

Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 1

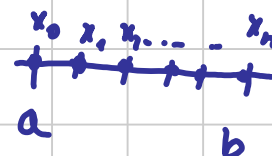
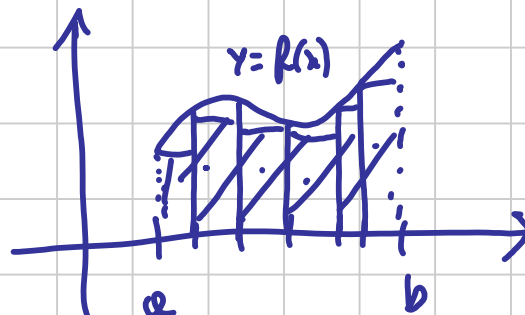
Titolo nota

2 marzo 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

QUESTE PAGINE NON SONO GLI APPUNTI
DEL CORSO, SONO SOLO QUELLO CHE
SCRIVO SUL TABLET MENTRE SPIEGO.
MANCA QUINDI TUTTO CIÒ CHE HO DETTO
MA NON SCRITTO. A PARZIALE SOSTITUZIONE
DI QUESTO HO TALVOLTA INSERITO DELLE
NOTE A FORMA DI NUVOLETTA.
SPERO CHE BASTI.

IL DOCENTE

INTEGRALE DI RIEMANN



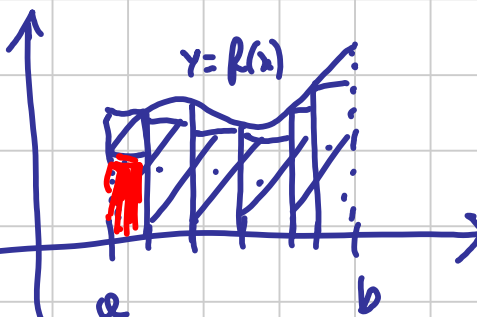
DEF. 1 DATO $[a, b] \subset \mathbb{R}$ DIREMO CHE $P = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i=0, \dots, n\}$ È
UNA PARTIZIONE DI $[a, b]$ SE $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

DEF. 2 DATI $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA E $P = \{x_0, \dots, x_n\}$
PART. DI $[a, b]$, DEFINIAMO:

$$\underline{s}(f, P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$\overline{s}(f, P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

DATTE 2 PARTIZIONI P_1 E P_2 DOBBIAMO
DECIDERE COSA SIGNIFICA CHE P_1 È
PIÙ FINE DI P_2 . L'ESEMPIO QUI SOTTO
CI CHIARISCE CHE NON VA BENE RICHIEDERE
SOLO CHE I PUNTI SIANO PIÙ FITTI, SENNÒ
NON SAREBBE PIÙ VERO CHE "RAFFINANDO LA
PARTIZIONE" L'APPROSSIMAZIONE MIGLIORA.



ES. CATTIVO

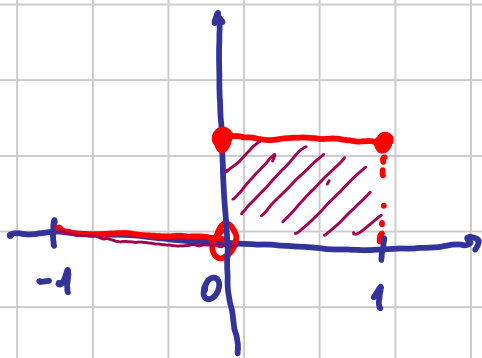
$[-1, 1]$

$f(x) = x_{[0,1]}^{(x)}$

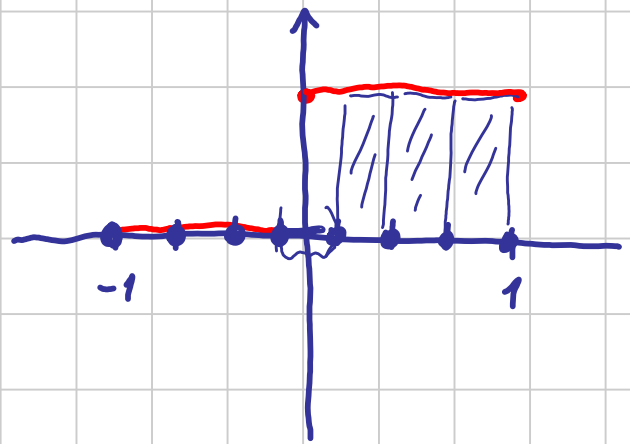
$P_1 = \{-1, 0, 1\}$

$P_2 = \{-1, -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \dots, \frac{5}{2}, 1\}$

CALCOLARE $\underline{s}(f, P_1)$ E $\underline{s}(f, P_2)$



$$\begin{aligned} \mathcal{J}(f, P_1) &= (x_1 - x_0) m_1 + (x_2 - x_1) m_2 \\ &= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = \boxed{1} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \mathcal{J}(f, P_2) &= 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \\ &= \boxed{\frac{6}{2}} \end{aligned}$$

DEF 3 DATI $[a, b]$, P_1, P_2 PART DI $[a, b]$, DIREMO CHE P_1 È PIÙ FINE DI P_2 , SE, COME INSIEME, $P_2 \subset P_1$.
 $(P_1 > P_2)$

LEMMA 1 DATI $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA E

SIANO $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_n\}$

$P_2 = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, \bar{x}, x_k, \dots, x_n\}$

PARTIZIONI DI $[a, b]$, ALLORA:

$$\mathcal{J}(f, P_1) \leq \mathcal{J}(f, P_2) \leq \mathcal{S}(f, P_2) \leq \mathcal{S}(f, P_1)$$

[DIM] DIMOSTRIAMO.

$$\mathcal{J}(f, P_1) = (x_1 - x_0) m_1 + (x_2 - x_1) m_2 + \dots + (x_k - x_{k-1}) m_k + \dots + (x_n - x_{n-1}) m_n$$

$$\mathcal{J}(f, P_2) = \dots + (\bar{x} - x_{k-1}) m'_k + (x_k - \bar{x}) m''_k + \dots + (x_n - x_{n-1}) m_n$$

VALGONO PERCHÉ
PIÙ SI ALLARGA L'INSIEME
PIÙ L'INF. SI ABBASTA

$$\left. \begin{aligned} m'_k &\geq m_k \\ m''_k &\geq m_k \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$(\bar{x} - x_{k-1}) m'_k + (x_k - \bar{x}) m''_k \geq$$

$$\geq (\bar{x} - x_{k-1}) m_k + (x_k - \bar{x}) m_k = (x_k - x_{k-1}) m_k$$

PER COMODITÀ SPESSO SCRIVEREMO

m_i AL POSTO DI $\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

E M_i AL POSTO DI $\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

UNICA DIFFERENZA

QUINDI $\rightarrow (f, P_1) \leq \tau(f, P_2)$

ANALOGAMENTE SI DIMOSTRA $S(f, P_2) \leq S(f, P_1)$

LEMMA 2 DATI $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA, E P_1, P_2 PARTIZIONI DI $[a, b]$ CON $P_2 \geq P_1$, SI HA:

$$\tau(f, P_1) \leq \tau(f, P_2) \leq S(f, P_2) \leq S(f, P_1)$$

DIM. SI APPLICA RIPETUTAMENTE LEMMA 1.

COROLLARIO 1 DATI $[a, b] \subset \mathbb{R}$ $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA E P_1, P_2 PART. DI $[a, b]$ ALLORA:

$$\tau(f, P_1) \leq S(f, P_2)$$

DIM. PRENDO $P = P_1 \cup P_2$, AVRÒ $P \geq P_1$ E $P \geq P_2$, QUINDI

$$\tau(f, P_1) \leq \tau(f, P) \leq S(f, P) \leq S(f, P_2)$$

(LEMMA 2) (OVVIO) (LEMMA 2)

DEF 4 DATI $[a, b] \subset \mathbb{R}$ E $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA, DEFINIAMO:

$$\int_{[a, b]}^- f = \sup \{ \tau(f, P) \mid P \text{ part. di } [a, b] \} < +\infty$$

$$\int_{[a, b]}^+ f = \inf \{ S(f, P) \mid P \text{ part. di } [a, b] \} > -\infty$$

$$\left(\text{oss. } \int^- \leq \int^+ \right)$$

QUANDO $\int^+ = \lambda = \int^-$ DICIAMO CHE $f \in \mathcal{R}([a, b])$ E IL VALORE λ SI INDICA CON $\int_a^b f(x) dx$.

GRAZIE AL
COROLLARIO 1

f È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN

E91 $f(x) = x$ È R-integrabile su $[0,1]$ e $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

$$P_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}$$

$$P_1 = \{0, 1\}$$

$$P_2 = \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

$$P_3 = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right\}$$



$$r(f, P_n) = \cancel{\frac{1}{n} \cdot 0} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{3}{n} + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1)) =$$

$$= \frac{1}{n^2} \frac{(n-1) \cdot n}{2} = \frac{n^2 - n}{2n^2} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}}$$

PASSANDO AL SUP
PER $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
SI OTTIENE

$$\int_{[0,1]}^- x \geq \frac{1}{2}$$

OKKIO! PER IL MOMENTO
HO SOLO "≥" PERCHÉ
NON SONO TUTTE LE
PARTIZIONI MA SOLO
QUELLE EQUISPACIATE

$$S(f, P_n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{3}{n} + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n} =$$

$$= \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2n^2} = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}}$$

$$\int_{[0,1]}^- x \geq \frac{1}{2} \quad \int_{[0,1]}^+ x \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leq \int_{[0,1]}^- x \leq \int_{[0,1]}^+ x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \int = \int^+ = \frac{1}{2}$$

ANALOGAMENTE
PASSANDO ALL'INF
PER $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
SI OTTIENE

$$\int_{[0,1]}^+ x \leq \frac{1}{2}$$

PER CASA: $\int_0^1 x^2 dx$ [RICORDARE LA FORMULA $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$]

ES.2 SIA $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ MOSTRARE CHE $f \notin \mathcal{R}([0,1])$



SU OGNI $[x_{i-1}, x_i)$ $\left. \begin{array}{l} \sup f \text{ VALE } 1 \\ \inf f \text{ VALE } 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{PER DENSITA'} \\ \text{DI } \mathbb{Q} \text{ E } \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{array}$

