ È A VALORI IN $K$, MA DA ESSA NON SI PUÒ ESTRARRE ALCUNA SOTTOSUCCESSIONE CONVERGENTE PERCHÈ PER OGNI $i,j\in\mathbb{N}$ CON $i\neq j$ SI HA:

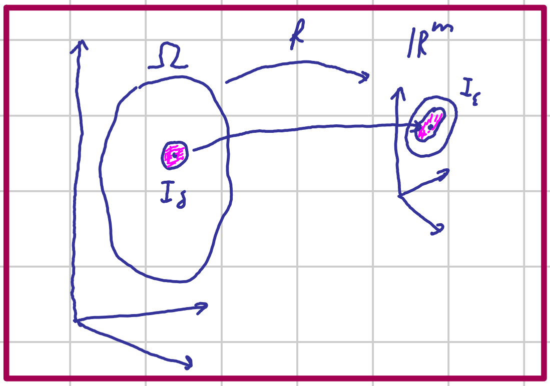
$$\|\bar{e}_i - \bar{e}_j\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

E QUINDI OGNI SOTTOSUCC. DI $(\bar{e}_n)$ NON È DI CAUCHY.

CIÒ SIGNIFICA $K$ NON È COMPATTO.

22 maggio 2020 (9.00-11.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma *Tor Vergata*

# FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI




**DEF. 1** DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x_0$ DI ACCUMULAZIONE PER $\Omega$, $f:\Omega \to \mathbb{R}^m$ ED $\ell \in \mathbb{R}^m$, DIREMO CHE $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ SE:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ TALE CHE $\boxed{f(I_\delta(x_0) \cap (\Omega - \{x_0\})) \subset I_\varepsilon(\ell)}$

AL POSTO DI ■ SI POTEVA ANCHE SCRIVERE: ■

$\boxed{\forall x \in \Omega - \{x_0\} \ (d(x, x_0) < \delta) \Rightarrow (d(f(x), \ell) < \varepsilon)}$

**DEF. 2** DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$ ED $f:\Omega \to \mathbb{R}^m$, DIREMO CHE $f$ È CONTINUA IN $x_0$ SE

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ TALE CHE $\boxed{f(I_\delta(x_0) \cap \Omega) \subset I_\varepsilon(f(x_0))}$. INOLTRE DIREMO CHE $f$ È CONTINUA SE È CONTINUA $\forall x_0 \in \Omega$.

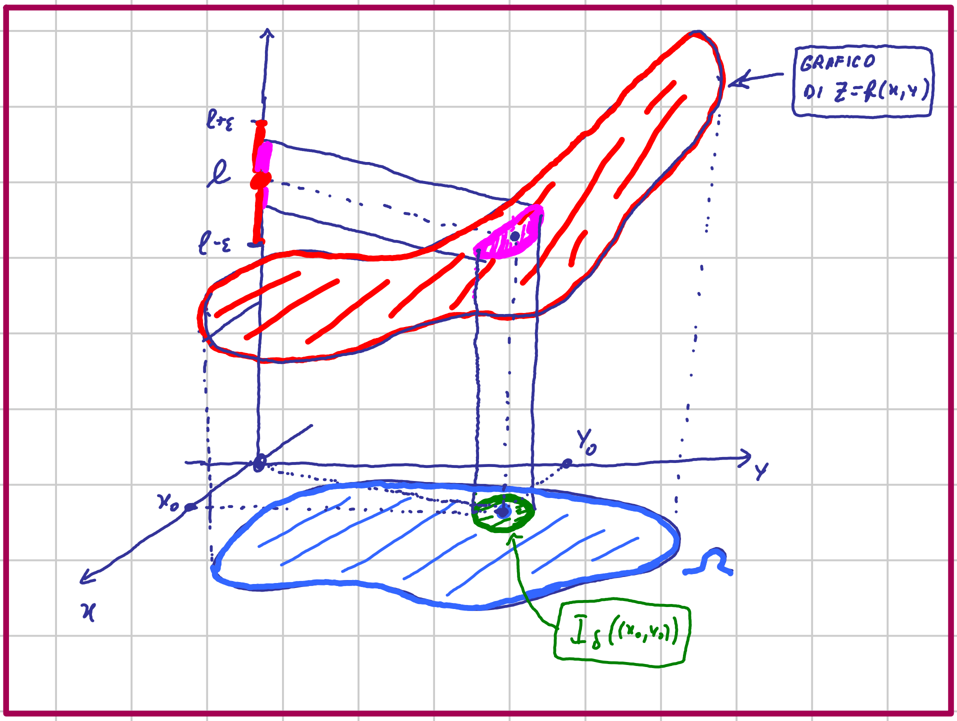
AL POSTO DI ■ SI POTEVA ANCHE SCRIVERE ■

$\boxed{\forall x \in \Omega \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon}$

**OSS. 1** PER CAPIRE BENE È UTILE VISUALIZZARE IL CASO $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ED $f:\Omega \to \mathbb{R}$.

NELLA FUNZIONE IN FIGURA SI HA:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$$



**OSS. 2** PIÙ IN GENERALE SI POSSONO TRATTARE ANCHE I CASI IN CUI $x \to \infty$, OPPURE $f(x) \to \infty$, TENENDO PRESENTE CHE QUANDO LO SPAZIO DI ARRIVO È $\mathbb{R}$ HA ANCORA SENSO DISTINGUERE TRA $+\infty$ E $-\infty$. IN SEGUITO DIAMO ALCUNE DI QUESTE DEFINIZIONI LASCIANDO ALLO STUDENTE DI COMPLETARE LA CASISTICA.

**DEF. 3** DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, CON $\Omega$ NON LIMITATO, $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ ED $\ell \in \mathbb{R}^m$, DIREMO CHE $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$ SE $\forall \varepsilon > 0 \; \exists r > 0$ TALE CHE $\forall x \in \Omega \quad d(x, 0) > r \Rightarrow d(f(x), \ell) < \varepsilon$

**DEF. 4** DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x_0$ DI ACCUMULAZIONE PER $\Omega$ ED $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$, DIREMO CHE $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ SE $\forall r > 0 \; \exists \delta > 0$ TALE CHE $\forall x \in \Omega - \{x_0\} \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), 0) > r$

**DEF. 5** DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x_0$ DI ACCUMULAZIONE PER $\Omega$ ED $f: \Omega \to \mathbb{R}$ DIREMO CHE $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ SE $\forall r > 0 \; \exists \delta > 0$ TALE CHE $\forall x \in \Omega - \{x_0\} \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) > r$

---

**ES. 1** SIA $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ LA FUNZIONE COSTANTE TALE CHE $f(x,y) = 3 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
$f$ È (OVVIAMENTE) CONTINUA IN TUTTI I PUNTI $(x_0, y_0)$ PERCHÉ $\forall (x,y)$ E $\forall (x_0,y_0)$ $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| = 0$ QUINDI L'IMPLICAZIONE $d((x,y),(x_0,y_0)) < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$ VALE SEMPRE.

**ES. 2** SIA $\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto y \end{aligned}$ È CONTINUA IN TUTTI I PUNTI $(x_0,y_0)$, VISTO CHE, $\forall (x,y)$ E $\forall (x_0,y_0)$ SI HA:

$$d(f(x,y), f(x_0,y_0)) = |f(x,y) - f(x_0,y_0)| = |y - y_0| \leq d((x,y),(x_0,y_0))$$

QUINDI $\forall \varepsilon > 0$ BASTA PRENDERE $\delta = \varepsilon$ PERCHÉ VALGA L'IMPLICAZIONE:

$$d((x,y),(x_0,y_0)) < \delta \Rightarrow d(f(x,y), f(x_0,y_0)) < \varepsilon$$

**ES. 3** CALCOLARE $\lim_{(x,y) \to \infty} \frac{1}{x^2+y^2+1}$.

IL LIMITE RICHIESTO VALE 0, INFATTI $\forall \varepsilon > 0$, SE PRENDO $r = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, SI HA CHE

$$d((x,y),0) > r \Leftrightarrow x^2+y^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow x^2+y^2+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+y^2+1} < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon$$

CIOÈ:

$$d((x,y),0) > r \Rightarrow d(f(x,y), \ell) < \varepsilon$$

**OSS.3** SI TRATTEREBBE ORA DI SVILUPPARE LA TEORIA DEI LIMITI IN PIÙ VARIABILI COME È STATO FATTO IN UNA VARIABILE. CIÒ È LUNGO E NON SEMPRE ISTRUTTIVO, VISTO CHE MOLTI TEOREMI SONO FORMALMENTE IDENTICI (ANCHE NELLA DIMOSTRAZIONE). PER SVELTIRE LA COSA PROCEDEREMO COSÌ: MOSTREREMO ALLO STUDENTE ALCUNI ESEMPI DI CALCOLO DI LIMITI SCELTI IN MODO TALE CHE CIASCUNO DI ESSI CI OBBLIGHI A INTRODURRE ALCUNI TEOREMI (O IDEE).

---

**ES.4** CALCOLARE, SE ESISTE, IL LIMITE: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\cdot y^3}{x^4+y^4}$

USEREMO QUESTO LIMITE COME SCUSA PER RICORDARE ALLO STUDENTE I TEOREMI SULLE OPERAZIONI SUI LIMITI

**SVOLGIMENTO**

OSSERVIAMO CHE VALE LA DISUGUAGLIANZA:

$$2x^2y^2 \le x^4+y^4$$

VISTO CHE:

$$x^4+y^4-2x^2y^2=(x^2-y^2)^2\ge 0$$

DI CONSEGUENZA, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, SI HA:

$$0\le \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x^2y^2}{x^4+y^4}\le\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4+y^4}{x^4+y^4}=\frac{1}{2}$$

CIOÈ LA FUNZIONE $g(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ È LIMITATA.

QUINDI IL LIMITE DA CALCOLARE DIVENTA

PERCHÈ CONTINUA E NULLA IN (0,0)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^3}{x^4+y^4}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\underbrace{\boxed{\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}}}_{\text{FUNZIONE LIMITATA}}\cdot\boxed{\overset{\to 0}{y}}=0$$

DOVE PER CONCLUDERE ABBIAMO INVOCATO IL FATTO CHE IL PRODOTTO TRA UNA FUNZIONE LIMITATA E UNA FUNZIONE INFINITESIMA, FORNISCE UNA FUNZIONE INFINITESIMA.

ORA PRENDIAMO SPUNTO DA CIÒ PER ENUNCIARE E DIMOSTRARE QUESTO SEMPLICE TEOREMA, CHE RIENTRA NELLA CATEGORIA "OPERAZIONI TRA LIMITI". COME UTILE ESERCIZIO LASCIAMO ALLO STUDENTE IL COMPITO DI ENUNCIARE E DIMOSTRARE GLI ALTRI TEOREMI SULLE OPERAZIONI TRA LIMITI.

**TEO. 1** DATO $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $x_0$ DI ACCUMULAZIONE PER $\Omega$, ED $f,g:\Omega\to\mathbb{R}$ TALI CHE:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$

(2) $\exists$ UNO $r>0$ ED $M>0$ TALI CHE $|g(x)|<M$ PER OGNI $x\in I_r(x_0)\cap\Omega$

CIOÈ $g$ È LIMITATA IN UN INTORNO DI $x_0$

ALLORA $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$

**DIMO** $\forall \varepsilon > 0$ PRENDO $\delta_1 > 0$ TALE CHE $\forall x \in \Omega$ $d(x, x_0) < \delta_1 \Rightarrow d(f(x), 0) < \frac{\varepsilon}{M}$ (POSSO FARLO GRAZIE A (1)).

PRENDO ORA $\delta = \min\{\delta_1, r\}$, COSICCHÉ $\forall x \in \Omega$, SE $d(x, x_0) < \delta$ VALE SIA $|g(x)| < M$ SIA $d(f(x), 0) < \frac{\varepsilon}{M}$,

E QUINDI ANCHE:

$$d\left(f(x) \cdot g(x), 0\right) = |f(x)| \cdot |g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

CHE È CIÒ CHE VOLEVAMO DIMOSTRARE.

---

**ES. 5** CALCOLARE, SE ESISTE: $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

**SVOLGIMENTO**

USEREMO QUESTO ESEMPIO PER INTRODURRE L'IDEA CHE IL LIMITE DI $f$ NON CAMBIA PASSANDO AD UNA RESTRIZIONE (LO DIMOSTREREMO ALLA FINE)

NEL NOSTRO CASO OSSERVIAMO CHE $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, RISTRETTA ALL'ASSE $x$ È LA FUNZIONE IDENTICAMENTE NULLA, MENTRE RISTRETTA ALLA RETTA $y = x$ SI HA

$$f(x, x) = \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

CIÒ SIGNIFICA CHE:

$$f(x,y) \to 0 \quad \text{SE} \quad (x,y) \to (0,0) \quad \text{RIMANENDO SULL'ASSE } x$$

$$f(x,y) \to \frac{1}{2} \quad \text{SE} \quad (x,y) \to (0,0) \quad \text{RIMANENDO SULLA BISETTRICE } y = x$$

QUINDI:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) \text{ NON ESISTE}$$

PERCHÉ SE ESISTESSE DOVREBBE AVERE LO STESSO VALORE LUNGO TUTTE LE RESTRIZIONI.