DA CIÒ SEGUE CHE

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot 0 = 0$$

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot 1 = 1$$

QUINDI $\int_{-}^+ f = 0 \quad \int_{-}^+ f = 1$

QUINDI $f \notin \mathcal{R}([0,1])$

Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 2

Titolo nota

4 marzo 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

(... CONTINUA) INTEGRALE DI RIEMANN

DEF.1 DATI $A, B \subset \mathbb{R}$, CON $A \cap B \neq \emptyset$, ED $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA, DEFINIAMO:

OSCILLAZIONE
DI f SU B

$$\text{osc}(f, B) = \sup \{f(x) \mid x \in A \cap B\} - \inf \{f(x) \mid x \in A \cap B\}$$

TEO.1 DATI $[a, b] \subset \mathbb{R}$ E $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA, È EQUIVALENTE Affermare CHE:

1) $f \in \mathcal{R}([a, b])$

2) $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{P}$ PART. DI $[a, b]$ T.C. $S(f, \mathcal{P}) - \underline{s}(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$

3) $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{P}$ PART. DI $[a, b]$ T.C. $\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \text{osc}(f, [x_{i-1}, x_i]) < \varepsilon$

DIMO

(2) $\Rightarrow$ (1) $\forall \mathcal{P}$ PARTIZIONE DI $[a, b]$ SI HA:

(1)

$$\underline{s}(f, \mathcal{P}) \leq \int_{[a, b]}^- f \leq \int_{[a, b]}^+ f \leq S(f, \mathcal{P})$$

DA (2) SEGUE CHE $\forall \varepsilon > 0$ SI PUÒ SCEGLIERE $\mathcal{P}$ IN MODO CHE $S(f, \mathcal{P}) - \underline{s}(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$,
QUINDI, GRAZIE A (1), SI HA CHE

$$0 \leq \int_{[a, b]}^+ f - \int_{[a, b]}^- f < \varepsilon$$

VISTO CHE QUESTO VALE $\forall \varepsilon > 0$, SI PUÒ CONCLUDERE CHE:

$$\int_{[a, b]}^+ f - \int_{[a, b]}^- f = 0$$

CIOÈ CHE $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

(1) $\Rightarrow$ (2) DA (1) SEGUE CHE $\int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]}^- f = \sup_{\mathcal{P}} \underline{s}(f, \mathcal{P})$.

QUINDI $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{P}$, PART. DI $[a, b]$ T.C.

$$\underline{s}(f, P_1) > \int_a^b f(x) dx - \frac{\varepsilon}{2}$$

E ANALOGAMENTE $\exists P_2$ T.C.

$$\overline{s}(f, P_2) < \int_a^b f(x) dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

NE SEGUE CHE:

(2)

$$\underline{s}(f, P_2) - \underline{s}(f, P_1) < \varepsilon$$

SONO DIVERSE, DOBBIAMO MOSTRARE CHE SI PUO' TROVARE P CHE SIA LA STESSA PER ENTRAMBE.

BASTA QUINDI PRENDERE $P = P_1 \cup P_2$ PER AVERE:

(3)

$$\underline{s}(f, P_1) \leq \underline{s}(f, P) \leq \overline{s}(f, P) \leq \overline{s}(f, P_2)$$

COSI' DA (2) E (3) SEGUE

$$\overline{s}(f, P) - \underline{s}(f, P) < \varepsilon$$

QUINDI VALE (2).

(2) $\Leftrightarrow$ (3) (2) E (3) SONO SOLO DUE MODI DIVERSI DI SCRIVERE LA STESSA COSA PERCHÉ, $\forall P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ PARTIZIONE DI $[a, b]$ SI HA:

$$\begin{aligned} \overline{s}(f, P) - \underline{s}(f, P) &= \sum_{n=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) - \\ &\quad - \sum_{n=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) = \\ &= \sum_{n=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \left(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) \right) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{= \text{osc}(f, [x_{i-1}, x_i])} \end{aligned}$$

TEO 2 DATI $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ED $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ ALLORA:

1) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha f \in \mathcal{R}([a, b])$ E $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$

2) $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$ E $\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

CON IL LINGUAGGIO DELL'ALGEBRA LINEARE QUESTO TEOREMA DICE CHE $\mathcal{R}([a, b])$ È UNO SPAZIO VETTORIALE E CHE L'APPLICAZIONE $\mathcal{R}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$
 $f \mapsto \int_a^b f(x) dx$
 È LINEARE

DIMO (1) I° CASO: $\alpha > 0$.

PER OGNI $\mathcal{P}$ PART. DI $[a, b]$ SI HA:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\alpha f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf_{[x_{i-1}, x_i]} \alpha f(x) = \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) = \alpha \mathcal{J}(f, \mathcal{P}). \end{aligned}$$

ATTENZIONE: SE NON FOSSE $\alpha > 0$ IL PASSAGGIO NON SAREBBE VALIDO, PERCHÉ L'INF. DIVENTEREBBE SUP.

CIOÈ:

$$\mathcal{J}(\alpha f, \mathcal{P}) = \alpha \cdot \mathcal{J}(f, \mathcal{P})$$

QUINDI:

$$\int_{[a,b]}^- \alpha f = \sup_{\mathcal{P}} \mathcal{J}(\alpha f, \mathcal{P}) = \sup_{\mathcal{P}} \alpha \cdot \mathcal{J}(f, \mathcal{P}) = \alpha \cdot \sup_{\mathcal{P}} \mathcal{J}(f, \mathcal{P}) = \alpha \int_{[a,b]}^- f = \alpha \cdot \int_a^b f(x) dx$$

SERVE $\alpha > 0$

PERCHÉ $f \in \mathcal{R}([a, b])$

IN MODO DEL TUTTO ANALOGO SI OTTIENE:

$$\int_{[a,b]}^+ \alpha f = \dots = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

QUINDI:

$$\int_{[a,b]}^- \alpha f = \alpha \int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]}^+ \alpha f$$

$$\text{PERCIÒ } \alpha f \in \mathcal{R}([a, b]) \text{ E } \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

II° CASO: $\alpha = -1$

PER OGNI PARTIZIONE $\mathcal{P}$ SI HA:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(-f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf_{[x_{i-1}, x_i]} (-f(x)) = \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot (-1) \cdot \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) = -S(f, \mathcal{P}) \end{aligned}$$

ATTENZIONE AL FATTO CHE PORTANDO FUORI IL SEGNO L'INF DIVENTA SUP

CIOÈ:

$$\mathcal{J}(-f, \mathcal{P}) = -S(f, \mathcal{P})$$

QUINDI:

$$\int_{[a,b]}^- f = \sup_P \mathcal{I}(-f, P) = \sup_P -S(f, P) = -\inf_P S(f, P) = -\int_{[a,b]}^+ f = -\int_a^b f(x) dx$$

ATTENZIONE CHE
SUP DIVENTA INF

PERCHÉ $f \in \mathcal{R}([a,b])$

ANALOGAMENTE SI OTTIENE ANCHE:

$$\int_{[a,b]}^+ f = \dots = -\int_a^b f(x) dx$$

QUINDI $-f \in \mathcal{R}([a,b])$ E $\int_a^b -f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.

IL CASO GENERALE ($\alpha \in \mathbb{R}$) SI OTTIENE COMBINANDO
I 2 CASI $\alpha > 0$ E $\alpha = -1$.

(2) PER OGNI $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ PARTIZIONE DI $[a,b]$ SI HA:

(4)

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(f+g, P) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf_{[x_{i-1}, x_i]} (f(x) + g(x)) \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \left(\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) + \inf_{[x_{i-1}, x_i]} g(x) \right) = \\ &= \mathcal{I}(f, P) + \mathcal{I}(g, P) \end{aligned}$$

PER CONVINCERSI CHE:

$$\inf_I (f(x) + g(x)) \geq \inf_I f(x) + \inf_I g(x)$$

SI OSSERVI BANALMENTE CHE

$$\text{SE } \lambda = \inf_I f(x) \text{ E } \mu = \inf_I g(x)$$

ALLORA, $\forall x \in I$ $f(x) \geq \lambda$ E $g(x) \geq \mu$.

QUINDI $\forall x \in I$ $f(x) + g(x) \geq \lambda + \mu$,

CIOÈ $\lambda + \mu$ È MINORANTE

DELL'INSIEME $\{f(x) + g(x) \mid x \in I\}$

QUINDI:

$$\inf_I (f(x) + g(x)) \geq \lambda + \mu = \inf_I f(x) + \inf_I g(x)$$

QUINDI SE PER OGNI $\varepsilon > 0$ PRENDO P_1 E P_2 IN MODO CHE:

$$\mathcal{I}(f, P_1) > \int f - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{E} \quad \mathcal{I}(g, P_2) > \int g - \frac{\varepsilon}{2}$$

ALLORA, PRESA $P = P_1 \cup P_2$, SI HA, A MAGGIOR RAGIONE:

(5)

$$\mathcal{I}(f, P) > \int f - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{E} \quad \mathcal{I}(g, P) > \int g - \frac{\varepsilon}{2}$$

COMBINANDO (4) E (5), POSSIAMO CONCLUDERE CHE $\forall \varepsilon > 0 \exists P$ PART.
DI $[a,b]$ T.C.

$$\mathcal{I}(f+g, P) \geq \mathcal{I}(f, P) + \mathcal{I}(g, P) \geq \int f + \int g - \varepsilon$$

DA CUI SEGUE CHE: $\forall \varepsilon > 0$

$$\int \bar{f} + g \geq \int \bar{f} + \int \bar{g} - \varepsilon$$

PERCHÉ $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$

CIOÈ CHE:

(6)

$$\int \bar{f} + g \geq \int \bar{f} + \int \bar{g} = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

PROCEDENDO IN MODO ANALOGO SI OTTIENE ANCHE:

(7)

$$\int f + g \leq \int f + \int g = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

COMBINANDO INSIEME (6) E (7) SI OTTIENE:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \leq \int \bar{f} + g \leq \int f + g \leq \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\text{QUINDI } f + g \in \mathcal{R}([a, b]) \text{ E } \int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

TEO 3 DATI $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ED $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ ALLORA SI HA:

- 1) f^+, f^- ED $|f|$ STANNO IN $\mathcal{R}([a, b])$
- 2) $\max\{f, g\}$ E $\min\{f, g\}$ STANNO IN $\mathcal{R}([a, b])$
- 3) $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$
- 4) $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

SI RICORDI CHE

$$f^+ = \max\{f, 0\}$$

$$f^- = -\min\{f, 0\}$$

QUINDI

$$f = f^+ - f^-$$

$$\text{E } |f| = f^+ + f^-$$

- 5) $\forall c \in (a, b)$ f È $\mathcal{R}$ -INTEGRABILE SIA SU $[a, c]$ CHE SU $[c, b]$ E $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

DIMO

(1) POICHÉ $f \in \mathcal{R}([a, b])$ SAPPIAMO CHE $\forall \varepsilon > 0 \exists \rho = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ PART. DI $[a, b]$ T.C.

(8)

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \text{osc}(f, [x_{i-1}, x_i]) < \varepsilon$$

OSSERVIAMO CHE VALE SEMPRE:

$$\text{osc}(f^+, [x_{i-1}, x_i]) \leq \text{osc}(f, [x_{i-1}, x_i])$$

3 CASI:

SU $[x_{i-1}, x_i]$ f PUÒ

① CAMBIAR SEGNO

② ESSERE SEMPRE ≥ 0

③ ESSERE SEMPRE ≤ 0

CASO ① $\sup f = \sup f^+$ E $\inf f < 0 = \inf f^+$
DA CUI SEGUE $\text{osc}(f) > \text{osc}(f^+)$

CASO ② OVVIO PERCHÉ $f = f^+$

CASO ③ OVVIO PERCHÉ $f^+ = 0$.

QUINDI, QUANDO VALE (8), A MAGGIOR RAGIONE VALE ANCHE:

$$(9) \quad \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \sigma_c(f^*, [x_{i-1}, x_i]) < \varepsilon$$

MA DIRE CHE $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{P}$ PARTIZIONE DI $[a, b]$ T.C. VALE (9), SIGNIFICA PROPRIO CHE $f^+ \in \mathcal{R}([a, b])$.

PER QUANTO RIGUARDA f^- , BASTA OSSERVARE CHE $f^- = f^+ - f$ E QUINDI $f^- \in \mathcal{R}([a, b])$ PERCHÉ $f, f^+ \in \mathcal{R}([a, b])$.

LO STESSO DICASI PER $|f| = f^+ + f^-$.

(2) BASTA NOTARE CHE:

$$\max\{f, g\} = f + (g - f)^+$$

E CHE:

$$\min\{f, g\} = -\max\{-f, -g\}$$

E APPLICARE (1) E IL TED. 2.

(3) SE $f \leq g$ ALLORA VP PART. DI $[a, b]$ SI HA $\mathcal{J}(f, \mathcal{P}) \leq \mathcal{J}(g, \mathcal{P})$ E, DI CONSEGUENZA, $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. MA POICHÉ $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, CIÒ SIGNIFICA CHE $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

(4) VALE LA DISUGUAGLIANZA:

$$f = f^+ - f^- \leq f^+ + f^- = |f|$$

QUINDI DA (3) SEGUE:

$$(10) \quad \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

ANALOGAMENTE DALLA DISUGUAGLIANZA:

$$-f = -f^+ + f^- \leq f^+ + f^- = |f|$$

SEGUE:

$$(11) \quad -\int_a^b f(x) dx = \int_a^b -f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

METTENDO INSIEME (10) E (11) SI OTTIENE:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

(5) QUESTO PUNTO È PIÙ LUNGO DA SCRIVERE (MA NON PIÙ DIFFICILE).

L'IDEA DA USARE È CHE SE P È UNA PARTIZIONE DI $[a, b]$, CONTENENTE ANCHE IL PUNTO c , ALLORA ESISTONO P_1 PARTIZIONE DI $[a, c]$ E P_2 PARTIZIONE DI $[c, b]$ TALI CHE $P = P_1 \cup P_2$, DA CUI SI OTTIENE

$$\lambda(f, P) = \lambda(f, P_1) + \lambda(f, P_2) \quad \text{E} \quad S(f, P) = S(f, P_1) + S(f, P_2)$$

USANDO TALI IDENTITÀ SI RIESCE A DEDURRE SIA CHE $f \in \mathcal{R}([a, c])$ E $f \in \mathcal{R}([c, b])$

SI A CHE :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

I DETTAGLI VENGONO LASCIATI ALLO STUDENTE.

DEF 2 DATI $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ED $f \in \mathcal{R}([a, b])$, DEFINIAMO

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

TEO. 4 DATI $[a, b] \subset \mathbb{R}$ E $f \in \mathcal{R}([a, b])$ E DATI $c_1, c_2, c_3 \in [a, b]$ E DISTINTI.

ALLORA, COMUNQUE SIANO ORDINATI c_1, c_2 E c_3 , SI HA

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x) dx = \int_{c_1}^{c_3} f(x) dx$$

DIMO

IL CASO $c_1 < c_2 < c_3$ SEGUE DAL PUNTO (5) DEL **TEO. 3**.

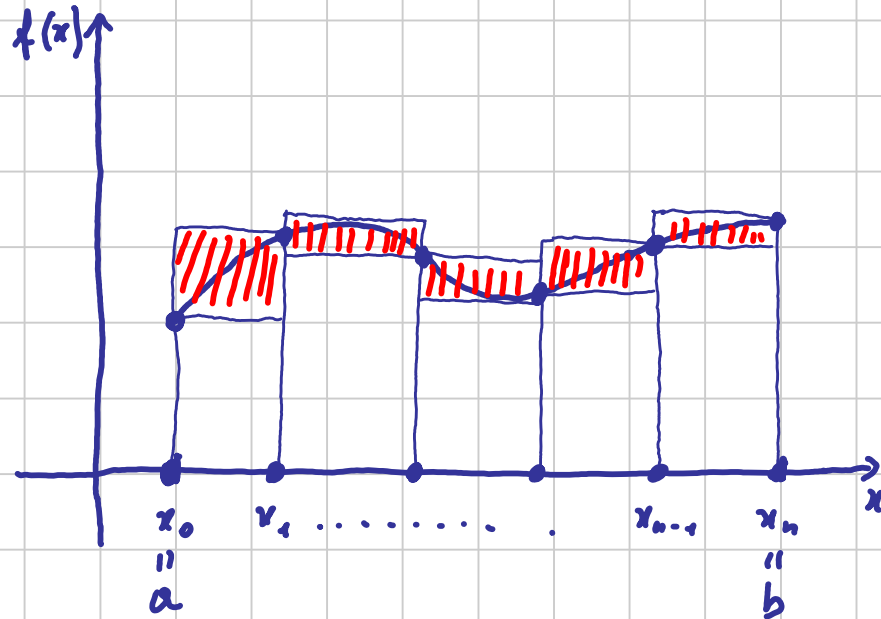
GLI ALTRI CASI SI GESTISCONO CON LA **DEF 2**.

TEO. 5 DATI $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ED $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA, ALLORA $f \in \mathcal{R}([a, b])$

DIMO VOGLIAMO MOSTRARE CHE $\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{P} = \{x_0, \dots, x_n\}$ PARTIZIONE DI $[a, b]$ T.C.

$$(12) \quad \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \operatorname{osc}(f, [x_{i-1}, x_i]) < \varepsilon$$

IL VALORE DI (12) È L'AREA DELLA ZONA ROSSA IN FIGURA:



L'IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE È DI SCEGLIERE UNA PARTIZIONE $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ IN MODO CHE LE "ALTEZZE DEI RETTANGOLINI ROSSI" SIANO TUTTE MINORI DI $\frac{\varepsilon}{b-a}$. IN TAL MODO, VISTO CHE LA SOMMA DELLE BASI È $b-a$, SI AVRÀ CHE LA SOMMA DELLE AREE È MINORE DI ε .

FORMALIZZIAMO L'IDEA.

DAL FATTO CHE f È CONTINUA E CHE $[a, b]$ È COMPATTO, GRAZIE AL TEO. DI HEINE-CANTOR, SEGUE CHE f È UNIFORMEMENTE CONTINUA. DI CONSEGUENZA:

$$(13) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ T.C. SE } x', x'' \in [a, b] \text{ E } |x' - x''| < \delta \text{ ALLORA } |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

QUINDI, PRESA $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ PARTIZIONE DI $[a, b]$ TALE CHE $x_i - x_{i-1} < \delta$ PER OGNI $i = 1, \dots, n$, DA (13) SEGUE CHE, PER OGNI $i = 1, \dots, n$, SI HA:

$$\text{osc}(f, [x_{i-1}, x_i]) = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) =$$

PASSANDO AL SUP. LA DISUGUGLIANZA È PASSATA DA STRETTA A DEBOLE

$$= \sup \{ f(x') - f(x'') \mid x', x'' \in [x_{i-1}, x_i] \} \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot (b-a)}$$

QUINDI PER TALE $\varnothing$ SI HA:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \text{osc}(f, [x_{i-1}, x_i]) &\leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot (b-a)} = \\ &= \frac{\varepsilon}{2 \cdot (b-a)} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{2 \cdot (b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

QUINDI (12) È VERO. QUINDI $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

TEO. 6 DATI $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ED $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ MONOTONA, ALLORA $f \in \mathcal{R}([a, b])$

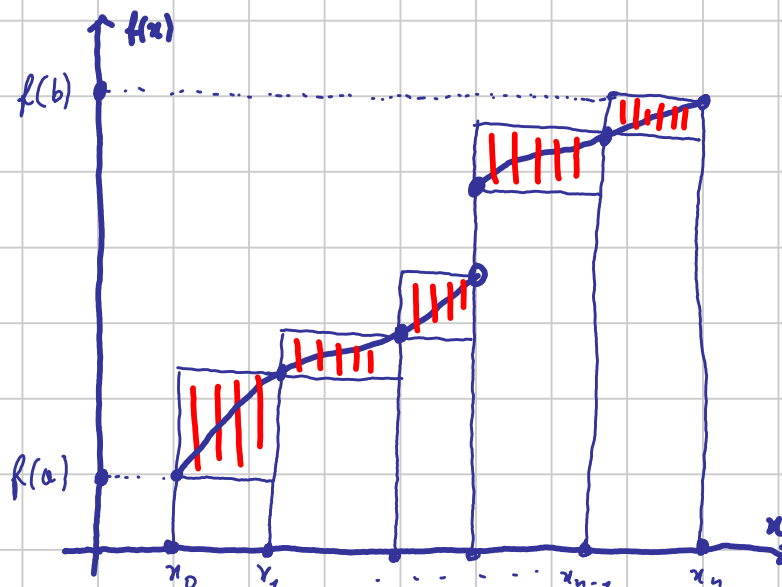
DIMO BASTERÀ TRATTARE IL CASO f CRESCENTE, DOPODICHÉ IL CASO DECRESCENTE SI GESTISCE PASSANDO A $-f$.