QUESTO GRAZIE AL SEGUENTE:

**TEO. 2** DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x_0$ DI ACCUMULAZIONE PER $\Omega$, $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ ED $\ell \in \mathbb{R}^m$ TALE CHE $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.
SIA POI $A \subset \Omega$ TALE CHE $x_0$ È DI ACCUMULAZIONE ANCHE PER $A$. ALLORA ANCHE $f|_A \to \ell$ PER $x \to x_0$.

**DIMO**

SICCOME SAPPIAMO CHE

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ T.C.

(1) $\quad \forall x \in \Omega - \{x_0\}$ $\quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), \ell) < \varepsilon$

ALLORA, SICCOME $A \subset \Omega$, SE VALE **(1)**, A MAGGIOR RAGIONE VALE

$$\forall x \in A - \{x_0\} \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), \ell) < \varepsilon$$

CIOÈ, VISTO CHE SU $A$ $f = f|_A$, VALE

$$\forall x \in A - \{x_0\} \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f|_A(x), \ell) < \varepsilon$$

CHE È QUANTO SI VOLEVA DIMOSTRARE.

---

**ES. 6** (ESEMPIO CATTIVO) CALCOLARE, SE ESISTE: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

**SVOLGIMENTO**

QUESTO ESEMPIO PUÒ TRARRE IN INGANNO: SI PUÒ PENSARE CHE FACCIA ZERO, PERCHÉ RESTRINGENDOSI AD UNA QUALSIASI RETTA PER L'ORIGINE FA ZERO. TUTTAVIA VEDREMO CHE NON ESISTE.

COMINCIAMO DALLE RESTRIZIONI ALLE RETTE.

SULL'ASSE $x$ E SULL'ASSE $y$ È OVVIO PERCHÉ $f$ È IDENTICAMENTE NULLA.

SU OGNI ALTRA RETTA $y = mx$ SI HA:

$$f(x,y) = f(x, mx) = \frac{x^3 \cdot m^2}{x^2 + m^4 x^4} = \frac{x \cdot m^2}{1 + m^4 x^2} \xrightarrow{\text{PER } x \to 0} \frac{0 \cdot m^2}{1 + m^4 \cdot 0} = \frac{0}{1} = 0$$

QUINDI È VERO CHE, RESTRINGENDOSI AD UNA QUALSIASI RETTA, $f(x,y) \to 0$.

TUTTAVIA SE CI SI RESTRINGE ALLA PARABOLA $x = y^2$ SI OTTIENE:

$$f(y^2, y) = \frac{y^2 \cdot y^2}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \quad \text{PER } y \to 0$$

QUINDI:

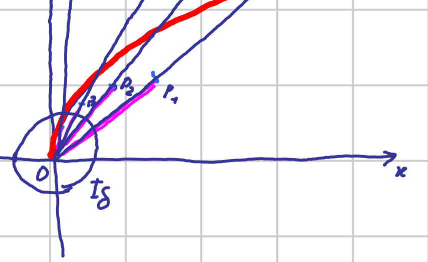
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \text{NON ESISTE}$$

ALTRIMENTI DOVREBBE ESSERE UGUALE SU TUTTE LE RESTRIZIONI.

PER CAPIRE COSA STA SUCCEDENDO IMMAGINIAMO DI GUARDARE LA FUNZIONE DALL'ALTO:

IN FIGURA ABBIAMO SEGNATO IN ROSSO LA CURVA $x = y^2$ LUNGO LA QUALE LA FUNZIONE VALE $\frac{1}{2}$.

ORA, $\forall \varepsilon > 0$, PER OGNI SEMIRETTA NASCENTE DALL'ORIGINE, SI IMMAGINI DI COLORARE DI ROSA LA PARTE DI SEMIRETTA IN CUI $|f(x,y)| < \varepsilon$. SI TROVA CHE TALE SEGMENTINO ROSA DIVENTA SEMPRE PIÙ PICCOLO MAN MANO CHE LA PENDENZA



DELLA SEMIRETTA AUMENTA (PERCHÉ NON PUÒ INTERSECARE LA PARABOLA ROSSA)

IN PARTICOLARE NON C'È UNA LUNGHEZZA MINIMA $\delta>0$ DEL PEZZETTINO ROSA, CHE VADA BENE UNIFORMEMENTE IN TUTTE LE DIREZIONI, COME INVECE DOVREBBE ESSERCI, SE CI FOSSE TUTTO UN INTORNO DI RAGGIO $\delta>0$ IN CUI $|f(x,y)|<\varepsilon$

INSOMMA NON C'È ALCUNA CONTRADDIZIONE TRA IL FATTO CHE IL LIMITE NON CI SIA E IL FATTO CHE LUNGO TUTTE LE RETTE PER L'ORIGINE VENGA LO STESSO VALORE.

---

**ES. 7** CALCOLARE SE ESISTE $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)\ln(1+|xy|)}{x^2+y^2+xy}$

**SVOLGIMENTO**

RICORDIAMO CHE VALE LA DISUGUAGLIANZA:

$$|xy| \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

DA CUI SEGUE:

$$x^2+y^2+xy \ge x^2+y^2-|xy| \ge x^2+y^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

ORA, SE CI SI RESTRINGE ALL'INSIEME $x^2+y^2\le 1$, LA FUNZIONE È $\ge 0$ E SI HA:

$$0 \le \frac{\sin(x^2+y^2)\ln(1+|xy|)}{x^2+y^2+xy} \le \frac{(x^2+y^2)\cdot|xy|}{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = 2|xy|$$

A QUESTO PUNTO, VISTO CHE $2|xy|\to 0$, ANCHE $f(x,y)\to 0$ PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO CHE ANDIAMO A DIMOSTRARE.

**TEO. 3** (DEL CONFRONTO)

DATI $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $x_0$ DI ACCUMULAZIONE PER $\Omega$, $\ell\in\mathbb{R}$ ED $f,g,h:\Omega\to\mathbb{R}$ TALI CHE:

(1) $\exists r>0$ TALE CHE $\forall x\in(\Omega-\{x_0\})\cap I_r(x_0)$ $\quad g(x)\le f(x)\le h(x)$

(2) $\lim_{x\to x_0} g(x)=\ell=\lim_{x\to x_0} h(x)$

ALLORA SI HA ANCHE $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

**DIM**

$\forall\varepsilon>0$ VOGLIAMO TROVARE $\delta>0$ TALE CHE $\forall x\in I_\delta(x_0)\cap(\Omega-\{x_0\})$ SI HA $\ell-\varepsilon<f(x)<\ell+\varepsilon$

GRAZIE A (2) SAPPIAMO CHE $\exists\,\delta_1>0$ T.C. $\forall x\in I_{\delta_1}(x_0)\cap(\Omega-\{x_0\})$ SI HA $\ell-\varepsilon<g(x)<\ell+\varepsilon$

E CHE $\exists\,\delta_2>0$ T.C. $\forall x\in I_{\delta_2}(x_0)\cap(\Omega-x_0)$ SI HA $\ell-\varepsilon<h(x)<\ell+\varepsilon$.

QUINDI PRESO $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, r\}$, $\forall x \in I_\delta(x_0) \cap (\Omega - \{x_0\})$ VALGONO SIMULTANEAMENTE LE 3 CONDIZIONI:

$$\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon \quad , \quad \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon, \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

METTENDO INSIEME LE QUALI, SI OTTIENE:

$$\ell - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon$$

QUINDI $\forall x \in I_\delta(x) \cap (\Omega - \{x_0\})$ SI HA $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

CIÒ SIGNIFICA CHE $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

# FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI

**TEO.1** (TEOREMA PONTE)

DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x}$ DI ACC. PER $\Omega$, $\ell \in \mathbb{R}^m$ ED $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$, È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

(a) $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \ell$

(b) $\forall (x_k)$ A VALORI IN $\Omega - \{\bar{x}\}$, $x_k \to \bar{x} \Rightarrow f(x_k) \to \ell$

**DIMO**

$\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$ DIRE CHE VALE (a) SIGNIFICA CHE

(1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ TALE CHE $\forall x \in \Omega - \{\bar{x}\}$ $d(x, \bar{x}) < \delta \Rightarrow d(f(x), \ell) < \varepsilon$

QUINDI, SE PRENDO $(x_k)$ IN $\Omega - \{x_0\}$ TALE CHE $x_k \to \bar{x}$, DEFINITIVAMENTE IN $k$ SI AVRÀ $d(x_k, \bar{x}) < \delta$ E, DI CONSEGUENZA, $d(f(x_k), \ell) < \varepsilon$, GRAZIE A (1).

QUINDI VALE (b).

$\boxed{(b) \Rightarrow (a)}$ SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE (a) SIA FALSA. ALLORA:

$\exists \varepsilon_0 > 0$ TALE CHE $\forall k \in \mathbb{N} - \{0\}$ $\exists x_k \in \Omega - \{\bar{x}\}$ T.C. $d(x_k, \bar{x}) < \frac{1}{k}$ MA $d(f(x_k), \ell) \geq \varepsilon_0$

LA SUCCESSIONE $(x_k)$ COSÌ COSTRUITA È A VALORI IN $\Omega - \{\bar{x}\}$, TENDE A $\bar{x}$, MA $f(x_k)$ NON TENDE A $\ell$, IN CONTRADDIZIONE CON (b).

QUINDI È ASSURDO SUPPORRE CHE (a) SIA FALSA. QUINDI (a) È VERA.

**OSS.1** LA VERSIONE DEL TEO.1 PER LE FUNZIONI CONTINUE HA, COME NEL CASO DI 1 VARIABILE, LEGGERE MODIFICHE, E LA DIMOSTRAZIONE (CHE OMETTIAMO) È QUASI IDENTICA:

**TEO.2**

DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \Omega$ ED $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$, È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

(a) $f$ È CONTINUA IN $\bar{x}$

(b) $\forall (x_k)$ A VALORI IN $\Omega$, $x_k \to \bar{x} \Rightarrow f(x_k) \to f(\bar{x})$

**OSS. 2** GRAZIE AL TEO. PONTE DIVENTA IMMEDIATA LA DIMOSTRAZIONE DEL SEGUENTE

**TEO. 3** DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^m$, $x_0$ DI ACC. PER $\Omega$, $y_0$ DI ACC. PER $A$, $g: \Omega \to A$, $f: A \to \mathbb{R}^k$ ED $\ell \in \mathbb{R}^k$ TALI CHE:

(a) $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0$

(b) $\lim_{y \to y_0} f(y) = \ell$

SI SUPPONGA INOLTRE CHE VALGA ALMENO UNA DELLE 2 SEGUENTI CONDIZIONI:

$(C_1)$ $\exists\, \eta > 0$ TALE CHE $\forall x \in \Omega$ $d(x, x_0) < \eta \Rightarrow g(x) \neq g(x_0)$

$(C_2)$ $y_0 \in \Omega$ ED $f$ CONTINUA IN $y_0$

ALLORA SI HA ANCHE: $\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = \ell$.

**DIMO**

CASO $(C_1)$ GRAZIE AL TEO. PONTE, QUELLO CHE DOBBIAMO DIMOSTRARE È CHE, COMUNQUE PRESA

(2) $(x_h)$ A VALORI IN $\Omega - \{x_0\}$ T.C. $x_h \to x_0$

SI HA:

(3) $f(g(x_h)) \to \ell$

PRESA DUNQUE $(x_h)$ CON LE PROPRIETÀ **(2)**, GRAZIE AD (a) E AL TEOREMA PONTE POSSIAMO DIRE CHE:

$$g(x_h) \to y_0$$

INOLTRE GRAZIE A $(C_1)$ POSSIAMO DIRE CHE, DEFINITIVAMENTE IN $h$, $g(x_h) \neq y_0$, QUINDI LA SUCCESSIONE IMMAGINE $(g(x_h))_{h \in \mathbb{N}}$ È A VALORI IN $A - \{y_0\}$ E TENDE A $y_0$.

MA ALLORA, GRAZIE A (b) E AL TEO. PONTE, SI HA $f(g(x_h)) \to \ell$, CHE È QUANTO VOLEVAMO DIMOSTRARE.

CASO $(C_2)$ OVVIAMENTE LA COSA DA DIMOSTRARE È ANCORA CHE **(2)** $\Rightarrow$ **(3)**. STAVOLTA È PIÙ SEMPLICE.

PRESA $(x_h)$ CHE SODDISFI **(2)**, GRAZIE AD (a) E AL TEO. PONTE SI HA $g(x_h) \to y_0$, DOPODICHÉ GRAZIE A $(C_2)$ E (b) SI HA $f(g(x_h)) \to f(y_0) = \ell$.

**ES. 1** CALCOLARE $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}$.

**SVOLGIMENTO**

$\frac{\sin(xy)}{xy} = f(g(x,y))$ DOVE $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ E $g(x,y) = xy$, FACENDO ATTENZIONE

AL FATTO CHE $g$ NON È DEFINITA SU $\mathbb{R}^2$ MA SU $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \mid x=0 \text{ o } y=0\}$

DETTO QUESTO, VISTO CHE $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$ E CHE $\forall (x,y) \in \Omega$ SI HA $g(x,y) \neq 0$,

GRAZIE AL TEO. 3 POSSO SCRIVERE:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

---

**DEF. 1** DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x_0$ DI ACC. PER $\Omega$, $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ TALI CHE $f$ E $g$ SONO INFINITESIME PER $x \to x_0$ E $g(x) \neq 0$ $\forall x \in \Omega - \{x_0\}$. DIREMO CHE $f(x) = o(g(x))$ PER $x \to x_0$ SE $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

**OSS. 3** VALGONO ANCORA TUTTE LE REGOLE DELL'ALGEBRA DEGLI O-PICCOLI, ESATTAMENTE COME IN UNA VARIABILE. INVECE QUELLO CHE È DIVERSO È IL RICONOSCERE CHI È O-PICCOLO DI CHI.

VEDIAMO ALCUNI ESEMPI.

**ES. 2** DATI $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x>0, y>0\}$, SU $\Omega$ PRENDIAMO $f(x,y) = x^3y^7$ E $g(x,y) = x^4y^5$.
CHI È O-PICCOLO DI CHI PER $(x,y)\to(0,0)$ SU $\Omega$? E SU $\Omega' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0<y<x\}$?

**SVOLGIMENTO**

SU $\Omega$ SI HA:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^7}{x^4y^5} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x} = \text{NON ESISTE}$$

INFATTI SE MI RESTRINGO ALL'INSIEME $A = \{(x,y) \in \Omega \mid x = y^2\}$ IL LIMITE VIENE 1

MENTRE SE MI RESTRINGO ALL'INSIEME $B = \{(x,y) \in \Omega \mid x = y\}$ IL LIMITE VIENE 0.

QUINDI $f(x,y)$ NON È O-PICCOLO DI $g(x,y)$ PER $(x,y)\to(0,0)$.

TUTTAVIA NEMMENO $g(x,y)$ È O-PICCOLO DI $f(x,y)$, VISTO CHE:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{f(x,y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^5}{x^3y^7} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{y^2} = \text{NON ESISTE} \quad \left(\text{ANALOGAMENTE A PRIMA}\right)$$

INVECE SU $\Omega'$ SI HA $f(x,y) = o(g(x,y))$ PERCHÉ

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x} = 0$$

PERCHÉ SU $\Omega'$ SI HA $x>0$ E $0<y<x$ QUINDI

$$0 < \frac{y^2}{x} < \frac{x^2}{x} = x \xrightarrow[\text{PER } x\to 0]{} 0$$

---

$\boxed{\text{ES. 3}}$ SIA $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. DIRE PER QUALI $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$ SI HA:

$$|x|^\alpha |y|^\beta = o(x^4 + y^4) \tag{4}$$

**SVOLGIMENTO**

MOSTRIAMO CHE **(4)** VALE PER TUTTE E SOLE LE COPPIE $(\alpha, \beta)$ TALI CHE $\alpha + \beta > 4$.

PRIMA MOSTRIAMO CHE SE $\alpha + \beta \leq 4$ LA **(4)** NON VALE, CIOÈ NON È VERO CHE

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha \cdot |y|^\beta}{x^4 + y^4} = 0 \tag{5}$$

INFATTI SE FOSSE VERO **(5)** ALLORA IL LIMITE DOVREBBE FARE 0 LUNGO OGNI RESTRIZIONE, ANCHE SULL'INSIEME $A = \{(x,y) \in \Omega \mid y = x\}$ TUTTAVIA, RESTRINGENDOSI AD $A$ IL LIMITE DIVENTA:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha \cdot |x|^\beta}{x^4 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{\alpha+\beta}}{2 \cdot x^4} \neq 0 \quad \text{SE } \alpha + \beta \leq 4.$$

QUINDI SE $\alpha + \beta \leq 4$ LA **(5)** NON VALE.

MOSTRIAMO ORA CHE SE $\alpha + \beta > 4$, INVECE VALE.

A TALE SCOPO OSSERVIAMO CHE SE $\alpha + \beta = 4$ LA FUNZIONE

$$G(x,y) = \frac{|x|^\alpha \cdot |y|^\beta}{x^4 + y^4} \tag{6}$$

HA LA SEGUENTE PROPRIETÀ:

$$\forall \lambda > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \qquad G(\lambda x, \lambda y) = G(x,y) \tag{7}$$

LE FUNZIONI CHE HANNO TALE PROPRIETÀ VENGONO DETTE POSITIVAMENTE OMOGENEE DI GRADO 0

INFATTI:

$$G(\lambda x, \lambda y) = \frac{|\lambda x|^\alpha \cdot |\lambda y|^\beta}{(\lambda x)^4 + (\lambda y)^4} = \frac{\lambda^{\alpha+\beta} \cdot |x|^\alpha \cdot |y|^\beta}{\lambda^4 (x^4 + y^4)} \overset{\alpha+\beta=4}{=} \frac{|x|^\alpha \cdot |y|^\beta}{x^4 + y^4}$$

TALE PROPRIETÀ SIGNIFICA ESSENZIALMENTE CHE $G(x,y)$ È COSTANTE SU OGNI SEMIRETTA CHE NASCE DALL'ORIGINE. QUINDI L'INSIEME DEI VALORI ASSUNTI SU TUTTO $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ COINCIDE CON L'INSIEME DEI VALORI ASSUNTI SU $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

SI NOTI CHE $\Gamma$ È COMPATTO E $G(x,y)$ È CONTINUA SU $\Gamma$, PERCHÉ QUOZIENTE DI FUNZIONI CONTINUE DI CUI QUELLA AL DENOMINATORE È SEMPRE NON NULLA. QUINDI PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS $G|_\Gamma$ HA MASSIMO E MINIMO, QUINDI È LIMITATA SU $\Gamma$.

MA GRAZIE A **(7)**, SE È LIMITATA SU $\Gamma$, LO È ANCHE SU TUTTO $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

SIAMO ORA PRONTI A MOSTRARE CHE SE $\alpha+\beta>4$ ALLORA VALE **(5)**. SI HA:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha \cdot |y|^\beta}{x^4+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \boxed{\frac{|x|^a\cdot|y|^b}{x^4+y^4}} \cdot \boxed{|x|^{\alpha-a}\cdot|y|^{\beta-b}}$$

SICCOME $\alpha+\beta>4$ HO PRESO $a$ E $b$ IN MODO CHE: $0\le a\le\alpha$, $0\le b\le\beta$ E $a+b=4$

PERCHÉ: $(\alpha-a)+(\beta-b)=$
$=\alpha+\beta-(a+b)=$
$=\alpha+\beta-4>0$

PERCHÉ $a+b=4$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \boxed{\text{FUNZIONE LIMITATA}} \cdot \boxed{\text{FUNZIONE INFINITESIMA}} = 0$$

PER CHIUDERE L'ARGOMENTAZIONE RESTA ORA IL TEOREMA:

**TEO. 4** (WEIERSTRASS)

SE $K\subset\mathbb{R}^n$ È COMPATTO E $f:K\to\mathbb{R}^m$ È CONTINUA ALLORA $f(K)$ È COMPATTO.

IN PARTICOLARE, SE $m=1$ ALLORA $f$ HA MASSIMO E MINIMO.

**DIMO**

OMESSA, PERCHÈ FORMALMENTE IDENTICA A QUELLA PER LE FUNZIONI IN UNA VARIABILE.

27 maggio 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

# FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI (...CONTINUA..)

**ES.1** SIA $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq -y\}$, DIRE SE È VERO CHE $x^{100}\cdot y^{100}=o(x^3+y^3)$ SU $\Omega$ PER $(x,y)\to(0,0)$.

**SVOLGIMENTO**

LA RISPOSTA È NO, PERCHÈ SI RIESCE A FAR VEDERE CHE NON È ZERO IL LIMITE:

(1)
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Omega}} \frac{x^{100}\cdot y^{100}}{x^3+y^3}$$

A TALE SCOPO BASTA RESTRINGERSI AD UNA CURVA CHE SI SCHIACCI CON ORDINE SUFFICIENTEMENTE ALTO ALLA RETTA $y=-x$, IN CUI IL DENOMINATORE SI ANNULLA.

AD ESEMPIO SE MI RESTRINGO ALL'INSIEME:

$$A=\{(x,y)\in\Omega \mid y=-x+x^{200},\ x>0\}$$

SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} \frac{x^{100}\cdot y^{100}}{x^3+y^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{100}\cdot(-x+x^{200})^{100}}{x^3+(-x+x^{200})^3} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^{100}\cdot(x^{100}+o(x^{100}))}{x^3-x^3+3x^2\cdot x^{200}+o(x^{202})} = \lim_{x\to0^+}\frac{x^{200}}{3x^{202}} = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{3x^2}=+\infty$$

QUINDI IL LIMITE (1) NON PUÒ VALERE 0 ALTRIMENTI FAREBBE 0 ANCHE RISTRETTO AD $A$.

---

**ES.2** SIA $\Omega=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. DIRE PER QUALI $\alpha,\beta\in[0,+\infty)$ SI HA:

(2)
$$|x|^\alpha|y|^\beta = o(x^2+y^6) \qquad \text{PER } (x,y)\to(0,0) \text{ SU } \Omega$$

**SVOLGIMENTO**

CI STIAMO CHIEDENDO PER QUALI $\alpha,\beta\in[0,+\infty)$ SI HA:

(3)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha\cdot|y|^\beta}{x^2+y^6}=0$$

STAVOLTA IL DENOMINATORE NON È UN POLINOMIO OMOGENEO, QUINDI NON FUNZIONA IL PROCEDIMENTO DELL' $\boxed{\text{ES.3}}$ DELLA $\boxed{\text{LEZ.32}}$.

TUTTAVIA SE DEFINIAMO $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ NEL MODO SEGUENTE:

(4) $$\varphi: (u,v) \mapsto (u^3, v)$$

È SEMPLICE MOSTRARE CHE $\varphi$ È INVERTIBILE E SIA $\varphi$ CHE $\varphi^{-1}$ SONO CONTINUE.
(LO FAREMO IN DETTAGLIO ALLA FINE, E NE PRENDEREMO SPUNTO PER INTRODURRE IL CONCETTO DI OMEOMORFISMO)

SI NOTI CHE, SE $f(x,y)$ È LA FUNZIONE DI CUI SI FA IL LIMITE IN (3), ALLORA:

$$(f \circ \varphi)(u,v) = f(u^3, v) = \frac{|u|^{3\alpha} \cdot |v|^{\beta}}{u^6 + v^6}$$

PER UN TEOREMA (CHE FAREMO ALLA FINE) SUGLI OMEOMORFISMI ABBIAMO CHE:

(5) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell \iff \lim_{(u,v)\to(0,0)} (f\circ\varphi)(u,v) = \ell$$

QUINDI NEL NOSTRO CASO BASTA CHIEDERSI PER QUALI $\alpha, \beta \in [0,+\infty)$ SI HA:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{|u|^{3\alpha} \cdot |v|^{\beta}}{u^6 + v^6} = 0$$

STAVOLTA IL DENOMINATORE È <u>OMOGENEO</u> DI GRADO 6 E NON SI ANNULLA MAI FUORI DA $(0,0)$, QUINDI, PROCEDENDO COME NELL' ES.3 DELLA LEZ. 32, SI HA CHE VALE 0 SE E SOLO SE $3\alpha + \beta > 6$.

PER CHIUDERE L'ARGOMENTAZIONE CI MANCANO DUNQUE 3 COSE, CHE AVEVAMO LASCIATO IN SOSPESO:

1) DARE LA DEFINIZIONE DI OMEOMORFISMO.

2) MOSTRARE CHE VALE (5).

3) MOSTRARE CHE $\varphi$ DEFINITO IN (4) È UN OMEOMORFISMO.