SUPPONIAMO DUNQUE f CRESCENTE.

VOGLIAMO MOSTRARE CHE $\forall \varepsilon > 0 \exists \varnothing = \{x_0, \dots, x_n\}$ PARTIZIONE DI $[a, b]$ T.C.

$$(14) \quad \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \text{osc}(f, [x_{i-1}, x_i]) < \varepsilon$$

IL VALORE DI (14) È L'AREA DELLA ZONA ROSSA IN FIGURA:



L'IDEA È CHE, A CAUSA DELLA MONOTONIA, LA SOMMA DELLE ALTEZZE DEI RETTANGOLINI ROSSI È SEMPRE MINORE O UGUALE A $f(b) - f(a)$.
 QUINDI BASTERÀ CHE TUTTE LE BASI SIANO MINORI DI $\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ PERCHÉ LA SOMMA DELLE AREE SIA MINORE DI ε .

FORMALIZZIAMO L'IDEA.

$\forall \varepsilon > 0$ PRENDIAMO $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ PARTIZIONE DI $[a, b]$ TALE CHE

$$x_i - x_{i-1} < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{PER OGNI } i=1, \dots, n$$

SI OTTIENE:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \max(f, [x_{i-1}, x_i]) \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot (f(x_i) - f(x_{i-1})) < \\ & < \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \\ & = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot (f(b) - f(a)) = \varepsilon \end{aligned}$$

PERCHÉ f È CRESCENTE

QUESTO DIMOSTRA (14) E QUINDI ANCHE CHE $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

BOZZA DEL 5 MARZO 2020
 (SEGNALATEMI EVENTUALI REFUSI)

Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 3

Titolo nota

9 marzo 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

INTEGRALE DI RIEMANN (CALCOLO)

Es. 0 $f(x) = \chi_{(1,3)}^{(1)}$ su $[0,4]$ $\int_0^4 \chi_{(1,3)}^{(1)} dx = 2$

(*) $P = \{0, 1, 3, 4\}$ $S(f, P) = \sum_{i=1}^3 (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) =$

$$= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2$$

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^3 (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

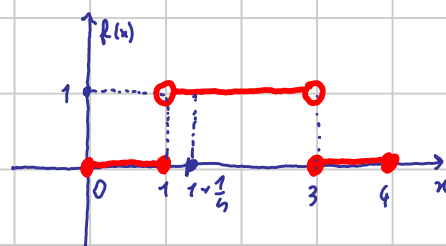
$$P_n = \{0, 1 + \frac{1}{n}, 3, 4\}$$

(*) $s(f, P_n) = \sum_{i=1}^3 (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) = (1 + \frac{1}{n}) \cdot 0 + (2 - \frac{1}{n}) \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2 - \frac{1}{n}$

$$(*) \Rightarrow \int f \geq 2$$

$$(*) \Rightarrow \int f \leq 2$$

$$\} \Rightarrow 2 \leq \int f \leq \int f \leq 2 \Rightarrow \int f = \int f = 2$$

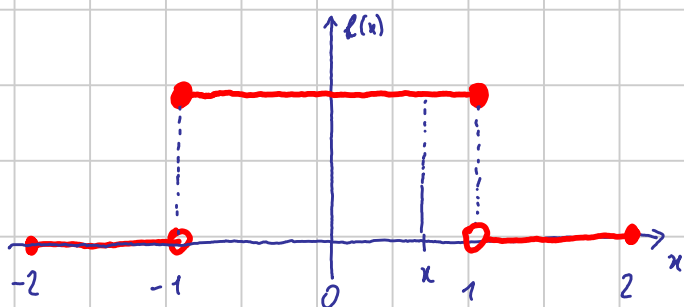


Def 1 DATI $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in [a,b]$, $f \in \mathcal{R}([a,b])$ DEFINIAMO

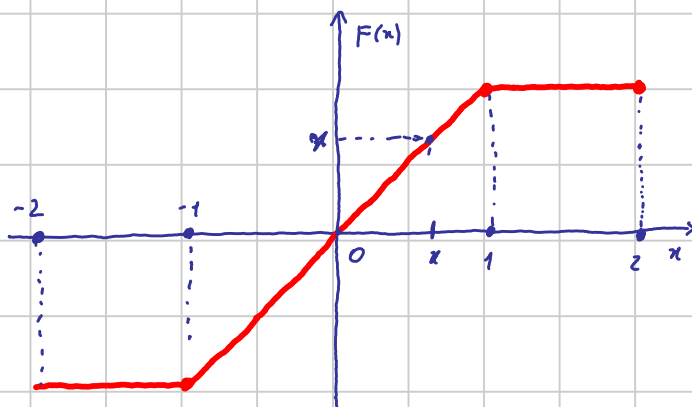
$$F: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$$

FUNZIONE INTEGRALE DI f CON PUNTO BASE x_0 .

Es. 1 $[-2,2]$ $f(x) = \chi_{[-1,1]}^{(1)}$ $x_0 = 0$ $F(x) = \int_0^x \chi_{[-1,1]}^{(1)} dt$



$$F(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-2, -1] \\ x & x \in (-1, 1) \\ 1 & x \in [1, 2] \end{cases}$$



TEO. 1

DATI $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in [a, b]$, $f \in \mathcal{R}([a, b])$ sia $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$

1) F È LIPSCH. CON COSTANTE $L = \sup_{[a, b]} |f(x)|$

2) (T.F.C.I.) SE f È CONTINUA IN $\bar{x} \in [a, b]$ ALLORA $F'(\bar{x}) = f(\bar{x})$.

QUI C'E' UN
REFUSO: CI
VUOLE "≤"

DIMO

① $\forall x, y \in [a, b] \ x \neq y \quad \left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} \right| < L$

$[x < y] \quad |F(y) - F(x)| = \left| \int_{x_0}^y f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt \right| = \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq$

$\leq \int_x^y |f(t)| dt \leq \int_x^y L dt = L \cdot (y - x) = L \cdot |y - x|$

$\left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} \right| = \frac{|F(y) - F(x)|}{|y - x|} \leq \frac{L \cdot |y - x|}{|y - x|} = L$

② $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\bar{x} + h) - F(\bar{x})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\int_{x_0}^{\bar{x} + h} f(t) dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t) dt \right) =$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \int_{\bar{x}}^{\bar{x} + h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\bar{x}}^{\bar{x} + h} f(\bar{x}) + (f(t) - f(\bar{x})) dt =$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \int_{\bar{x}}^{\bar{x} + h} f(\bar{x}) dt + \frac{1}{h} \int_{\bar{x}}^{\bar{x} + h} (f(t) - f(\bar{x})) dt \right) =$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \cdot f(\bar{x}) \cdot h + \frac{1}{h} \int_{\bar{x}}^{\bar{x} + h} f(t) - f(\bar{x}) dt \right) = \dots = f(\bar{x})$

$(h > 0) \quad \frac{1}{h} \cdot \left| \int_{\bar{x}}^{\bar{x} + h} (f(t) - f(\bar{x})) dt \right| \leq \frac{1}{h} \cdot \int_{\bar{x}}^{\bar{x} + h} |f(t) - f(\bar{x})| dt \stackrel{h < \delta}{\leq} \frac{1}{h} \cdot \int_{\bar{x}}^{\bar{x} + h} \varepsilon dt = \frac{1}{h} \cdot \varepsilon h = \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |t - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(\bar{x})| < \varepsilon$

COR. 1

DATI $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in [a, b]$ ED $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA, DETTA $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$, SI HA CHE F È PRIMITIVA DI f .

DIMO

OVVIA (BASTA APPLIC. IL T. 1 (2) IN OGNI $\bar{x} \in [a, b]$)

COR. 2

DATI $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ED $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA. SIA G UNA PRIMITIVA DI f .

ALLORA $\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$.

DIMO

SI A $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \quad (x_0 \in [a, b])$

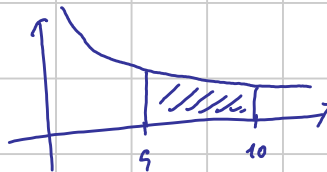
$F(b) - F(a) = \int_{x_0}^b f(x) dx - \int_{x_0}^a f(x) dx = \int_{x_0}^b f(x) dx + \int_a^{x_0} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

$\forall G$ primitiva di $f \exists k$ t.c. $G(x) = F(x) + k$

$$G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

Es. 2

$$\int_5^{10} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_5^{10} = \ln 10 - \ln 5 = \ln 2$$



Es. 3

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = -1 - (-1) = 0$$



Es. 4

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2} dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \ln 4 - \frac{1}{2} \ln 1 = \ln 2$$

Es. 5

$$\int_2^3 \frac{1}{x(x+1)} dx = \int_2^3 \frac{x+1-x}{x(x+1)} dx = \int_2^3 \left(\frac{x+1}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)} \right) dx = \int_2^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= \int_2^3 \frac{1}{x} dx - \int_2^3 \frac{1}{x+1} dx = [\ln x]_2^3 - [\ln(x+1)]_2^3 = \ln 3 - \ln 2 - \ln 4 + \ln 3 = \ln \frac{9}{8}$$

15-03-2021 (14-16)
PARTI AGGIUNTE RISPETTO AL 2020

LEZ 6

DEF. I DATE $f, F \in C([a, b])$ CON F DERIVABILE SU (a, b)
DIREMO CHE F È PRIMITIVA DI f SE $\forall x \in (a, b)$ SI HA
 $F'(x) = f(x)$.

PROP. I DATE $f, F, G \in C([a, b])$ CON F E G DERIVABILI SU (a, b)
E TALI CHE ENTRAMBE SIANO PRIMITIVE DI f . ALLORA $\exists k \in \mathbb{R}$
TALE CHE $G(x) = F(x) + k$ PER OGNI $x \in [a, b]$.

DIMO BASTA MOSTRARE CHE LA FUNZIONE DIFFERENZA
 $H(x) = G(x) - F(x)$ È COSTANTE.
A TALE SCOPO SI OSSERVI CHE, $\forall x \in (a, b)$ SI HA:

$$H'(x) = (G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

SE PER ASSURDO $H(x)$ NON FOSSE COSTANTE ESISTEREBBERO
 $x_1, x_2 \in [a, b]$ TALI CHE $H(x_1) \neq H(x_2)$ E QUINDI

$$\frac{H(x_1) - H(x_2)}{x_1 - x_2} = \lambda \neq 0$$

MA PER IL TED. DI LAGRANGE APPLICATO SU $[x_1, x_2]$, ABBIAMO
CHE $\exists c \in (x_1, x_2)$ TALE CHE :

$$H'(c) = \frac{H(x_1) - H(x_2)}{x_1 - x_2} = \lambda \neq 0$$

CHE È ASSURDO PERCHÉ $H'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$. QUINDI $H(x)$ È COSTANTE.

Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 4

Titolo nota

16 marzo 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

TECNICHE DI INTEGRAZIONE

TEO. 1 DATI $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ED $f, g \in C^1([a, b])$ ALLORA:

(1)
$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

DIMO

DALLA REGOLA DELLA DERIVATA DI UN PRODOTTO SEGUE CHE:

$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

DA CUI SEGUE:

$$f'(x) g(x) = (f(x) g(x))' - f(x) g'(x)$$

POICHÉ $f, g \in C^1([a, b])$, TUTTI I TERMINI SONO CONTINUI E QUINDI INTEGRABILI, QUINDI INTEGRANDO IN AMBO I MEMBRI SI HA:

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x) g(x) dx &= \int_a^b (f(x) g(x))' dx - \int_a^b f(x) g'(x) dx = \\ &= [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx \end{aligned}$$

CHE È LA TESI.

DSS. 1 LA FORMULA (1) PERMETTE DI TRASFORMARE IL CALCOLO DI $\int f'g$ NEL CALCOLO DI $\int fg'$. OVVIAMENTE BISOGNA SCEGLIERE BENE CHI È f E CHI È g PERCHÉ IL NUOVO INTEGRALE SIA PIÙ SEMPLICE.

ES. 1

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot (-\cos x)' dx = [x \cdot (-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)' \cdot (-\cos x) dx = \\ &= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1. \end{aligned}$$

ES. 2

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = \int_0^1 x^2 \cdot (e^x)' dx = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx = e - \int_0^1 2x \cdot (e^x)' dx =$$

$$= e - [2xe^x]_0^1 + \int_0^1 2e^x dx = e - 2e + [2e^x]_0^1 = -e + 2e - 2 = e - 2$$

Oss. 2

STESSO METODO FUNZIONA PER INTEGRALI DEL TIPO:

$$\int_a^b P(x) e^{cx} dx, \int_a^b P(x) \sin(cx) dx, \int_a^b P(x) \cos(cx) dx$$

DOVE $P(x)$ È UN POLINOMIO

Es. 3

$$\int_1^2 \ln x dx = \int_1^2 1 \cdot \ln x dx = \int_1^2 (x)' \ln x dx = [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx = 2 \ln 2 - 1$$

Es. 4

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{2}} 8x^3 \cdot \ln^2 x dx &= \int_1^{\sqrt{2}} (2x^4)' \cdot \ln^2 x dx = [2x^4 \cdot \ln^2 x]_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} 2x^4 \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= 2 \cdot 4 \cdot (\ln \sqrt{2})^2 - \int_1^{\sqrt{2}} 4x^3 \cdot \ln x dx = \\ &= 2 \ln^2 2 - \int_1^{\sqrt{2}} (x^4)' \cdot \ln x dx = \\ &= 2 \ln^2 2 - [x^4 \cdot \ln x]_1^{\sqrt{2}} + \int_1^{\sqrt{2}} x^4 \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= 2 \ln^2 2 - 2 \ln 2 + \int_1^{\sqrt{2}} x^3 dx = \\ &= 2 \ln^2 2 - 2 \ln 2 + \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^{\sqrt{2}} = 2 \ln^2 2 - 2 \ln 2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Oss 3

STESSO METODO FUNZIONA PER $\int_a^b P(x) \cdot \ln^n x dx$

Es. 5

$$\begin{aligned} \int_0^1 4x^3 \cdot \arctan x dx &= \int_0^1 (x^4)' \arctan x dx = [x^4 \arctan x]_0^1 - \int_0^1 x^4 \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^4 + \overbrace{x^2 - x^2}^0 - 1 + 1}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^4 + x^2}{1+x^2} - \frac{x^2 + 1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= \cancel{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + 1 - \left[\arctan x\right]_0^1 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

oss. 4 CON LO STESSO METODO, $\int_a^b P(x) \arctan x dx$ PUÒ ESSERE RICONDOTTO AL CALCOLO

$$\text{DI } \int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx \quad \text{O} \quad \int_a^b \frac{x}{1+x^2} dx.$$

ES. 6

$$\int_0^\pi e^x \cdot \sin x dx = \int_0^\pi (e^x)' \sin x dx = [e^x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x dx =$$

$$= 0 - \int_0^\pi (e^x)' \cos x dx = -[e^x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi e^x (-\sin x) dx =$$

$$= e^\pi + 1 - \int_0^\pi e^x \sin x dx$$

QUINDI, DETTO $I = \int_0^\pi e^x \cdot \sin x dx$, ABBIAMO OTTENUTO CHE:

$$I = e^\pi + 1 - I$$

CIOÈ:

$$I = \frac{e^\pi + 1}{2}$$

oss. 5 STESSO METODO FUNZIONA CON:

$$\int_a^b e^{\alpha x} \sin(\beta x) dx \quad \int_a^b e^{\alpha x} \cos(\beta x) dx \quad \int_a^b \sin(\alpha x) \cos(\beta x) dx$$

TEO. 2 DATI $f \in C([A, B])$ E $\varphi: [a, b] \rightarrow [A, B]$ DI CLASSE C^1 , SIANO $\varphi(a) = a \in [A, B]$ E $\varphi(b) = b \in [A, B]$. ALLORA SI HA:

(2)

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

DIMO

PRESO UN QUALSIASI $x_0 \in [A, B]$ DEFINIAMO LA FUNZIONE INTEGRALE $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$.

PER IL T.F.C.I. SAPPIAMO CHE $F(x)$ È PRIMITIVA DI $f(x)$. DI CONSEGUENZA:

$$\left(F(\varphi(t)) \right)' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

QUINDI $F(\varphi(t))$ È UNA PRIMITIVA DI $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$.

QUINDI.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \left[F(\varphi(t)) \right]_{\alpha}^{\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

MA SI HA ANCHE:

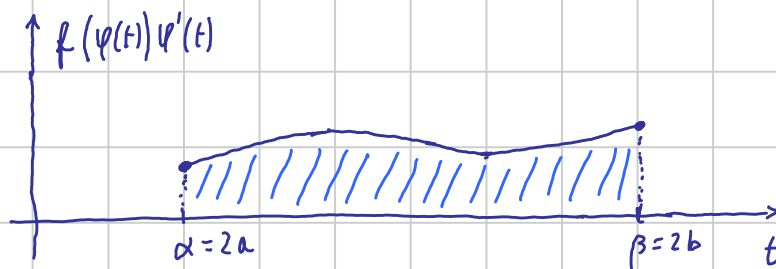
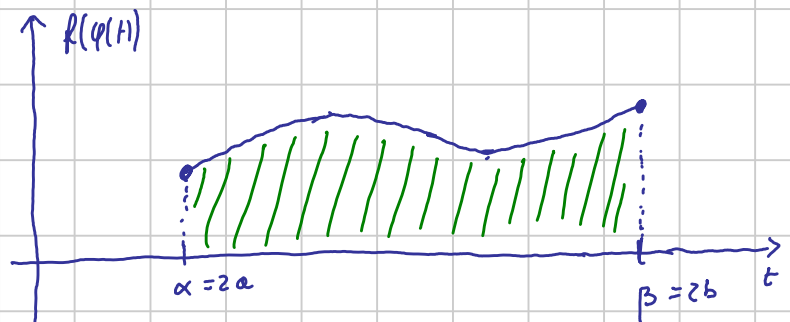
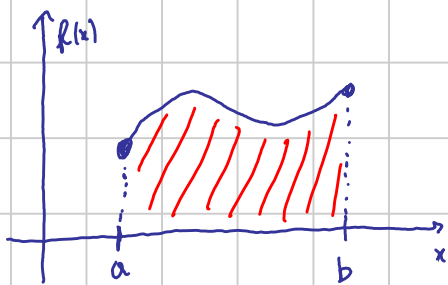
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

QUINDI VALE LA (2).

Oss. 6 È UTILE CONVINCERSI DELLA NECESSITÀ DELLA PRESENZA DI $\varphi'(t)$ NELLA (2)

PENSANDO AL CASO PARTICOLARE IN CUI φ È LINEARE. AD ESEMPIO PRENDIAMO:

$\varphi: t \mapsto \frac{1}{2}t$, NEL QUAL CASO $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ VIENE INTEGRATA SU $[2a, 2b]$.



IL GRAFICO DI $f(\varphi(t))$ SI OTTIENE DA QUELLO DI $f(x)$ RADDOPPIANDO LE ASCISSE. AFFINCHÉ L'INTEGRALE NON CAMBI BISOGNA QUINDI DIMEZZARE LE ORDINATE, CIOÈ MOLTIPLICARE LA FUNZIONE PER $\varphi'(t)$. QUESTO FATTO È EVIDENZIATO NELLE FIGURE.

OSS. 7

LA (2) PUÒ ESSERE USATA IN ENTRAMBE LE DIREZIONI, COME CHIARISCE BENE L'ESEMPIO 7, QUI DI SEGUITO.