LO FACCIAMO QUI DI SEGUITO:

**DEF. 1** DATI $\Omega, \Gamma \subset \mathbb{R}^n$, ENTRAMBI <u>APERTI</u>, E $\varphi: \Omega \to \Gamma$, DIREMO CHE $\varphi$ È UN OMEOMORFISMO SE:

1) $\varphi$ È BIUNIVOCA

2) SIA $\varphi$ CHE $\varphi^{-1}$ SONO CONTINUE

PER I NOSTRI SCOPI È SUFFICIENTE TRATTARE IL CASO IN CUI $\Omega$ E $\Gamma$ SONO APERTI MA, OVVIAMENTE NULLA VIETA DI DEFINIRE OMEOMORFISMI TRA INSIEMI NON APERTI

**TEO.1** DATI $\Omega', \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ENTRAMBI APERTI, $\varphi: \Omega' \to \Omega$ OMEOMORFISMO $v_0 \in \Omega'$ E $x_0 \in \Omega$ TALI CHE $\varphi(v_0) = x_0$, $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ ED $\ell \in \mathbb{R}^m$. ALLORA È EQUIVALENTE DIRE CHE:

(1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

(2) $\lim_{v \to v_0} f(\varphi(v)) = \ell$

**DIMO**

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ BASTA OSSERVARE CHE $v \neq v_0 \Rightarrow \varphi(v) \neq \varphi(v_0)$ E QUINDI VALE LA CONDIZIONE $(C_1)$ DEL TEO. DEL LIMITE DELLA FUNZ. COMPOSTA, APPLICANDO IL QUALE SI HA LA TESI.

$\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$ DOPO AVER OSSERVATO CHE $f = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ SI PROCEDE COME AL PUNTO PRECEDENTE USANDO $\varphi^{-1}$ AL POSTO DI $\varphi$ ED $f \circ \varphi$ AL POSTO DI $f$.

**OSS. 1** IL TEO.1 DIMOSTRA L'AFFERMAZIONE **(5)**. PER MOSTRARE CHE LA $\varphi$ DEFINITA DA **(4)** È EFFETTIVAMENTE UN OMEOMORFISMO INVECE SERVE IL SEGUENTE TEOREMA:

**TEO.2** DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x_0$ DI ACC. PER $\Omega$, $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ E $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_m) \in \mathbb{R}^m$, $\forall i = 1, \dots, m$ INDICHIAMO CON $f_i$ LA i-ESIMA COMPONENTE DI $f$, CIOÈ $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$.
ALLORA È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

(a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

(b) $\forall i = 1, \dots, m \quad \lim_{x \to x_0} f_i(x) = \ell_i$

IN PARTICOLARE, SE $x_0 \in \Omega$, $\left(f \text{ È CONTINUA IN } x_0\right) \Leftrightarrow \left(\text{TUTTE LE } f_i \text{ SONO CONTINUE IN } x_0\right)$.

**DIMO** BASTA INVOCARE IL TEO. PONTE E IL TEO. ANALOGO PER LE SUCCESSIONI.

INFATTI SI HA

PER IL TEOREMA PONTE

(a) $\Leftrightarrow$ $\forall (x_k)$ A VALORI IN $\Omega - \{x_0\}$ T.C. $x_k \to x_0$ SI HA $\boxed{f(x_k) \to \ell}$

PERCHÉ PER LE SUCCESSIONI SAPPIAMO GIÀ CHE: $(Y_k \to \ell) \Leftrightarrow (\forall i = 1, \dots, m \ \ Y_k^{(i)} \to \ell_i)$

$\Updownarrow$

(b) $\Leftrightarrow$ $\forall (x_k)$ A VALORI IN $\Omega - \{x_0\}$ T.C. $x_k \to x_0$ SI HA CHE $\boxed{\forall i = 1, \dots, m \ \ f_i(x_k) \to \ell_i}$

**OSS.2** IL TEO.2 CI PERMETTE SUBITO DI MOSTRARE CHE $\varphi$ È UN OMEOMORFISMO.
INFATTI $\varphi(u, v) = (u^3, v)$ È CONTINUA PERCHÉ $u \mapsto u^3$ E $v \mapsto v$ SONO CONTINUE.
VICEVERSA $\varphi^{-1}(x, y) = (\sqrt[3]{x}, y)$ È CONTINUA PERCHÉ SONO CONTINUE $x \to \sqrt[3]{x}$ E $y \to y$.

**ES. 3** PER QUALI $\alpha>0$ SI HA $x^\alpha y^3 = o\left((x^{30}+y^{18})\cdot(x^{10}+y^{10})\right)$ PER $(x,y)\to(0,0)$ ?

SVOLGIMENTO

DOBBIAMO CERCARE PER QUALI $\alpha>0$ SI HA:

(6) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^\alpha y^3}{(x^{30}+y^{18})(x^{10}+y^{10})}=0$$

MOSTRIAMO ORA CHE VALE **(6)** SE E SOLO SE $\alpha>35$.

SE $\alpha\le 35$ PRENDIAMO LA RESTRIZIONE $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,\ y=x^{\frac{5}{3}}\}$. SI HA

(7) $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} \frac{x^\alpha y^3}{(x^{30}+y^{18})(x^{10}+y^{10})} = \lim_{x\to0^+}\frac{x^\alpha x^5}{(x^{30}+x^{30})(x^{10}+x^{\frac{50}{3}})} =$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x^\alpha\cdot x^5}{2x^{30}\cdot(x^{10}+o(x^{10}))} = \lim_{x\to0^+} x^{\alpha-35} \neq 0$$

SE $\alpha\le35$

QUINDI, SE $\alpha\le35$, **(6)** NON VALE, ALTRIMENTI ANCHE **(7)** DOVREBBE VALERE 0.

INVECE, SE $\alpha>35$, SI HA:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^\alpha y^3}{(x^{30}+y^{18})(x^{10}+y^{10})} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \boxed{\frac{(x^5)^5\cdot y^3}{(x^5)^6+(y^3)^6}}\cdot\boxed{\frac{x^{10}}{x^{10}+y^{10}}}\cdot\boxed{x^{\alpha-35}} = 0$$

LIMITATA

LIMITATA

$x^{\alpha-35}\to 0$ PERCHÉ $\alpha>35$

POSTO $u=x^5$ E $v=y^3$ DIVENTA $\frac{u^5\cdot v}{u^6+v^6}$ CHE È LIMITATA PERCHÉ CONTINUA SU TUTTO $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ E POSITIVAMENTE OMOGENEA DI GRADO ZERO

**OSS. 3** LO SVOLGIMENTO DELL' ES. 3 NON HA BISOGNO DI ULTERIORI GIUSTIFICAZIONI PER ESSERE CONSIDERATO COMPLETO. TUTTAVIA DAL PUNTO DI VISTA DIDATTICO È UTILE CAPIRE PERCHÉ SI È DECISO DI PRENDERE PROPRIO 35 COME VALORE CRITICO PER $\alpha$, PRIMA ANCORA DI AVER FATTO LA FATTO LA DIMOSTRAZIONE.

A TALE SCOPO IMMAGINIAMO IL CASO PIÙ SEMPLICE IN CUI AL NUMERATORE NON C'È $y^3$ MA SOLO $x^\alpha$.

IN TAL CASO È CHIARO CHE IL VALORE CRITICO È $\alpha=40$.

INFATTI

(8) $$\frac{x^{30}}{x^{30}+y^{18}}\cdot\frac{x^{10}}{x^{10}+y^{10}}$$

È LIMITATA.

RISCRIVENDO **(8)** IN MODO DA EVIDENZIARE IL CAMBIO DI VARIABILE CHE RENDE OMOGENEO IL DENOMINATORE DEL PRIMO FATTORE SI HA.

(9)
$$\frac{\left(x^{\frac{5}{3}}\right)^{18}}{\left(x^{\frac{5}{3}}\right)^{18}+y^{18}}\cdot\frac{x^{10}}{x^{10}+y^{10}}$$

OSSERVIAMO ORA CHE, SE C'È AL NUMERATORE ANCHE UN FATTORE $y^{\beta}$, IL SECONDO FATTORE, PER ESSERE LIMITATO DEVE DIVENTARE DELLA FORMA:

(10)
$$\frac{x^{10-\beta}y^{\beta}}{x^{10}+y^{10}}$$

INVECE, RAGIONANDO ALLO STESSO MODO SUL PRIMO FATTORE SI OTTIENE:

(11)
$$\frac{\left(x^{\frac{5}{3}}\right)^{18-\beta}y^{\beta}}{\left(x^{\frac{5}{3}}\right)^{18}+y^{18}}$$

QUINDI NEL CASO **(10)** LA POTENZA DI $x$ CHE HO "RISPARMIATO" HA ESPONENTE $\beta$, MENTRE NEL CASO **(11)** HA ESPONENTE $\frac{5}{3}\beta$, CHE È PIÙ GRANDE.

SICCOME COMPLESSIVAMENTE HO UN FATTORE $y^3$ DA PIAZZARE TRA I 2 FATTORI, MI CONVIENE PIAZZARLO TUTTO SUL PRIMO FATTORE, IN MODO DA RISPARMIARE $x^{\frac{5}{3}\cdot 3}$, CIOÈ $x^5$.

PER QUESTO MOTIVO, VISTO CHE SENZA $y$ MI SERVIVA $x^{40}$, USANDO $y^3$ MI BASTA $x^{35}$.

---

**ES.4** CALCOLARE, SE ESISTE, IL LIMITE:

(12)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^6+2y^6}{3x^8+y^{12}-x^5y^5}$$

SVOLGIMENTO

PRIMA OSSERVIAMO CHE:

$$x^5y^5=o\left(3x^8+y^{12}\right)$$

PERCHÈ:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^5y^5}{3x^8+y^{12}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2)^{\frac{5}{2}}\cdot(y^3)^{\frac{5}{3}}}{3(x^2)^4+(y^3)^4}=0$$

PERCHÈ $\frac{5}{2}+\frac{5}{3}>4$

QUINDI IL **(12)** DIVENTA

PROPRIETÀ DEGLI O-PICCOLI VALIDA ANCHE IN PIÙ VARIABILI

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^6+2y^6}{3x^8+y^{12}+o(3x^8+y^{12})}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^6+2y^6}{3x^8+y^{12}}=$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\boxed{\frac{x^6}{x^6+2y^6}} \cdot \boxed{3x^2} + \boxed{\frac{y^6}{x^6+2y^6}} \cdot \boxed{y^6}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

LIMITATE E POSITIVE

INFINITESIME E POSITIVE

**ES. 5** CALCOLARE SE ESISTE:

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{\sin(xy)}{2+x^2y^2} \qquad (13)$$

SVOLGIMENTO

RESTRINGENDOSI AD UNA QUALSIASI SEMIRETTA CHE PARTE DALL'ORIGINE TALE LIMITE FA ZERO.

CIÒ È OVVIO PER QUELLE SULL'ASSE $x$ E L'ASSE $y$, MA È SEMPLICE ANCHE PER LE ALTRE.

AD ESEMPIO, FISSATO $m \in \mathbb{R}$, SIA $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = mx,\ x>0\}$. SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to\infty \\ (x,y)\in A}} \frac{\sin(xy)}{2+x^2y^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(mx^2)}{2+m^2x^4} = 0$$

TUTTAVIA IL LIMITE (13) NON ESISTE PERCHÈ, DETTO $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<y<x,\ xy=1\}$,

SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to\infty \\ (x,y)\in B}} \frac{\sin(xy)}{1+x^2y^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin 1}{1+1} = \frac{\sin 1}{2} \neq 0$$

# FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI (...CONTINUA...)

**OSS. 1** FINORA ABBIAMO INTRODOTTO LE PRINCIPALI NOZIONI DELLA TEORIA SUI LIMITI E SULLE FUNZIONI CONTINUE IN PIÙ VARIABILI, SOLO QUANDO CI SERVIVANO DAVVERO PER RISPONDERE A QUALCHE QUESITO. COSÌ FACENDO ABBIAMO INTRODOTTO MOLTE DELLE IDEE PRINCIPALI, MA NON TUTTE. NELLA PRIMA PARTE DI QUESTA LEZIONE COLMIAMO I BUCHI RIMASTI.

**TEO 0.1** (TEO. DEGLI ZERI)

SIA $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, CON $\Omega$ APERTO E CONNESSO, ED $f: \Omega \to \mathbb{R}$ CONTINUA. SUPPONIAMO INOLTRE CHE ESISTANO $x_1, x_2 \in \Omega$ TALI CHE $f(x_1) < 0$ E $f(x_2) > 0$. ALLORA $\exists\, \bar{x} \in \Omega$ T.C. $f(\bar{x}) = 0$.

**DIMO** SIANO:

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid f(x) < 0\}$$

E

$$\Omega_2 = \{x \in \Omega \mid f(x) > 0\}$$

PER IPOTESI, $x_1 \in \Omega_1$ E $x_2 \in \Omega_2$, QUINDI $\Omega_1$ E $\Omega_2$ SONO ENTRAMBI NON VUOTI.

INOLTRE SE $x \in \Omega_1$, PER IL TEO. DELLA PERMANENZA DEL SEGNO C'È $r > 0$ T.C. $(I_r(x) \cap \Omega) \subset \Omega_1$.
MA POICHÉ $\Omega$ È APERTO, C'È $r' > 0$ T.C. $I_{r'}(x) \subset \Omega$. QUINDI PRESO $\delta = \min\{r, r'\}$. SI HA:

$$I_\delta(x) \subset (I_r(x) \cap \Omega) \subset \Omega_1$$

ABBIAMO QUINDI DIMOSTRATO CHE $\forall x \in \Omega_1$ $\exists \delta > 0$ T.C. $I_\delta(x) \subset \Omega_1$. CIÒ DIMOSTRA CHE $\Omega_1$ È APERTO.

IN MODO ANALOGO SI DIMOSTRA CHE È APERTO ANCHE $\Omega_2$.

INFINE, $\Omega_1$ E $\Omega_2$ SONO DISGIUNTI VISTO CHE NON PUÒ ESSERE $f(x) > 0$ E $f(x) < 0$ PER LO STESSO $x \in \Omega$.

INSOMMA $\Omega_1$ E $\Omega_2$ SONO APERTI, DISGIUNTI E NON VUOTI.

ORA, SE PER ASSURDO NON CI FOSSE ALCUN $x \in \Omega$ TALE CHE $f(x) = 0$, ALLORA SI AVREBBE:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

QUINDI, ESSENDO $\Omega_1$ E $\Omega_2$ APERTI DISGIUNTI E NON VUOTI, QUESTO SIGNIFICHEREBBE CHE $\Omega$ È NON CONNESSO (ASSURDO).

QUINDI È ASSURDO SUPPORRE CHE $f$ NON ASSUMA VALORE 0 SU $\Omega$.

**DEF. 1** DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ED $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$, DIREMO CHE $f$ È UNIFORMEMENTE CONTINUA SE $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ TALE CHE $\forall x_1, x_2 \in \Omega \quad d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$

**DEF. 2** DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $L > 0$ ED $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$, DIREMO CHE $f$ È LIPSCHITZIANA CON COSTANTE DI LIPSCHITZ $L$ SE $\forall x_1, x_2 \in \Omega \quad d(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot d(x_1, x_2)$

**OSS. 2** COME PER LE FUNZIONI IN UNA VARIABILE, È IMMEDIATO DIMOSTRARE CHE:

$$\left( f \text{ LIPSCHITZIANA} \right) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \left( f \text{ UNIFORM. CONTINUA} \right) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \left( f \text{ CONTINUA} \right)$$

INOLTRE VALE ANCORA IL TEOREMA:

**TEO. 2** (HEINE - CANTOR)

DATI $K \subset \mathbb{R}^n$ COMPATTO ED $f: K \to \mathbb{R}^m$ CONTINUA, ALLORA $f$ È UNIF. CONTINUA.

**DIMO**

SE, PER ASSURDO $f$ NON FOSSE UNIF. CONTINUA ALLORA:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \text{ TALE CHE } \forall i \in \mathbb{N} - \{0\} \; \exists^{no} \; x_i, y_i \in K \text{ TALI CHE } d(x_i, y_i) < \frac{1}{k} \text{ MA } d(f(x_i), f(y_i)) \geq \varepsilon_0$$

LE SUCCESSIONI $(x_i)$ E $(y_i)$ COSÌ COSTRUITE SONO A VALORI IN $K$, MENTRE LE SUCCESSIONI IMMAGINE $(f(x_i))$ E $(f(y_i))$ SONO IN $f(K)$.

SICCOME $K$ È COMPATTO POSSO ESTRARRE DA $(x_i)$ UNA SOTTOSUCCESSIONE $(x_{i_k})$ CHE CONVERGE A $\bar{x} \in K$. MA ALLORA ANCHE LA SOTTOSUCCESSIONE $(y_{i_k})$ CON GLI STESSI INDICI CONVERGE $\bar{x}$ PERCHÈ:

$$0 \leq d(y_{i_k}, \bar{x}) \leq d(y_{i_k}, x_{i_k}) + d(x_{i_k}, \bar{x}) = \frac{1}{i_k} + d(x_{i_k}, \bar{x}) \to 0 + 0 = 0$$

MA ALLORA, ESSENDO $f$ CONTINUA, SI HA $f(x_{i_k}) \to f(\bar{x})$ E $f(y_{i_k}) \to f(\bar{x})$.

MA ALLORA $d(f(x_{i_k}), f(y_{i_k})) \to 0$, IN CONTRASTO COL FATTO CHE $d(f(x_{i_k}), f(y_{i_k})) \geq \varepsilon_0$.

QUINDI ABBIAMO OTTENUTO UN ASSURDO SUPPONENDO CHE $f$ NON SIA UNIF. CONTINUA.

QUESTO CONCLUDE LA DIMOSTRAZIONE.

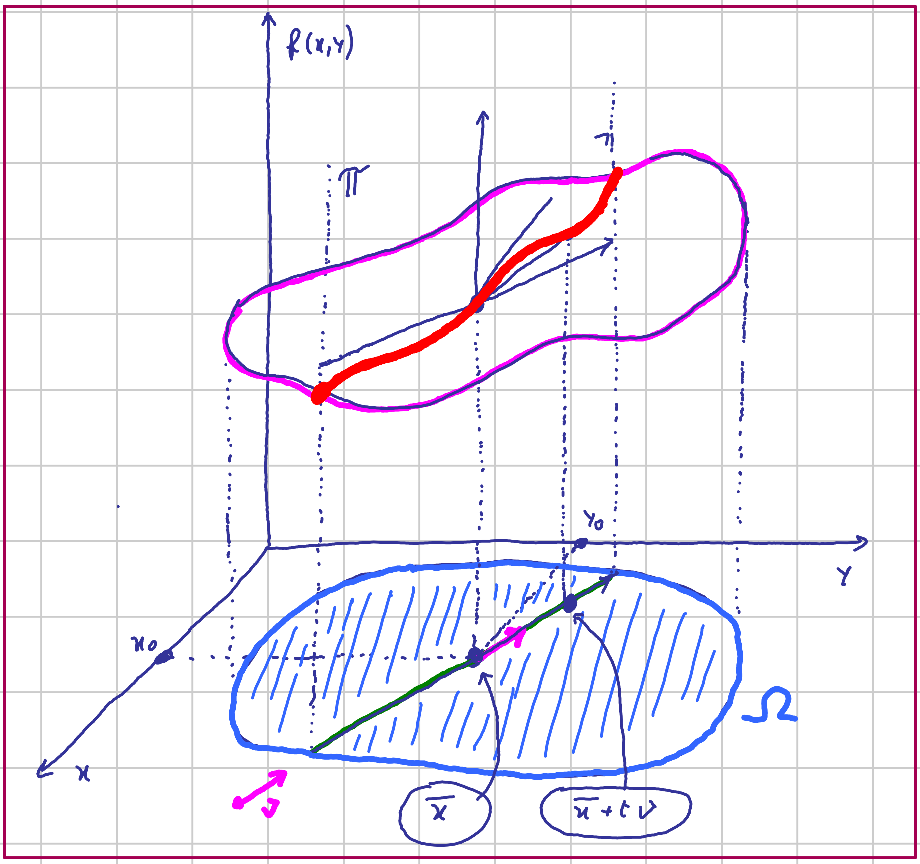
# DERIVABILITÀ E DIFFERENZIABILITÀ

**DEF. 3** DATO $v \in \mathbb{R}^n$ DIREMO CHE $v$ È UNA DIREZIONE (O UN VERSORE) SE $\|v\| = 1$

**DEF. 4** DATO $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ APERTO, $\bar{x} \in \Omega$, $v$ VERSORE DI $\mathbb{R}^n$ ED $f : \Omega \to \mathbb{R}$, DIREMO CHE $f$ È DERIVABILE IN $\bar{x}$ NELLA DIREZIONE $v$ SE ESISTE FINITO IL LIMITE:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t} \qquad (1)$$

IL VALORE DI TALE LIMITE PRENDE IL NOME DI DERIVATA DIREZIONALE DI $f$ IN $\bar{x}$ NELLA DIREZIONE $v$ E SI INDICA CON IL SIMBOLO $f_v(\bar{x})$ (OPPURE $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x})$ O $\partial_v f(\bar{x})$)




**OSS. 3** L'IDEA È LA SEGUENTE (VEDI FIGURA): RESTRINGENDOSI ALLA RETTA PASSANTE PER $\bar{x}$ E DIREZIONE $v$ (RETTA SEGNATA IN VERDE) SI OTTIENE UNA FUNZIONE NELLA SOLA VARIABILE $t$ (GRAFICO SEGNATO CON LA LINEA ROSSA) LA CUI PENDENZA IN $\bar{x}$ È PROPRIO IL LIMITE DEL RAPPORTO INCREMENTALE **(1)**.

**DEF. 5** SE NELLA **DEF. 4** $v$ È UN VETTORE DELLA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^n$, CIOÈ $v = e_i = (0, .., 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-esima posiz.}}}{1}, 0, .., 0)$, ALLORA $\frac{\partial f}{\partial e_i}(\bar{x})$ PRENDE IL NOME DI DERIVATA PARZIALE DI $f$ RISPETTO ALLA VARIABILE $x_i$ NEL PUNTO $\bar{x}$ E SI USANO, PER INDICARLA, I SIMBOLI $f_{x_i}(\bar{x})$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ O $\partial_{x_i} f(\bar{x})$.

SE POI $f$ È DERIVABILE RISPETTO A $x_i$ IN TUTTI I PUNTI DI $\Omega$, ALLORA LA FUNZIONE

$$f_{x_i} : \Omega \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f_{x_i}(x)$$

PRENDE IL NOME DI FUNZIONE DERIVATA PARZIALE DI $f$ RISPETTO A $x_i$

**ES. 1** DATA $f(x,y) = x \cdot y^2$ CALCOLARE $f_x(2,3)$ E $f_y(2,3)$.

SVOLGIMENTO

$$f_x(2,3) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\overbrace{2+t,3}^{=(2,3)+t\cdot(1,0)}) - f(2,3)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(2+t)\cdot 3^2 - 2\cdot 3^2}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t\cdot 3^2}{t} = 3^2 = 9$$

$$f_y(2,3) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\overbrace{2,3+t}^{=(2,3)+t\cdot(0,1)}) - f(2,3)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{2\cdot(3+t)^2 - 2\cdot 3^2}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{2\cdot 6t + 2t^2}{t} = 12$$

USARE LA DEFINIZIONE PERÒ È SCOMODO. OSSERVIAMO PERÒ CHE:

$$\frac{f(2+t,3)-f(2,3)}{t} = \boxed{\text{RAPPORTO INCREMENTALE DELLA FUNZIONE } f(x,3), \text{ CHE HA UNA SOLA VARIABILE (LA } x\text{), CALCOLATO TRA 2 E } 2+t.}$$

QUINDI:

$$f_x(2,3) = \lim_{t\to 0}\frac{f(2+t,3)-f(2,3)}{t} = g'(2) = 9$$

DOVE $g(x) = f(x,3) = 9x$
E QUINDI $g'(x) = 9$

ANALOGAMENTE:

$$f_y(2,3) = \lim_{t\to 0}\frac{f(2,3+t)-f(2,3)}{t} = h'(3) = 12$$

DOVE $h(y) = f(2,y) = 2y^2$
E QUINDI $h'(y) = 4y$

**OSS 4** NELL' ES.1 ABBIAMO IMPARATO CHE PER TROVARE LA DERIVATA RISPETTO A $x$ (O RISPETTO A $y$) BASTA DERIVARE FORMALMENTE $f(x,y)$ PENSANDOLA COME FUNZIONE DELLA SOLA VARIABILE $x$ (O $y$).
E POI, NELL'ESPRESSIONE TROVATA, SOSTITUIRE A $x$ E $y$ LE COORDINATE $x_0$ E $y_0$ DEL PUNTO CHE CI INTERESSA.
QUESTO SIGNIFICA CHE LE FUNZIONI DERIVATE $f_x(x,y)$ E $f_y(x,y)$ SI OTTENGONO DERIVANDO FORMALMENTE $f(x,y)$ RISPETTO A $x$ O RISPETTO A $y$, COME SE FOSSE UNA FUNZIONE IN UNA SOLA VARIABILE.
OVVIAMENTE QUESTO VALE PIÙ IN GENERALE ANCHE PER $f:\Omega\to\mathbb{R}$ CON $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, PER CALCOLARE $f_{x_i}(x)$.