ES. 7

CALCOLARE $\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx$

I° MODO

PRENDO $\varphi: [1, 2] \rightarrow [1, 4]$. SI HA:
 $t \mapsto t^2$

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx &= \int_1^2 \frac{1}{t^2+\sqrt{t^2}} (t^2)' dt = \int_1^2 \frac{1}{t^2+1} \cdot 2t dt = \\ &= \int_1^2 \frac{2}{t+1} dt = \left[2 \ln(1+t) \right]_1^2 = 2 \ln 3 - 2 \ln 2 = 2 \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

II° MODO

PER CAPIRE MEGLIO CHE STIAMO USANDO (2) ALLA ROVESCIA, CAMBIAMO IL NOME DELLA VARIABILE DI PARTENZA E MANIPOLIAMO LA FUNZIONE INTEGRANDA:

$$\int_1^4 \frac{1}{t+\sqrt{t}} dt = \int_1^4 \frac{1}{(\sqrt{t}+1)\sqrt{t}} dt = \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{t}+1} \cdot \boxed{\frac{1}{2\sqrt{t}}} dt =$$

C'È SCRITTA LA STESSA COSA

PONENDO $\varphi: [1, 4] \rightarrow [2, 3]$
 $t \mapsto \sqrt{t}+1$

E USANDO (2) AL CONTRARIO

$$\begin{aligned} &= \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{t}+1} (\sqrt{t}+1)' dt = \\ &= \int_2^3 \frac{2}{x} dx = \left[2 \ln x \right]_2^3 = 2 \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

ES. 8

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

PRENDO $\varphi: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, 1]$
 $t \mapsto \sin t$

PERCHÉ
COS 30°

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos 2t dt = \\ &= \frac{\pi}{4} + \left[\frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

OSS. 8

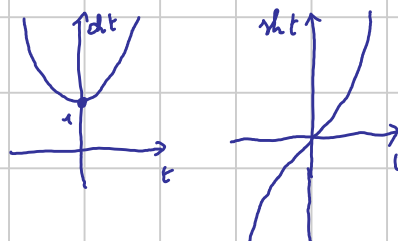
PER LO SVOLGIMENTO DELL'ESEMPIO 9 DOBBIAMO INTRODURRE LE FUNZIONI IPERBOLICHE. DEFINIAMO:

SENO IPERBOLICO

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

COSENO IPERBOLICO

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$



VALGONO LE PROPRIETÀ:

(3)

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$$

(4)

$$(\operatorname{ch} t)' = \operatorname{sh} t$$

(5)

$$(\operatorname{sh} t)' = \operatorname{ch} t$$

$$\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2 - e^{2t} - e^{-2t} + 2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$(\operatorname{ch} t)' = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)' = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \operatorname{sh} t$$

$$(\operatorname{sh} t)' = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)' = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \operatorname{ch} t$$

INOLTRE:

(6)

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sh} t = x_0 \Leftrightarrow t = \ln(x_0 + \sqrt{x_0^2 + 1})$$

(7)

$$\forall x_0 \geq 1 \quad \operatorname{ch} t = x_0 \Leftrightarrow t = \ln(x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - 1})$$

PER MOSTRARE (6) SI OSSERVI CHE:

VA BENE SOLO "+"
PERCHÉ $e^t > 0$

$$\operatorname{sh} t = x_0 \Leftrightarrow \frac{e^t - e^{-t}}{2} = x_0 \Leftrightarrow e^{2t} - 2x_0 e^t - 1 \Leftrightarrow e^t = x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + 1} \Leftrightarrow t = \ln(x_0 + \sqrt{x_0^2 + 1})$$

PER MOSTRARE (7):

VA BENE SIA "+" CHE "-" PERCHÉ, PER $x_0 \geq 1$
IL SECONDO MEMBRO È SEMPRE DEFINITO E POSITIVO

$$\operatorname{ch} t = x_0 \Leftrightarrow \frac{e^t + e^{-t}}{2} = x_0 \Leftrightarrow e^{2t} - 2x_0 e^t + 1 \Leftrightarrow e^t = x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - 1} \Leftrightarrow t = \ln(x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - 1})$$

ES.9

$$\int_{\frac{13}{12}}^{\frac{5}{4}} \sqrt{x^2 - 1} dx = \int_{\ln \frac{3}{2}}^{\ln 2} \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} \cdot \operatorname{sh} t dt = \int_{\ln \frac{3}{2}}^{\ln 2} \sqrt{\operatorname{sh}^2 t} \cdot \operatorname{sh} t dt = \int_{\ln \frac{3}{2}}^{\ln 2} \operatorname{sh}^2 t dt =$$

PERCHÉ $\operatorname{sh} t > 0$ PER $t > 0$

PRENDO $\varphi(t) = \operatorname{ch}(t)$
SCEGLIENDO IL RAMO $t \geq 0$.
DA (4) SEGUE CHE:

$$\operatorname{ch} t = \frac{13}{12} \Leftrightarrow t = \ln \frac{3}{2}$$

$$\operatorname{ch} t = \frac{5}{4} \Leftrightarrow t = \ln 2$$

$$= \int_{\ln \frac{3}{2}}^{\ln 2} \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{4} \int_{\ln \frac{3}{2}}^{\ln 2} (e^{2t} + e^{-2t} - 2) dt =$$

$$= \left[\frac{e^{2t}}{8}\right]_{\ln \frac{3}{2}}^{\ln 2} - \left[\frac{e^{-2t}}{8}\right]_{\ln \frac{3}{2}}^{\ln 2} - \frac{1}{2}(t)_{\ln \frac{3}{2}}^{\ln 2} =$$

$$= \frac{1}{8} \left(4 - \frac{9}{4}\right) - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{9}\right) - \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3} = \dots = \frac{35}{144} - \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$$

ES.10

$$\int_{\frac{5}{12}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_{\ln \frac{3}{2}}^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1}} (\operatorname{sh} t)' dt = \int_{\ln \frac{3}{2}}^{\ln 2} \frac{\operatorname{ch} t}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t}} dt = \int_{\ln \frac{3}{2}}^{\ln 2} 1 dt = \ln \frac{4}{3}$$

PRENDO $\varphi(t) = \operatorname{sh} t$,
DA (6) SEGUE CHE

$$\operatorname{sh} t = \frac{5}{12} \Leftrightarrow t = \ln \frac{3}{2}$$

$$\operatorname{sh} t = \frac{3}{4} \Leftrightarrow t = \ln 2$$

PERCHÉ $\operatorname{ch} t > 0$

Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 5

Titolo nota

18 marzo 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI

DEF.1 DATI DUE POLINOMI $P(x)$ E $Q(x)$, SIA $A = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$, LA FUNZIONE

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

SI DICE FUNZIONE RAZIONALE CON NUMERATORE $P(x)$ E DENOMINATORE $Q(x)$.

INOLTRE DIREMO CHE È UN FRATTO SEMPLICE SE È DI UNA DELLE 2 FORME:

(1) $f(x) = \frac{A}{(ax+b)^n} \quad a, b, A \in \mathbb{R}, a \neq 0$

(2) $f(x) = \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} \quad a, b, c, A, B \in \mathbb{R}, b^2-4ac < 0$

OSS.1 VEDREMO CHE PER INTEGRARE UNA FUNZIONE RAZIONALE CI SI PUÒ SEMPRE RICONDURRE AL CASO DEI FRATTI SEMPLICI. BASTERÀ QUINDI IMPARARE AD INTEGRARE QUELLI. SE SONO DI TIPO (1) IL PROCEDIMENTO È OVVIO. SE SONO DI TIPO (2) VEDIAMO GLI ESEMPI CHE SEGUONO.

ES.1 CALCOLARE $\int_a^b \frac{x}{(x^2+1)^n} dx$.

SI HA:

$$\int_a^b \frac{x}{(x^2+1)^n} dx = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{2x}{(x^2+1)^n} dx = \begin{cases} n=1 & \frac{1}{2} \left[\ln(x^2+1) \right]_a^b \\ n>1 & \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} \right]_a^b \end{cases}$$

ES.2 CALCOLARE $I_n = \int_a^b \frac{1}{(x^2+1)^n} dx$.

$n=1$ $I_1 = \int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\arctan x \right]_a^b$

REGOLA
RICORSIVA

$$I_{n+1} = \int_a^b \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \int_a^b \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \int_a^b \frac{1+x^2}{(1+x^2)^{n+1}} - x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \frac{1}{(1+x^2)^n} dx + \frac{1}{2n} \int_a^b x \cdot (-n) \frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \\
&= I_n + \frac{1}{2n} \int_a^b x \cdot \left(\frac{1}{(1+x^2)^n} \right)' dx = \\
&= I_n + \frac{1}{2n} \cdot \left[x \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n} \right]_a^b - \frac{1}{2n} \int_a^b \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \\
&= I_n + \frac{1}{2n} \cdot \left[\frac{x}{(1+x^2)^n} \right]_a^b - \frac{1}{2n} I_n = \\
&= \frac{2n-1}{2n} \cdot I_n + \frac{1}{2n} \left[\frac{x}{(1+x^2)^n} \right]_a^b
\end{aligned}$$

QUINDI PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ SAPIAMO CALCOLARE I_n CON LA REGOLA:

$$\begin{cases} I_n = [\arctan x]_a^b \\ I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} \cdot I_n + \frac{1}{2n} \left[\frac{x}{(1+x^2)^n} \right]_a^b \end{cases} \quad \text{PER } n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

OSS.2 GRAZIE AGLI ESEMPI 1 E 2 SAPIAMO CALCOLARE INTEGRALI DEL TIPO $\int_a^b \frac{Ax+B}{(1+x^2)^n} dx$.
 PER TRATTARE IL CASO GENERALE (2) OSSERVIAMO L'ESEMPIO 3.

ES.3 $\int_3^5 \frac{3x-11}{(2x^2-12x+26)^2} dx = \int_3^5 \frac{3x-11}{4(x^2-6x+13)^2} dx = \frac{1}{64} \int_3^5 \frac{3x-11}{\left(\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + 1\right)^2} dx =$

(cloud) $x^2 - 6x + 13 =$
 $= x^2 - 6x + 9 + 4 =$
 $= (x-3)^2 + 4 =$
 $= 4\left(\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + 1\right)$

(cloud) $\varphi(t) = 2t+3$
 SU $[0,1]$

$= \frac{1}{64} \int_0^1 \frac{3(2t+3)-11}{(t^2+1)^2} \cdot (2t+3)' dt =$

(cloud) CONE IN ESEMPIO 2

$= \frac{1}{16} \int_0^1 \frac{3t-1}{(t^2+1)^2} dt = \dots =$

OSS.3 IN GENERALE SE $b^2 - 4ac < 0$ SI PUO' SEMPRE PASSARE DA ax^2+bx+c A t^2+1
 NEL MODO SEGUENTE:

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = \\
&= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2} \right) = \frac{4ac-b^2}{4a} \cdot \left(\left(\frac{x + \frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}} \right)^2 + 1 \right)
\end{aligned}$$

A QUESTO PUNTO BASTA SOSTITUIRE IN x CON $\varphi(t) = \sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}} \cdot t - \frac{b}{2a}$.

OSS.4 PASSIAMO ORA AL CASO GENERALE: $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, CON $A(x)$ E $B(x)$ POLINOMI

NON È RIDUTTIVO SUPPORRE CHE $A(x)$ ABBA GRADO MINORE STRETTO DI $B(x)$. INFATTI, SE COSÌ NON FOSSE, BASTA FARE LA DIVISIONE CON RESTO TRA $A(x)$ E $B(x)$:

$$A(x) : B(x) = Q(x) \text{ con resto } R(x)$$

QUINDI:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x) \quad \text{DOVE } \deg(R(x)) < \deg(B(x))$$

PERCÌ:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{B(x) \cdot Q(x) + R(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

CI SIAMO QUINDI COMUNQUE RICONDOTTI AD UNA FUNZIONE RAZIONALE COL DENOMINATORE DI GRADO STRETTAMENTE MAGGIORE DEL NUMERATORE.