**ES.2** DATA $f(x,y,z) = x^2\cdot y^z$ SU $\Omega = \{(x,y,z) \mid y>0\}$, TROVARE $f_x$, $f_y$ E $f_z$.

SVOLGIMENTO

$$f_x(x,y,z) = \left(x^2\cdot y^z\right)_x = 2x\cdot y^z$$

$$f_y(x,y,z) = \left(x^2 y^z\right)_y = x^2\cdot z\cdot y^{z-1}$$

$$f_z(x,y,z) = \left(x^2 y^z\right)_z = \left(x^2\cdot e^{z\ln y}\right)_z = x^2 e^{z\ln y}\cdot \ln y = x^2\cdot y^z\cdot \ln y$$

**ES.3** (ESEMPIO CATTIVO)

SIA $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{SE } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{SE } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

MOSTRARE CHE IN $(0,0)$ $f$ È DERIVABILE IN TUTTE LE DIREZIONI MA CHE NON È CONTINUA.

**SVOLGIMENTO**

PER OGNI FISSATA DIREZIONE $v=(v_1,v_2)$, SI HA:

$$f_v(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+tv_1,0+tv_2)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(tv_1,tv_2)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{(tv_1)\cdot(tv_2)^2}{(tv_1)^2+(tv_2)^4}=\lim_{t\to 0}\frac{v_1\cdot v_2^2}{v_1^2+t^2\cdot v_2^4}=\begin{cases}0 & \text{SE } v_1=0\\ \dfrac{v_2^2}{v_1} & \text{SE } v_1\neq 0\end{cases}$$

QUINDI $f$ È DERIVABILE IN $(0,0)$.

TUTTAVIA $f$ NON È CONTINUA IN $(0,0)$, PERCHÉ $f(0,0)=0$ MA $f(x,y)\not\to 0$ PER $(x,y)\to(0,0)$.

INFATTI, SE MI RESTRINGO ALL'INSIEME $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0,\ x=y^2\}$ SI HA:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in A}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{y\to 0^+}\frac{y^2\cdot y^2}{y^4+y^4}=\frac{1}{2}\neq f(0,0)$$

**OSS. 5**

DUNQUE, A DIFFERENZA DI QUANTO ACCADE IN $\mathbb{R}$, IN $\mathbb{R}^n$ LA DERIVABILITÀ NON BASTA A GARANTIRE LA CONTINUITÀ. INTRODURREMO QUINDI IL CONCETTO DI DIFFERENZIABILITÀ, CHE IN 2 O PIÙ VARIABILI È DIVERSO DALLA DERIVABILITÀ.

**DEF 6** DATI $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ APERTO, $\bar{x}\in\Omega$ ED $f:\Omega\to\mathbb{R}$ DIREMO CHE $f$ È DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$ SE $\exists\ M=(m_1,\dots,m_n)\in\mathbb{R}^n$ TALE CHE:

(2)
$$f(x)=f(\bar{x})+\langle M,x-\bar{x}\rangle+o(\|x-\bar{x}\|)\quad \text{PER } x\to\bar{x}$$

**OSS. 6** SE RISCRIVIAMO LA **(2)** NEL MODO SEGUENTE:

$$f(x_1,\dots,x_n)=\boxed{f(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)+m_1(x_1-\bar{x}_1)+\dots+m_n(x_n-\bar{x}_n)}+o(\|x-\bar{x}\|)$$

NOTIAMO CHE LA PARTE HA PER GRAFICO UN IPERPIANO IN $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, PASSANTE PER IL PUNTO $(\bar{x},f(\bar{x}))$ E CHE DIFFERISCE DALLA FUNZIONE DI UNA QUANTITÀ CHE È $o(\|x-\bar{x}\|)$.

UN IPERPIANO CON TALI PROPRIETÀ SI DICE CHE È TANGENTE AL GRAFICO DI $f$.

QUINDI DIRE CHE $f$ È DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$ SIGNIFICA DIRE CHE IL SUO GRAFICO HA UN IPERPIANO TANGENTE NEL PUNTO $(\bar{x},f(\bar{x}))$.

**TEO. 3**

DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ APERTO, $\bar{x} \in \Omega$ ED $f: \Omega \to \mathbb{R}$ DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$, CON COEFFICIENTI DELLA PARTE LINEARE UGUALI A $M = (m_1, \dots, m_n)$. ALLORA SI HA:

(a) $f$ È CONTINUA IN $\bar{x}$.

(b) PER OGNI DIREZIONE $v$, ESISTE $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x})$ ED È UGUALE A $\langle M, v \rangle$.

(IN PARTICOLARE $f_{x_i}(\bar{x}) = m_i \quad \forall i = 1, \dots, n$)

**DIMO**

PERCHÉ $|\langle M, x-\bar{x} \rangle| \leq \underbrace{\|M\|}_{\text{COSTANTE}} \cdot \underbrace{\|x-\bar{x}\|}_{\to 0}$

(a) OVVIO PERCHÉ:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \underbrace{\langle M, x-\bar{x} \rangle}_{\to 0} + \underbrace{o(\|x-\bar{x}\|)}_{\to 0} \to f(\bar{x}) + 0 + 0 = f(\bar{x}) \quad \text{PER } x \to \bar{x}$$

(b) SIA $v$ UNA DIREZIONE, CIOÈ $v \in \mathbb{R}^n$ E $\|v\| = 1$, ALLORA:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x}+tv) - f(\bar{x})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\langle M, tv \rangle + o(\|tv\|)}{t} = \lim_{t \to 0} \left( \langle M, v \rangle + \frac{o(|t|)}{t} \right) = \langle M, v \rangle$$

IN PARTICOLARE $\forall i = 1, \dots, n$, DETTO $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i\text{-ESIMA}}{1}, 0, \dots, 0)$, SI HA:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(\bar{x}) = \langle M, e_i \rangle = m_i$$

**DEF. 7** DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \Omega$ E $f: \Omega \to \mathbb{R}$ DERIVABILE IN $\bar{x}$, DEFINIAMO GRADIENTE DI $f$ IN $\bar{x}$ IL VETTORE:

$$\nabla f(\bar{x}) = (f_{x_1}(\bar{x}), f_{x_2}(\bar{x}), \dots, f_{x_n}(\bar{x}))$$

**OSS. 7** CON LA NOTAZIONE APPENA INTRODOTTA, NEL PUNTO (b) DEL TEO. 3 SI PUÒ SCRIVERE:

$$M = \nabla f(\bar{x}) \quad \text{E} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \langle \nabla f(\bar{x}), v \rangle$$

1 giugno 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

# FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI (...CONTINUA...)

**ES.1** DATA $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ DEFINITA DA:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{SE } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{SE } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

MOSTRARE CHE $f$ È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$ E CALCOLARE $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ PER $v=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

FARE LO STESSO NEL PUNTO $(2,1)$ E SCRIVERE L'EQUAZIONE DEL PIANO TANGENTE IN $(2,1)$.

**SVOLGIMENTO**

SAPPIAMO CHE NELLA DEF. DI DIFFERENZIABILITÀ I COEFF. DELLA PARTE LINEARE SONO NECESSARIAMENTE $\nabla f(x_0,y_0)$,

QUINDI TROVIAMO $\nabla f(0,0)$ E VEDIAMO DIRETTAMENTE SE VALE 0 IL LIMITE

(1) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)\cdot x-f_y(0,0)\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

IL MODO PIÙ RAPIDO DI CALCOLARE $f_x(0,0)$ È QUELLO DI OSSERVARE CHE $f(x,0)$ È IDENTICAMENTE NULLA E QUINDI, POSTO $g(x)=f(x,0)$, SI HA:

$$f_x(0,0)=g'(0)=0$$

ANALOGAMENTE $f_y(0,0)=0$ PERCHÉ $f(0,y)$ È IDENTICAMENTE NULLA.

SICCOME POI, PER DEFINIZIONE, ANCHE $f(0,0)=0$, IL LIMITE (1) DIVENTA:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\Bigg(\underbrace{\boxed{\frac{x^2}{x^2+y^2}}}_{0\le\bullet\le1}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}}_{|\bullet|\le1}\cdot\underbrace{\boxed{y}}_{\to 0}\Bigg)=0$$

PERCHÈ PRODOTTO TRA FUNZIONI LIMITATE E UNA FUNZIONE INFINITESIMA

QUINDI $f$ È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$.

GRAZIE A CIÒ VALE LA FORMULA:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\langle\nabla f(0,0),v\rangle=f_x(0,0)\cdot v_1+f_y(0,0)\cdot v_2=0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+0\,\frac{1}{\sqrt{2}}=0$$

VEDIAMO ORA NEL PUNTO $(1,2)$.

PER $(x,y)\neq(0,0)$ SI HA:

$$f_x(x,y)=\left(\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right)_x=\frac{2xy^2(x^2+y^2)-x^2y^2\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^2(x^2+y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y)=\left(\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right)_y=\dots\dots=\frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$$

QUINDI

$$f_x(1,2)=\frac{2\cdot 1\cdot 2^4}{(1^2+2^2)^2}=\frac{32}{25}$$

$$f_y(1,2)=\frac{2\cdot 1^4\cdot 2}{(1^2+2^2)^2}=\frac{4}{25}$$

VERIFICHIAMO LA DIFFERENZIABILITÀ, CIOÈ SE VALE ZERO IL LIMITE:

TRA POCO FAREMO UN TEOREMA CHE CI DARÀ LA DIFFERENZIABILITÀ SENZA BISOGNO DI TUTTI QUESTI CALCOLI.

(2) $$\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{f(x,y)-f(1,2)-f_x(1,2)(x-1)-f_y(1,2)(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}-\frac{4}{5}-\frac{32}{25}(x-1)-\frac{4}{25}(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}=$$

$$=\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{\frac{(u+1)^2\cdot(v+2)^2}{(u+1)^2+(v+2)^2}-\frac{4}{5}-\frac{32}{25}u-\frac{4}{25}v}{\sqrt{u^2+v^2}}=$$

$$\big((u+1)(v+2)\big)^2=\left(2+2u+v+o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)\right)^2=$$
$$=4+8u+4v+o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{25(u+1)^2\cdot(v+2)^2-4(5+8u+v)\left((u+1)^2+(v+2)^2\right)}{\left((u+1)^2+(v+2)^2\right)\cdot\sqrt{u^2+v^2}}$$

$$(u+1)^2+(v+2)^2=$$
$$=1+2u+4+4v+o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)$$

$$=\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{25(4+8u+4v)-4(5+8u+v)(5+2u+4v)+o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)}{\left((u+1)^2+(v+2)^2\right)\sqrt{u^2+v^2}}=$$

$$=\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{25(\cancel{4}+\cancel{8u}+\cancel{4v})-4(\cancel{25}+\cancel{40u}+\cancel{5v}+\cancel{10u}+\cancel{20v})+o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)}{\left((u+1)^2+(v+2)^2\right)\sqrt{u^2+v^2}}=$$

$$=\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{1}{(u+1)^2+(v+2)^2}\cdot\frac{o\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)}{\sqrt{u^2+v^2}}=\frac{1}{1^2+2^2}\cdot 0=0$$

QUINDI $f$ È DIFFERENZIABILE ANCHE IN $(1,2)$ E IL PIANO TANGENTE NEL PUNTO $(1,2,f(1,2))$ HA EQUAZIONE:

$$z=f(1,2)+f_x(1,2)\cdot(x-1)+f_y(1,2)(y-2)$$

CIOÈ:

$$z = \frac{4}{5} + \frac{32}{25}(x-1) + \frac{4}{25}(y-2)$$

INFINE, ESSENDO DIFFERENZIABILE, PER CALCOLARE $\frac{\partial f}{\partial v}(1,2)$, VALE LA FORMULA:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = \langle \nabla f(1,2), v \rangle = f_x(1,2)\cdot v_1 + f_y(1,2)\cdot v_2 = \frac{32}{25}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4}{25}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{18}{25}\sqrt{2}$$

---

**ES. 2** DATA $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ DEFINITA DA:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{SE } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{SE } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

CALCOLARE $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ PER $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ E DIRE SE $f$ È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$.

**SVOLGIMENTO**

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\cdot\frac{\left(t\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot t\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{t^2\frac{1}{2} + t^2\frac{1}{2}} = \lim_{t\to 0}\frac{t^3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{t^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

SI NOTI PERÒ CHE $f(x,0)$ E $f(0,y)$ SONO IDENTICAMENTE NULLE QUINDI $f_x(0,0) = 0$ E $f_y(0,0) = 0$.

QUINDI $f$ NON PUÒ ESSERE DIFFERENZIABILE PERCHÈ, SE LO FOSSE, DOVREBBE ESSERE:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \langle \nabla f(0,0), v \rangle = \langle 0, v \rangle = 0$$

MENTRE INVECE $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$.

---

**TEO. 1** (TEO. DEL DIFFERENZIALE TOTALE)

DATO $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ APERTO, $\bar{x} \in \Omega$ ED $f: \Omega \to \mathbb{R}$, DERIVABILE SU TUTTO $\Omega$, SE INOLTRE LE DERIVATE PARZIALI $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$ SONO TUTTE CONTINUE IN $\bar{x}$, ALLORA $f$ È DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$.

**DIMO**

FAREMO LA DIMOSTRAZIONE NEL CASO $n=2$; L'IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE È POI ESPORTABILE AL CASO GENERALE.

SUPPONIAMO QUINDI $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ APERTO, $(\bar{x},\bar{y}) \in \Omega$ E CHE $f_x$ ED $f_y$ ESISTANO SU TUTTO $\Omega$ E SIANO CONTINUE IN $(\bar{x},\bar{y})$.

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE VALE ZERO IL LIMITE:

**(3)** $$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(\bar{x}+h,\bar{y}+k)-f(\bar{x},\bar{y})-f_x(\bar{x},\bar{y})\,h-f_y(\bar{x},\bar{y})\,k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

A TALE SCOPO OSSERVIAMO CHE:

$$f(\bar{x}+h,\bar{y}+k)-f(\bar{x},\bar{y}) = \underbrace{f(\bar{x}+h,\bar{y}+k)-f(\bar{x},\bar{y}+k)}+\underbrace{f(\bar{x},\bar{y}+k)-f(\bar{x},\bar{y})}=$$

APPLICANDO IL TEOREMA DI LAGRANGE ALLA FUNZIONE DI UNA SOLA VARIABILE $\psi(x)=f(x,\bar{y}+k)$ SULL'INTERVALLO $[\bar{x},\bar{x}+h]$

$$= f_x(\xi,\bar{y}+k)\cdot h + f_y(\bar{x},\mu)\,k$$

APPLICANDO IL TEOREMA DI LAGRANGE ALLA FUNZIONE DI UNA SOLA VARIABILE $\varphi(y)=f(\bar{x},y)$ SULL'INTERVALLO $[\bar{y},\bar{y}+k]$

DOVE $\xi$ STA TRA $\bar{x}$ E $\bar{x}+h$ E $\mu$ TRA $\bar{y}$ E $\bar{y}+h$.

QUINDI **(3)** DIVENTA:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f_x(\xi,\bar{y}+k)\cdot h+f_y(\bar{x},\mu)\cdot k-f_x(\bar{x},\bar{y})\cdot h-f_y(\bar{x},\bar{y})\,k}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$

LIMITATE

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left(\underbrace{\left(f_x(\xi,\bar{y}+k)-f_x(\bar{x},\bar{y})\right)}_{\to 0}\cdot\boxed{\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}}+\underbrace{\left(f_y(\bar{x},\mu)-f_y(\bar{x},\bar{y})\right)}_{\to 0}\boxed{\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}}\right)=0$$

PERCHÉ $f_x$ E $f_y$ SONO CONTINUE IN $(\bar{x},\bar{y})$ E QUANDO $(h,k)\to(0,0)$ ANCHE $\xi\to\bar{x}$ E $\mu\to\bar{y}$

QUINDI $f$ È DIFFERENZIABILE IN $(\bar{x},\bar{y})$.

---

**OSS. 1** IL TEO. 1 CI DÀ UN MODO PIÙ PRATICO PER VERIFICARE LA DIFFERENZIABILITÀ NEI CASI IN CUI È SEMPLICE CALCOLARE LE DERIVATE PARZIALI.

AD ESEMPIO, NELL' $\boxed{\text{ES. 1}}$, PER VERIFICARE LA DIFFERENZIABILITÀ IN $(1,2)$, POICHÉ SI ERA GIÀ TROVATO CHE PER $(x,y)\neq(0,0)$ SI HA:

$$f_x(x,y)=\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{E} \quad f_y(x,y)=\frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2},$$

BASTAVA OSSERVARE CHE TALI FUNZIONI SONO CONTINUE IN $(1,2)$, SENZA BISOGNO DI CALCOLARE IL (LUNGO) LIMITE **(2)**.

---

**DEF. 1** DATI $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, APERTO, ED $f:\Omega\to\mathbb{R}$ DERIVABILE SU TUTTO $\Omega$ E TALE CHE LE DERIVATE PARZIALI $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$ SIANO TUTTE CONTINUE SU $\Omega$, DIREMO CHE $f$ È DI CLASSE $C^1$ SU $\Omega$ E SCRIVEREMO $f\in C^1(\Omega)$.

**OSS.2** NON C'È STATO BISOGNO DI RICHIEDERE, NELLA DEF. 1, CHE $f$ FOSSE ANCHE CONTINUA, VISTO CHE DALLA CONTINUITÀ DELLE $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ SEGUE (GRAZIE AL TEO. 1) ANCHE LA DIFFERENZIABILITÀ DI $f$ E QUINDI LA SUA CONTINUITÀ.

---

**DEF.2** DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, APERTO, ED $f: \Omega \to \mathbb{R}$ TALE CHE $f_{x_i}$ ESISTE SU TUTTO $\Omega$.
SE ANCHE $f_{x_i}$ È DERIVABILE RISPETTO A $x_j$ SU TUTTO $\Omega$ LA SUA DERIVATA $(f_{x_i})_{x_j}$ PRENDE IL NOME DI DERIVATA II DI $f$ FATTA PRIMA RISPETTO A $x_i$ E POI RISPETTO A $x_j$ E SI INDICA CON $f_{x_i x_j}$.

**ES. 3** CALCOLARE LE DERIVATE SECONDE DI $f(x,y) = x^2 y^3$

SVOLGIMENTO

$$f_{xx}(x,y) = \left( x^2 y^3 \right)_{xx} = \left( 2x y^3 \right)_x = 2y^3$$

$$f_{xy}(x,y) = \left( x^2 y^3 \right)_{xy} = \left( 2x y^3 \right)_y = \boxed{6xy^2}$$

$$f_{yx}(x,y) = \left( x^2 y^3 \right)_{yx} = \left( 3x^2 y^2 \right)_x = \boxed{6xy^2}$$

$$f_{yy}(x,y) = \left( x^2 y^3 \right)_{yy} = \left( 3x^2 y^2 \right)_y = 6x^2 y$$

VEDREMO CHE SOTTO OPPORTUNE IPOTESI DI REGOLARITÀ $f_{xy}$ E $f_{yx}$ SONO SEMPRE UGUALI

**ES. 4** (ESEMPIO CATTIVO)

CALCOLARE $f_{xy}$ E $f_{yx}$ IN $(0,0)$ DELLA FUNZIONE

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3 - x^3 y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

CALCOLIAMO $f_x$.

PER $(x,y) \neq (0,0)$ SI HA:

$$f_x(x,y) = \left( \frac{xy^3 - x^3 y}{x^2 + y^2} \right)_x = \frac{(y^3 - 3x^2 y)(x^2+y^2) - (xy^3 - x^3 y) \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{y^3 x^2 + y^5 - 3x^4 y - 3x^2 y^3 - 2x^2 y^3 + 2x^4 y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^5 - 4x^2 y^3 - x^4 y}{(x^2+y^2)^2}$$

INVECE IN $(0,0)$ SI HA $f_x(0,0) = 0$ VISTO CHE $f(x,0)$ È IDENTICAMENTE NULLA.

OTTENIAMO QUINDI:

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^5 - 4x^2y^3 - x^4y}{(x^2+y^2)^2} & \text{SE } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{SE } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ANALOGAMENTE SI OTTIENE:

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-x^5 + 4y^2x^3 + y^4x}{(x^2+y^2)^2} & \text{SE } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{SE } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

QUINDI:

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_x(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t^5}{t^4} = 1$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f_y(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{-t^5}{t^4} = -1$$

QUINDI $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

**OSS.3** DA $\boxed{\text{ES.4}}$ SI CAPISCE CHE NON SEMPRE $f_{xy} = f_{yx}$. UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE PERCHÉ CIÒ ACCADA È DATA DAL SEGUENTE TEOREMA:

**TEO.2** (T. DI SCHWARZ)

DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ APERTO, $\bar{x} \in \Omega$ ED $f: \Omega \to \mathbb{R}$ TALE CHE ESISTANO SU TUTTO $\Omega$ $f_{x_ix_j}$ E $f_{x_jx_i}$, DOVE $i$ E $j$ SONO DUE DIVERSI ELEMENTI DI $\{1,..,n\}$.
SE INOLTRE $f_{x_ix_j}$ E $f_{x_jx_i}$ SONO CONTINUE IN $\bar{x}$, ALLORA $f_{x_ix_j}(\bar{x}) = f_{x_jx_i}(\bar{x})$.

**DIMO**

ANCHE PER QUESTO TEOREMA FAREMO LA DIMOSTRAZIONE IN $\mathbb{R}^2$, POI L'IDEA SARÀ ESPORTABILE IN $\mathbb{R}^n$. SIA DUNQUE $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0) \in \Omega$ E SIANO $f_{xy}$ ED $f_{yx}$ DEFINITE SU TUTTO $\Omega$ E CONTINUE IN $(x_0,y_0)$.

DEFINIAMO:

(4)
$$R(x,y)=\frac{f(x,y)-f(x,y_0)-f(x_0,y)+f(x_0,y_0)}{(x-x_0)(y-y_0)}$$

FAREMO VEDERE CHE $f_{xy}(x_0,y_0)$ E $f_{yx}(x_0,y_0)$ SONO ENTRAMBE UGUALI AL LIMITE:

(5)
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} R(x,y)$$

E QUINDI SONO UGUALI TRA LORO.

POSTO $\varphi(x)=f(x,y)-f(x,y_0)$
DOVE $y$ E $y_0$ SONO FISSATI
SI HA $\varphi'(x)=f_x(x,y)-f_x(x,y_0)$

COMINCIAMO DA $f_{xy}(x_0,y_0)$. SI HA:

$$f(x,y)-f(x,y_0)-f(x_0,y)+f(x_0,y_0)=\big(f(x,y)-f(x,y_0)\big)-\big(f(x_0,y)-f(x_0,y_0)\big)=$$

APPLICANDO IL TEO. DI LAGRANGE A $\varphi(x)$ SI TROVA CHE $\exists\, x_1$ TRA $x$ E $x_0$ TALE CHE VALE L'UGUAGLIANZA

$$=\varphi(x)-\varphi(x_0)=\varphi'(x_1)(x-x_0)=$$

$$=\big(f_x(x_1,y)-f_x(x_1,y_0)\big)(x-x_0)=$$

CON $y_1$ TRA $y$ E $y_0$ GRAZIE AL T. DI LAGRANGE APPLICATO ALLA FUNZIONE DELLA SOLA VARIABILE $y$ $f_x(x_1,y)$

$$=f_{xy}(x_1,y_1)(y-y_0)(x-x_0)$$

QUINDI:

$$R(x,y)=\frac{f_{xy}(x_1,y_1)(y-y_0)(x-x_0)}{(x-x_0)(y-y_0)}=f_{xy}(x_1,y_1)$$

DOVE $x_1$ STA TRA $x$ E $x_0$ E $y_1$ STA TRA $y$ E $y_0$, QUINDI $(x,y)\to(x_0,y_0)\Rightarrow(x_1,y_1)\to(x_0,y_0)$

DI CONSEGUENZA, GRAZIE ALLA CONTINUITÀ DI $f_{xy}$ IN $(x_0,y_0)$ SI HA

(6)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} R(x,y)=\lim_{(x_1,y_1)\to(0,0)} f_{xy}(x_1,y_1)=f_{xy}(x_0,y_0)$$

IN MODO DEL TUTTO ANALOGO SI PROCEDE CON $f_{yx}(x_0,y_0)$. INFATTI SI HA:

$$f(x,y)-f(x,y_0)-f(x_0,y)+f(x_0,y_0)=\big(f(x,y)-f(x_0,y)\big)-\big(f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\big)=$$

CON $y_2$ TRA $y$ E $y_0$ GRAZIE AL TEO. DI LAGRANGE APPLICATO A $\psi(y)=f(x,y)-f(x_0,y)$

$$=\big(f_y(x,y_2)-f_y(x_0,y_2)\big)(y-y_0)=$$

CON $x_2$ TRA $x$ E $x_0$ GRAZIE AL TEO. DI LAGRANGE APPLICATO ALLA FUNZIONE DELLA SOLA VARIABILE $x$ $f_y(x,y_2)$

$$=f_{yx}(x_2,y_2)(x-x_0)(y-y_0)$$

DA CUI SEGUE CHE ESISTE $(x_2, y_2)$ CON $x_2$ TRA $x_0$ E $x$ E $y_2$ TRA $y_0$ E $y$ TALE CHE:

$$R(x,y) = \frac{f_{yx}(x_2,y_2)(x-x_0)(y-y_0)}{(x-x_0)(y-y_0)} = f_{yx}(x_2,y_2)$$

PER CUI, SEMPRE SFRUTTANDO LA CONTINUITÀ DI $f_{yx}$ IN $(x_0,y_0)$, SI HA:

(7) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} R(x,y) = \lim_{(x_2,y_2)\to(x_0,y_0)} f_{yx}(x_2,y_2) = f_{yx}(x_0,y_0)$$

DA (6) E (7) SEGUE $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$

---

**DEF. 3** DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ APERTO, $\bar{x} \in \Omega$ ED $f: \Omega \to \mathbb{R}$ TALE CHE $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$ ESISTE $f_{x_i x_j}(\bar{x})$, DEFINIAMO MATRICE HESSIANA DI $f$ IN $\bar{x}$, E LA INDICHIAMO CON $H_f(\bar{x})$, LA MATRICE IL CUI ELEMENTO $(i,j)$-ESIMO È:

$$H_{ij} = f_{x_i x_j}(\bar{x})$$

**OSS. 4** SE TUTTE LE $f_{x_i x_j}$ SONO CONTINUE IN $\bar{x}$ ALLORA, GRAZIE AL TEO. DI SCHWARZ LA MATRICE HESSIANA È SIMMETRICA.