PER CAPIRE COME $\frac{R(x)}{B(x)}$ POSSA ESSERE ESPRESSA COME SOMMA DI FRATTI SEMPLICI, ISPIRIAMOCI ALL'ESEMPIO 4.

ES.4

$$\int_0^1 \frac{x^4 + x^3 + x^2 + 5x - 2}{x^3 + x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 4x - 2}{x^3 + x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x}{x^3 + x^2 + x + 1} + \frac{4x - 2}{x^3 + x^2 + x + 1} dx =$$

$$= \int_0^1 x dx + \int_0^1 \frac{4x - 2}{x^3 + x^2 + x + 1} dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{4x - 2}{(x^2 + 1)(x + 1)} dx =$$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^1 \left(\frac{3x + 1}{x^2 + 1} - \frac{3}{x + 1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx - 3 \int_0^1 \frac{1}{x + 1} dx =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \left[\ln(x^2 + 1) \right]_0^1 + \left[\arctan x \right]_0^1 - 3 \left[\ln(x + 1) \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} - 3 \ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \ln 2$$

$$\frac{4x - 2}{(x^2 + 1)(x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x + 1} =$$

$$= \frac{(Ax + B)(x + 1) + C(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x + 1)} =$$

$$= \frac{(A + C)x^2 + (A + B)x + (B + C)}{(x^2 + 1)(x + 1)}$$

PERCHÉ SIA $\bullet$ BISOGNA (E BASTA) CHE:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A + B = 4 \\ B + C = -2 \end{cases} \quad \text{CIOÈ: } \begin{cases} A = 3 \\ B = 1 \\ C = -3 \end{cases}$$

OSS 5

IN GENERALE SE, DOPO AVER SCOMPOSTO IL DENOMINATORE, $f(x)$ È DELLA FORMA:

(3)
$$f(x) = \frac{P(x)}{(x-x_1)^{n_1} \cdots (x-x_j)^{n_j} \cdot (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)^{m_1} + \cdots + (a_k x^2 + b_k x + c_k)^{m_k}}$$

CON $\deg(P(x)) < \deg(\text{DENOMINATORE})$ E CON $b_i^2 - 4a_i c_i < 0$ PER OGNI $i=1, \dots, k$.

ALLORA È SEMPRE POSSIBILE SCRIVERE $f(x)$ COME SOMMA DI FRATTI SEMPLICI NEL MODO SEGUENTE:

(4)
$$f(x) = \frac{A_{1,1}}{x-x_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1,n_1}}{(x-x_1)^{n_1}} +$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{A_{j,1}}{x-x_j} + \frac{A_{j,2}}{(x-x_j)^2} + \cdots + \frac{A_{j,n_j}}{(x-x_j)^{n_j}} +$$

$$+ \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{a_1 x^2 + b_1 x + c_1} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{(a_1 x^2 + b_1 x + c_1)^2} + \cdots + \frac{B_{1,m_1}x + C_{1,m_1}}{(a_1 x^2 + b_1 x + c_1)^{m_1}} +$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{B_{k,1}x + C_{k,1}}{a_k x^2 + b_k x + c_k} + \frac{B_{k,2}x + C_{k,2}}{(a_k x^2 + b_k x + c_k)^2} + \cdots + \frac{B_{k,m_k}x + C_{k,m_k}}{(a_k x^2 + b_k x + c_k)^{m_k}}.$$

PIÙ PRECISAMENTE VALE IL SEGUENTE

TEO. 1 SE $f(x)$ È DELLA FORMA (3) ALLORA C'È UNO E UN SOLO MODO DI FISSARE LE COSTANTI $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ E $C_{i,j}$ IN MODO TALE CHE VALGA (4).

DI QUESTO TEO. DMETTIAMO LA DIMOSTRAZIONE

OSS. 6 CI SONO ALCUNE CLASSI DI FUNZIONI STANDARD CHE SI INTEGRANO RICONDUCENDOLE A FUNZIONI RAZIONALI. LE VEDIAMO NEGLI ESEMPI 5 E 6.

ES. 5
$$\int_0^{\frac{1}{2}\ln 3} \frac{e^{3x}}{e^{4x} + 4e^{2x} + 3} dx = \int_0^{\frac{1}{2}\ln 3} \frac{(e^x)^2}{(e^x)^4 + 4(e^x)^2 + 3} \cdot (e^x)' dx =$$

$y = e^x$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{y^2}{y^4 + 4y^2 + 3} dy = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\frac{1}{2} \cdot 2y^2}{(y^2+3)(y^2+1)} dy = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{3y^2+3 - y^2-3}{(y^2+3)(y^2+1)} dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{3(y^2+1) - (y^2+3)}{(y^2+3)(y^2+1)} dy = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{y^2+3} - \frac{1}{y^2+1} \right) dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} dy - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+y^2} dy = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{1}{u^2 + 1} du - \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+y^2} dy = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} [\arctan u]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 - \frac{1}{2} [\arctan y]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = (\sqrt{3}-1) \frac{\pi}{24}
\end{aligned}$$

Oss. 7 IL TRUCCO DELL'ES. 5 FUNZIONA SEMPRE SE $f(x) = \frac{P(e^x)}{Q(e^x)}$ CON $P(y)$ E $Q(y)$ POLINOMI.

VISTO CHE $\int \frac{P(e^x)}{Q(e^x)} dx = \int \frac{P(e^x)}{Q(e^x) \cdot e^x} \cdot (e^x)' dx = \int \frac{P(y)}{Q(y) \cdot y} dy$

ES. 6 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{4 \cos x + 3 \sin x} dx =$

POSTO $t = \tan \frac{x}{2}$, SAPIAMO CHE $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ E $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

MA PER $x \in (-\pi, \pi)$ $t = \tan \frac{x}{2}$ EQUIVALE A $x = 2 \arctan t$ QUINDI PRENDO PER LA SOSTITUZIONE $\varphi(t) = 2 \arctan t$ SU $[0, 1]$

DECOMporre IN FRATTI SEMPLICI

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{4 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3 \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \\
&= \int_0^1 \frac{2t}{2(1-t^2) + 3t} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \\
&= \int_0^1 \frac{2t}{2+3t-2t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{-2t}{(2t+1)(t-2)(t^2+1)} dt = \dots =
\end{aligned}$$

Oss. 8 IL METODO DELL'ES. 6 FUNZIONA QUANDO $f(x) = \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}$, CON $P(x, y)$

E $Q(x, y)$ POLINOMI. TUTTAVIA SPESSO È MEGLIO USARE DEI TRUCCHI. AD ESEMPIO:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(\cos x)^3} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(\cos x)^3} \cdot (\cos x)' dx = \int_1^{\frac{1}{2}} -\frac{1}{y^3} dy = \left[\frac{1}{2y^2} \right]_1^{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

È PIÙ CORTO DEL METODO STANDARD:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(\cos x)^3} dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^3} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4t(1+t^2)}{(1-t^2)^3} dt =$$

$\varphi(t) = 2 \arctan t$

$\Rightarrow (t^2-1)'$

$\varphi(t) = t^2-1$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2((t^2-1)+2)}{-(t^2-1)^3} \cdot 2t dt = \int_{-1}^{-\frac{2}{3}} -\frac{2(x+2)}{x^3} dx = \int_{-1}^{-\frac{2}{3}} \left(-\frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{2}{x} \right]_{-1}^{-\frac{2}{3}} + \left[\frac{2}{x^2} \right]_{-1}^{-\frac{2}{3}} = (-3+2) + \left(\frac{9}{2} - 2 \right) = \frac{3}{2}$$

17-03-2021 (11-13)
PARTI AGGIUNTE RISPETTO AL 2020

LEZ 7

ECCO GLI ESEMPI FATTI A LEZIONE CHE SONO
ESSENZIALMENTE DIVERSI DA QUELLI DEL 2020.

ES. I

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx &= \int_0^1 \frac{x}{2} \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx = \int_0^1 \frac{x}{2} \cdot \left(-\frac{1}{1+x^2}\right)' dx = \\ &= \left[\frac{x}{2} \cdot \left(-\frac{1}{1+x^2}\right)' \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} [\arctan x]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

ES. II

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^x \cdot \sin x \, dx &= \int_0^\pi (e^x)' \cdot \sin x \, dx = \\ &= [e^x \cdot \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x \, dx = 0 - \int_0^\pi (e^x)' \cos x \, dx = \\ &= -[e^x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \cdot (-\sin x) \, dx = \\ &= e^\pi + 1 - \int_0^\pi e^x \cdot \sin x \, dx\end{aligned}$$

ABBIAMO QUINDI OTTENUTO:

$$I = e^{\pi+1} - I$$

DA CUI SEGUE:

$$I = \frac{e^{\pi+1}}{2}$$

ES. III

(I)

$$\int_0^{\pi} x e^x \sin x \, dx = \int_0^{\pi} (e^x)' \cdot x \sin x \, dx =$$

$$= [e^x \cdot x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cdot (\sin x + x \cos x) \, dx$$

$$= 0 - \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx - \int_0^{\pi} e^x \cdot x \cdot \cos x \, dx =$$

ES II

$$= -\frac{e^{\pi+1}}{2} - \int_0^{\pi} (e^x)' x \cos x \, dx =$$

$$= -\frac{e^{\pi+1}}{2} - [e^x \cdot x \cdot \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \cdot (\cos x - x \sin x) \, dx =$$

$$= -\frac{e^{\pi+1}}{2} + \pi e^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx - \int_0^{\pi} x e^x \sin x \, dx =$$

$$= -\frac{e^{\pi+1}}{2} + \pi e^{\pi} - \frac{e^{\pi+1}}{2} - \int_0^{\pi} x e^x \sin x \, dx$$

$$(\pi-1)e^{\pi}-1$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (e^x)' \cos x \, dx &= [e^x \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx = \\ &= -e^{\pi} - 1 + \frac{e^{\pi+1}}{2} = -\frac{e^{\pi+1}}{2} \end{aligned}$$

(I)

ABBIAMO QUINDI OTTENUTO: $I = (\pi-1)e^{\pi}-1 - I$

DA CUI SEGUE: $I = \left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\right)e^{\pi}-\frac{1}{2}$

Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 6

Titolo nota

20 marzo 2020 (9.00-11.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

OSS.1 DATI $f \in C([a,b])$ E $x_0 \in (a,b)$, DETTA $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$, SAPIAMO (PER IL T.F.C.I.)