**OSS. 5** COSÌ COME LE DERIVATE SECONDE SONO STATE DEFINITE COME DERIVATE DELLE DERIVATE PRIME, COSÌ SI POSSONO DEFINIRE RICORSIVAMENTE LE DERIVATE DI ORDINE PIÙ ALTO. AD ESEMPIO SE $f(x,y,z) = x^4y^3z^5 + (z^2+1)^y$, $f_{xxzy}(x,y,z)$ SIGNIFICA:

$$f_{xxzy}(x,y,z) = \left(\left(\left(\left(x^4y^3z^5 + (z^2+1)^y\right)_x\right)_x\right)_z\right)_y =$$

$$= \left(\left(\left(4x^3y^3z^5\right)_x\right)_z\right)_y = \left(\left(12x^2y^3z^5\right)_z\right)_y =$$

$$= \left(60x^2y^3z^4\right)_y = 180x^2y^2z^4$$

**DEF. 4** DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ APERTO ED $f: \Omega \to \mathbb{R}$, DIREMO CHE $f$ È DI CLASSE $C^k$ E SCRIVEREMO $f \in C^k(\Omega)$, SE ESISTONO SU $\Omega$ TUTTE LE DERIVATE DI ORDINE $k$ E SONO CONTINUE

**OSS. 6** GRAZIE AL TEO. DEL DIFF. TOTALE, SE TUTTE LE DERIVATE DI ORDINE K SONO CONTINUE ALLORA TUTTE QUELLE DI ORDINE K-1 SONO DIFFERENZIABILI (E QUINDI CONTINUE).

ITERANDO IL PROCEDIMENTO SI OTTIENE CHE TUTTE LE DERIVATE DI ORDINE INFERIORE SONO CONTINUE (COMPRESA LA FUNZIONE INIZIALE)

INOLTRE, GRAZIE AL TEO. DI SCHWARZ, NON CONTA L'ORDINE DI DERIVAZIONE MA SOLO QUANTE VOLTE SI È DERIVATO RISPETTO A CIASCUNA VARIABILE.

È COMODO QUINDI USARE LA NOTAZIONE COL MULTIINDICE PER INDICARE LE VARIE DERIVATE DI $f$.

PIÙ PRECISAMENTE SE $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ DEFINIAMO:

$$D^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\left(\partial_{x_2}^{\alpha_2}\left(\dots\left(\partial_{x_n}^{\alpha_n} f\right)\dots\right)\right)$$

DOVE $\partial_{x_i}^{k} f$ SIGNIFICA $f_{\underbrace{x_i x_i \cdots x_i}_{k}}$.

3 giugno 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

# FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI (...CONTINUA...)

**DEF. 1** DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ APERTO, $\bar{x} \in \Omega$, $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$, SIANO $f_1, f_2, \dots, f_m$ LE COMPONENTI DI $f$, DIREMO CHE $f$ È DERIVABILE IN $\bar{x}$ SE TUTTE LE SUE COMPONENTI SONO DERIVABILI IN $\bar{x}$, CIOÈ SE $\forall i = 1, \dots, n$ E $\forall k = 1, \dots, m$ ESISTE $\partial_{x_i} f_k(\bar{x})$

LA MATRICE $J_f(\bar{x})$ DEFINITA DA:

$$J_f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(\bar{x}) & \partial_{x_2} f_1(\bar{x}) & \partial_{x_n} f_1(\bar{x}) \\ \partial_{x_1} f_2(\bar{x}) & \partial_{x_2} f_2(\bar{x}) & \partial_{x_n} f_2(\bar{x}) \\ \vdots & & \\ \partial_{x_1} f_m(\bar{x}) & \partial_{x_2} f_m(\bar{x}) & \partial_{x_n} f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

PRENDE IL NOME DI MATRICE JACOBIANA DI $f$.

**OSS. 1** (CASI PARTICOLARI)

SE $m=1$ $J_f(\bar{x})$ HA UNA SOLA RIGA, CHE COINCIDE CON $\nabla f(\bar{x})$.

SE $n=1$ LA FUNZIONE È DEL TIPO $t \longmapsto (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t))$, CON $t \in (a,b)$ E $J_f(\bar{x})$ HA UNA SOLA COLONNA, CHE INDICHIAMO ANCHE CON $f'(\bar{t})$:

$$J_f(\bar{t}) = \begin{pmatrix} f_1'(\bar{t}) \\ f_2'(\bar{t}) \\ \vdots \\ f_m'(\bar{t}) \end{pmatrix} = f'(\bar{t})$$

---

**TEO. 1** (DERIVATA FUNZ. COMPOSTA, CASO PARTICOLARE)

DATI $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ APERTO, $X: (a,b) \to \Omega$, DERIVABILE IN $t_0 \in (a,b)$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, DIFFERENZIABILE IN $x_0 = X(t_0)$. ALLORA $F: (a,b) \to \mathbb{R}$, $t \longmapsto f(X(t))$ È DERIVABILE IN $t_0$ E $F'(t_0) = \langle \nabla f(x_0), X'(t_0) \rangle$.

$\boxed{\text{DIMO}}$

SI HA

$$F'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(t_0+h) - F(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(X(t_0+h)) - f(X(t_0))}{h} =$$

PERCHÉ $f$ È DIFFERENZIABILE IN $x_0$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\langle \nabla f(x_0), X(t_0+h) - X(t_0)\rangle + o(\|X(t_0+h) - X(t_0)\|)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left( \left\langle \nabla f(x_0), \frac{X(t_0+h) - X(t_0)}{h} \right\rangle + \frac{o(\|X(t_0+h) - X(t_0)\|)}{h} \right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\langle \nabla f(x_0), \frac{X(t_0+h) - X(t_0)}{h} \right\rangle =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left( f_{x_1}(x_0) \frac{X_1(t_0+h) - X_1(t_0)}{h} + \dots + f_{x_n}(x_0) \cdot \frac{X_n(t_0+h) - X_n(t_0)}{h} \right) =$$

$$= f_{x_1}(x_0)\, X_1'(t_0) + \dots + f_{x_n}(x_0)\, X_n'(t_0) = \langle \nabla f(x_0), X'(t_0) \rangle$$

PER $h \to 0$ SI HA:

$$\|X(t_0+h) - X(t_0)\| \le |X_1(t_0+h) - X_1(t_0)| + \dots + |X_n(t_0+h) - X_n(t_0)| =$$

$$= |X_1'(t_0)\cdot h + o(h)| + \dots + |X_n'(t_0)\cdot h + o(h)| =$$

$$= \left(|X_1'(t_0)| + \dots + |X_n'(t_0)|\right) \cdot |h| + o(h)$$

CIOÈ:

$$0 \le \|X(t_0+h) - X(t_0)\| \le C \cdot |h| + o(h)$$

CON $C$ COSTANTE POSITIVA.

MA ALLORA OGNI FUNZIONE CHE SIA $o(\|X(t_0+h) - X(t_0)\|)$ È ANCHE $o(C\cdot|h| + o(h))$

CIOÈ $o(h)$, PER $h \to 0$.

CIÒ SIGNIFICA CHE $\dfrac{o(\|X(t_0+h) - X(t_0)\|)}{h} \to 0$ PER $h \to 0$

**TEO 2** DATI $A \subset \mathbb{R}^k$ E $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ APERTI, $\bar{t} \in A$ E $\bar{x} \in \Omega$, $X: A \to \Omega$ TALE CHE $X(\bar{t}) = \bar{x}$ DERIVABILE IN $\bar{t}$ E $f: \Omega \to \mathbb{R}$ DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}$.

ALLORA LA FUNZIONE $\begin{array}{l} F: A \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(X(t)) \end{array}$ È DERIVABILE IN $\bar{t}$ E $\forall i = 1,..,k$ SI HA:

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}(\bar{t}) = \left\langle \nabla f(\bar{x}), \left( \frac{\partial X_1}{\partial t_i}(\bar{t}), \dots, \frac{\partial X_n}{\partial t_i}(\bar{t}) \right) \right\rangle$$

INOLTRE, SE $f \in C^1(\Omega)$ E $X_i \in C^1(A)$ PER OGNI $i = 1,..,n$, ALLORA ANCHE $F \in C^1(A)$.

**DIMO**

PER OGNI FISSATO $i = 1,..,k$, PER CALCOLARE $\frac{\partial F}{\partial t_i}(\bar{t})$ BASTA APPLICARE IL **TEO.1** ALLA FUNZIONE DELLA SOLA VARIABILE $t_i$, DATA DA:

$$F(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{i-1}, s, \bar{t}_{i+1}, \dots, \bar{t}_k) = G(s) = f(x_1(s), x_2(s), \dots, x_n(s))$$

DOVE, $\forall p = 1,..,n$, PONIAMO

$$x_p(s) = X_p(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_{i-1}, s, \bar{t}_{i+1}, \dots, \bar{t}_k)$$

GRAZIE AL TEO.1 SI HA:

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}(\bar{t}) = G'(\bar{t}_i) = \left\langle \nabla f(\bar{x}), (x_1'(\bar{t}_i), \dots, x_n'(\bar{t}_i)) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \nabla f(\bar{x}), \left( \frac{\partial}{\partial t_i} X_1(\bar{t}), \dots, \frac{\partial}{\partial t_i} X_n(\bar{t}) \right) \right\rangle$$

SE POI $f$ E $X$ SONO $C^1$, SIA $\nabla f$ CHE $\frac{\partial}{\partial t_i} X_p$ SONO CONTINUE, QUINDI ANCHE $\frac{\partial f}{\partial t_i}$ È CONTINUA.

**TEO.3** (CASO GENERALE)

DATI $A \subset \mathbb{R}^k$ E $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ APERTI, SIANO $X: A \to \Omega$ ED $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ ENTRAMBE DI CLASSE $C^1$, ALLORA $\begin{array}{l} F: A \to \mathbb{R}^m \\ t \mapsto f(X(t)) \end{array}$ È DI CLASSE $C^1$ E, $\forall t \in A$, SI HA

$$J_F(t) = J_f(X(t)) \cdot J_X(t)$$

OVVERO:

$$\begin{pmatrix} \partial_{t_1} F_1(t), \dots, \partial_{t_k} F_1(t) \\ \vdots \qquad \vdots \\ \partial_{t_1} F_m(t), \dots, \partial_{t_k} F_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(x(t)), \dots, \partial_{x_n} f_1(x(t)) \\ \vdots \qquad \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(x(t)), \dots, \partial_{x_n} f_m(x(t)) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_{t_1} x_1(t) \dots \partial_{t_k} x_1(t) \\ \vdots \qquad \vdots \\ \partial_{t_1} x_n(t) \dots \partial_{t_k} x_n(t) \end{pmatrix}$$

OVVERO $\forall i = 1, \dots, k \quad \forall p = 1, \dots, m$

**(1)** $$\partial_{t_i} F_p(t) = \left\langle \nabla f_p(x(t)), \left( \partial_{t_i} x_1(t), \dots, \partial_{t_i} x_n(t) \right) \right\rangle$$

**DIMO**

SICCOME $f \in C^1(\Omega)$ ALLORA $\forall p = 1, \dots, m$ $f_p(x)$ E DIFFERENZIABILE QUINDI BASTA APPLICARE IL TEO. 2 PER OTTENERE LA **(1)**.