CHE $F \in C^1((a,b))$. CI CHIEDIAMO QUALE SIA IL COMPORTAMENTO DI $F(x)$ PER $x \rightarrow a^+$ E $x \rightarrow b^-$.

È UTILE VEDERE PRIMA IL SEGUENTE ESEMPIO:

ES.1 DATA $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ SIA $F(x) = \int_1^x f(t) dt$. DIRE SE ESISTONO E SE SONO FINITI
 $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$

I LIMITI:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$$

COMINCIAMO DA (1).

OSSERVIAMO CHE f È LIPSCITZIANA SU $(0, +\infty)$ PERCHÈ, PER OGNI $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$

SI HA:

$$\begin{aligned} |F(x_2) - F(x_1)| &= \left| \int_1^{x_2} \sin \frac{1}{t} dt - \int_1^{x_1} \sin \frac{1}{t} dt \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} \sin \frac{1}{t} dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_1}^{x_2} \left| \sin \frac{1}{t} \right| dt \right| \leq \left| \int_{x_1}^{x_2} 1 dt \right| = |x_2 - x_1| \end{aligned}$$

MA ALLORA f È UNIFORMEMENTE CONTINUA E QUINDI PUÒ ESSERE ESTESA
(CON CONTINUITÀ AL BORDO DI $(0, +\infty)$, CIOÈ PER $x=0$ (GRAZIE AL TED.1 CHE
VEDIAMO TRA UN ATTIMO)).

CIO' SIGNIFICA CHE $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ ESISTE FINITO.

PASSIAMO A (2).

PER $0 < \alpha \leq 1$ SI HA $\sin \alpha \geq \frac{\alpha}{2}$, QUINDI PER $t \geq 1$ SI HA $\sin \frac{1}{t} \geq \frac{1}{2t}$,

QUINDI:

$$F(x) = \int_1^x \sin \frac{1}{t} dt \geq \int_1^x \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} [\ln t]_1^x = \frac{1}{2} \ln x$$

SICCOME $\frac{1}{2} \ln x \rightarrow +\infty$ PER $x \rightarrow +\infty$, PER IL T. DEL CONFRONTO ANCHE $F(x) \rightarrow +\infty$.

TEO.1 SIANO $A \subset \mathbb{R}$, x_0 DI ACCUMULAZIONE PER A ED $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ UNIF. CONTINUA. ALLORA $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ESISTE FINITO.

DIMO

SE $x_0 \in A$ NON C'È NIENTE DA DIMOSTRARE SE $x_0 \notin A$ PRENDIAMO (x_n) A VALORI IN A TALE CHE $x_n \rightarrow x_0$. MOSTRIAMO CHE $(f(x_n))$ È DI CAUCHY, CIOÈ CHE:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } n, m \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$$

A TALE SCOPO, $\forall \varepsilon > 0$ PRENDIAMO $\delta > 0$ TALE CHE $\bar{x}, \tilde{x} \in A$ E $|\bar{x} - \tilde{x}| < \delta \Rightarrow |f(\bar{x}) - f(\tilde{x})| < \varepsilon$ (POSSIAMO FARLO PERCHÈ f È UNIF. CONTINUA SU A).

A QUESTO PUNTO PRENDIAMO $n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE PER $n \geq n_0$ SI ABBIÀ $|x_n - x_0| < \frac{\delta}{2}$ (POSSIAMO FARLO PERCHÈ $x_n \rightarrow x_0$).

ALLORA PER OGNI $n, m \geq n_0$ SI HA:

$$|x_n - x_m| = |x_n - x_0 + x_0 - x_m| \leq |x_n - x_0| + |x_m - x_0| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

QUINDI SI HA ANCHE:

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$$

MA ALLORA $(f(x_n))$ È DI CAUCHY E QUINDI HA LIMITE FINITO.

QUINDI, SE PRENDO (x_n) A VALORI IN A T.C. $x_n \rightarrow x_0$, SI HA CHE $(f(x_n))$ HA LIMITE FINITO.

RIMANE DA DIMOSTRARE CHE SE PRENDO DUE DISTINTE SUCCESSIONI (x_n) E (y_n) A VALORI IN A , ENTRAMBE CHE TENDANO A x_0 , ALLORA $f(x_n)$ E $f(y_n)$ TENDONO ALLO STESSO LIMITE.

MA QUESTO È OVVIO, PERCHÈ DETTA (t_n) LA SUCCESSIONE DEFINITA DA:

$$t_n = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{SE } n \text{ È DISPARI} \\ y_{\frac{n}{2}} & \text{SE } n \text{ È PARI} \end{cases}$$

SI HA CHE $t_n \rightarrow x_0$ E QUINDI $(f(t_n))$ HA LIMITE FINITO, DUNQUE $(f(x_n))$ E $(f(y_n))$ HANNO LO STESSO LIMITE PERCHÈ ENTRAMBE SOTTOSUCCESSIONI DI $(f(t_n))$. QUINDI ESISTE $l \in \mathbb{R}$ TALE CHE $((x_n) \subset A \text{ E } x_n \rightarrow x_0) \Rightarrow f(x_n) \rightarrow l$.

SAPPIAMO CHE QUESTO EQUIVALE AD DIRE CHE $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Oss. 2

PROCEDENDO IN MODO ANALOGO AL PUNTO (1) DELL'ESEMPIO 1, SI DIMOSTRA CHE SE (a, b) , x_0 , f ED F SONO COME NELL'OSSERVAZIONE 1, ED INOLTRE (a, b) ED f SONO LIMITATI, ALLORA ESISTONO FINITI $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ E $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$.

OSS. 3

CONSIDERIAMO FUNZIONI INTEGRALI DI TIPO PIÙ GENERALE.

DATI $f \in C([a, b])$ E $g, h: (a, b) \rightarrow (a, b)$ DI CLASSE C^1 , PER OGNI $x \in (a, b)$ È BEN DEFINITA:

$$G(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$$

INOLTRE $G \in C^1((a, b))$ E SI HA:

$$G'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$$

DIMOPRESO $y_0 \in (a, b)$, DEFINIAMO:

$$F(y) = \int_{y_0}^y f(t) dt.$$

OVVIAMENTE $F \in C^1((a, b))$ ED $F' = f$.

SI HA:

$$G(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt = \int_{y_0}^{h(x)} f(t) dt - \int_{y_0}^{g(x)} f(t) dt = F(h(x)) - F(g(x))$$

QUINDI G È COMPOSIZIONE DI FUNZIONI C^1 E SI HA

$$G'(x) = F'(h(x)) \cdot h'(x) - F'(g(x))g'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$$

ES. 2

TROVARE INF E SUP, AL VARIARE DI $x > 0$, DI $G(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$.

PER OGNI $x > 0$, $G(x)$ RAPPRESENTA L'AREA

VERDE IN FIGURA. AL CRESCERE DI x ,

L'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE $[\sqrt{x}, \sqrt{x+1}]$

SI RESTRINGE, MA IL GRAFICO DI f SUDI

ESSO SI ALZA, PER CUI NON È OVVIO

STABILIRE SE $G(x)$ CRESCA O DECRESCA.

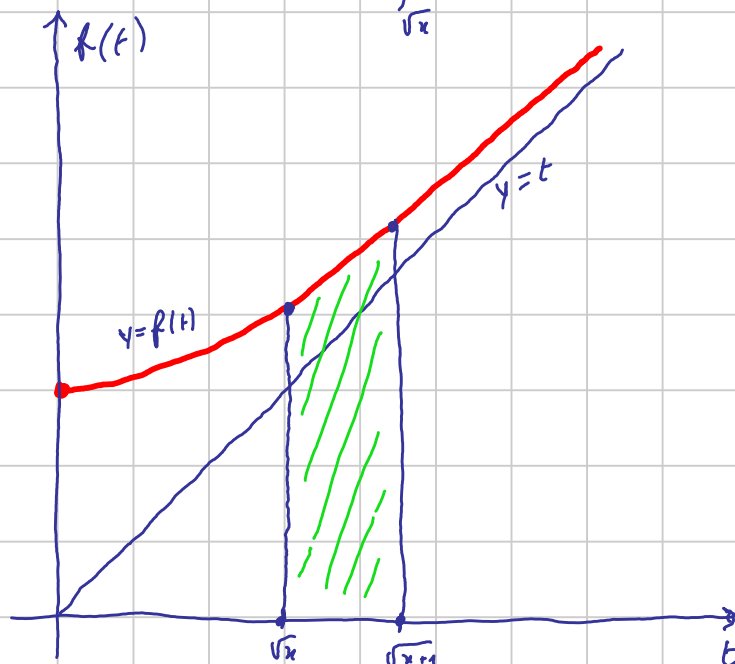
TUTTAVIA, USANDO L'OSS. 2, PER

OGNI $x > 0$ SI HA:

$$G'(x) = \sqrt{1+(\sqrt{x+1})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x+1}} - \sqrt{1+\frac{1}{x}} \right) < 0$$

QUINDI $G(x)$ È DECRESCENTE. CIÒ SIGNIFICA CHE $\sup G(x) = \max G(x) = G(0) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \dots$



MENTRE $\inf G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$.

PER CALCOLARE IL LIMITE CONVIENE RISCRIVERE MEGLIO $G(x)$:

$$G(x) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} \left(t + (\sqrt{1+t^2} - t) \right) dt = \underbrace{\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} t dt}_{(1)} + \underbrace{\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} (\sqrt{1+t^2} - t) dt}_{(2)}$$

$$(1) = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$$

$$(2) = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2} + t} dt$$

PERCHÉ LA FUNZIONE
INTEGRANDA È DECRESCENTE

MOSTRIAMO CHE $(2) \rightarrow 0$ PER $x \rightarrow +\infty$.

SI HA:

$$0 \leq \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2} + t} dt \leq \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} dt = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \cdot \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} 1 dt = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2}$$

QUINDI $(2) \rightarrow 0$ PERCHÉ $\frac{1}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2} \rightarrow 0$.

POSSIAMO QUINDI CONCLUDERE CHE $G(x) \rightarrow \frac{1}{2}$ PER $x \rightarrow +\infty$.

QUINDI $\inf(G(x)) = \frac{1}{2}$.
