

Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 6

Titolo nota

20 marzo 2020 (9.00-11.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

[...]

PUÒ ESSERE
ANCHE $b = +\infty$

INTEGRALE IN SENSO IMPROPRIO

DEF. 1 DATI $[a, b) \subset \mathbb{R}$ E $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ T.C. $f \in \mathcal{R}([a, c])$ PER OGNI $c \in [a, b)$, DIREMO CHE:

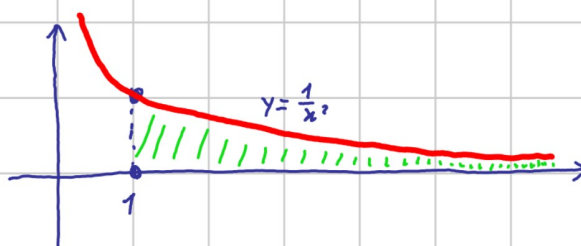
1) $\int_a^b f(x) dx$ CONVERGE A $\lambda \in \mathbb{R}$ SE $\lim_{c \rightarrow b^+} \int_a^c f(x) dx = \lambda$.

2) $\int_a^b f(x) dx$ DIVERGE A $+\infty$ SE $\lim_{c \rightarrow b^+} \int_a^c f(x) dx = +\infty$

3) $\int_a^b f(x) dx$ È INDETERMINATO SE $\lim_{c \rightarrow b^+} \int_a^c f(x) dx$ NON ESISTE

ES. 3 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ CONVERGE A 1

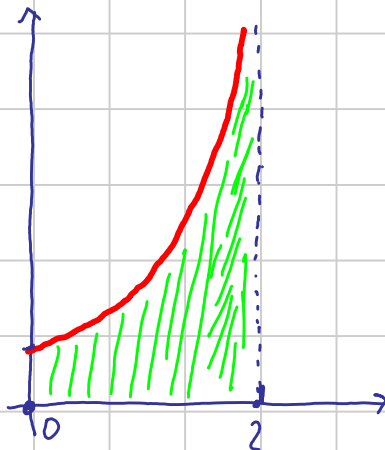
$$\begin{aligned} \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_1^C \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{C \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^C = \\ &= \lim_{C \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{C} + 1 \right) = 1 \end{aligned}$$



ES. 4

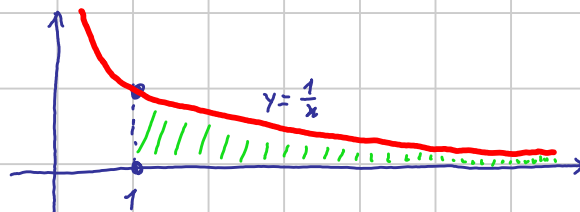
$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx \text{ CONVERGE A } 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow 2^-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx &= \lim_{c \rightarrow 2^-} \left[-2\sqrt{2-x} \right]_0^c = \\ &= \lim_{c \rightarrow 2^-} \left(-2\sqrt{2-c} + 2\sqrt{2} \right) = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

**ES. 5**

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx \text{ DIVERGE A } +\infty$$

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} [\ln x]_1^c = \lim_{c \rightarrow +\infty} \ln(c) = +\infty$$

**ES. 6**

$$\int_0^{+\infty} \sin x dx \text{ È INDETERMINATO.}$$

SIA $F(x) = \int_0^x \sin t dt$ E SIANO (a_n) E (b_n) DUE SUCCESSIONI DEFINITE DA $a_n = 2\pi n$ E $b_n = \pi + 2\pi n$

ALLORA PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ SI HA:

$$F(a_n) = \int_0^{2\pi n} \sin t dt = [-\cos t]_0^{2\pi n} = -\cos 2\pi n + \cos 0 = -1 + 1 = 0$$

$$F(b_n) = \int_0^{\pi + 2\pi n} \sin t dt = [-\cos t]_0^{\pi + 2\pi n} = -\cos(\pi + 2\pi n) + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2$$

QUINDI PER $n \rightarrow +\infty$, SI HA $a_n \rightarrow +\infty$ E $b_n \rightarrow +\infty$ MA $F(a_n) \rightarrow 0$ E $F(b_n) \rightarrow 2$.

QUINDI $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ NON ESISTE ALTRIMENTI $F(a_n)$ E $F(b_n)$ DOVREBBERO AVERE LO STESSO LIMITE.

QUINDI $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ È INDETERMINATO.

Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 7

Titolo nota

23 marzo 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

INTEGRALI IMPROPRI (...CONTINUA)

OSS.1 (CON RIFERIMENTO ALLA **DEF.1** DELLA LEZ. PRECEDENTE)

IL "CARATTERE" DI UN INTEGRALE IMPROPRIO NON CAMBIA SPOSTANDO L'ESTREMO "BUONO".
PIÙ PRECISAMENTE, SIA $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ T.C. $\forall c \in [a, b)$ $f \in \mathcal{R}([a, c])$ ALLORA,
COMUNQUE SI PRENDA $a' \in [a, b)$, SI HA:

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^{a'} f(x) dx + \int_{a'}^c f(x) dx = \int_a^{a'} f(x) dx + \lim_{c \rightarrow b^-} \int_{a'}^c f(x) dx$$

QUINDI:

$\square$ ESISTE FINITA $\Leftrightarrow$ $\square$ ESISTE FINITO

$= +\infty (-\infty) \Leftrightarrow = +\infty (-\infty)$

NON ESISTE $\Leftrightarrow$ NON ESISTE

CIÒ SIGNIFICA CHE IL CARATTERE DI $\int_a^b f(x) dx$ E DI $\int_{a'}^b f(x) dx$ È LO STESSO.

QUESTO FATTO È UTILE PERCHÉ SPESSO, PER STUDIARE LA CONVERGENZA DI UN INTEGRALE, CI CAPITA DI DOVER FARE CALCOLI E STIME CHE NON VALGONO SU TUTTO $[a, b)$ MA SOLO SU UN SOTTOINSIEME $[a', b)$. IL FATTO CHE IL CARATTERE DI $\int_a^b f(x) dx$ E $\int_{a'}^b f(x) dx$ SIA LO STESSO CI PERMETTE DI CONCLUDERE UGUALMENTE STUDIANDO IL SECONDO AL POSTO DEL PRIMO. LA COSA È CHIARITA NELL'ESEMPIO SUCCESSIVO.

ES.1 STUDIARE IL CARATTERE DI $\int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x} dx$.

PER GLI $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ VALE LA DISUGUAGLIANZA $\sin \alpha > \frac{\alpha}{2}$ E CI PIACEREBBE USARLA PER STIMARE DAL BASSO LA FUNZIONE INTEGRANDA SCRIVENDO:

(1) $\sin \frac{1}{x} > \frac{1}{2x}$.

FATTO CIÒ, $\int \frac{1}{2x} dx$ SI CALCOLA BENE.

IL PROBLEMA È CHE LA STIMA (1) CE L'ABBIAMO SOLO PER $x > \frac{2}{\pi}$, NON PER $x > \frac{1}{100}$.

PER FORTUNA, GRAZIE ALL' [OSS.1], INZICHÉ STUDIARE IL CARATTERE DI $\int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x} dx$, POSSIAMO STUDIARE IL CARATTERE DI $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \sin \frac{1}{x} dx$, CHE SONO UGUALI.

SI HA:

VALE PERCHÉ $x > \frac{2}{\pi}$

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \sin \frac{1}{x} dx = \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_{\frac{2}{\pi}}^C \sin \frac{1}{x} dx \geq \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_{\frac{2}{\pi}}^C \frac{1}{2x} dx = \lim_{C \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln x \right]_{\frac{2}{\pi}}^C = \lim_{C \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln C - \frac{1}{2} \ln \frac{2}{\pi} = +\infty$$

DA CUI SEGUE CHE $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \sin \frac{1}{x} dx$ DIVERGE A $+\infty$.

OSS.2 FATTI I DOVUTI CAMBIAMENTI, LA DEFINIZIONE DI INTEGRALE IMPROPRIO GIÀ DATA NEL CASO $[a, b)$ PUÒ ESSERE RISCritta PER $(a, b]$. FATTO CIÒ SIAMO PRONTI A DARE LA DEFINIZIONE NEL CASO (a, b) .

DEF.1 DATA $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ T.C. $\forall [c, d] \subset (a, b)$ SIA $f \in \mathcal{R}([c, d])$, DIREMO CHE:

1) $\int_a^b f(x) dx$ CONVERGE A $\lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists x_0 \in (a, b)$ T.C. $\int_a^{x_0} f(x) dx$ E $\int_{x_0}^b f(x) dx$ CONVERGONO RISPETTIVAMENTE A μ E ν , CON $\mu + \nu = \lambda$.

2) $\int_a^b f(x) dx$ DIVERGE A $+\infty$ ^(-∞) $\Leftrightarrow \exists x_0 \in (a, b)$ T.C. $\int_a^{x_0} f(x) dx$ E $\int_{x_0}^b f(x) dx$ DIVERGONO ENTRAMBI A $+\infty$ ^(-∞) OPPURE UNO DIVERGE A $+\infty$ ^(-∞) E L'ALTRO CONVERGE.

3) $\int_a^b f(x) dx$ È INDETERMINATO IN OGNI ALTRO CASO.

OSS.3 C'È UN PROBLEMA DI BUONA POSITURA NELLA DEFINIZIONE 1: SI POTREBBE SUSPETTARE CHE LA SCELTA DI x_0 INFLUISCA SU CIÒ CHE PUÒ SUCCEDERE. PER FORTUNA NON È COSÌ. AD ESEMPIO SE $\int_a^b f(x) dx$ SODDISFA IL PUNTO 1) CON UN CERTO x_0 , PRENDENDO UN ALTRO $x_1 \in (a, b)$ CON $x_1 \neq x_0$ SI HA CHE:

• $\int_a^{x_1} f(x) dx$ HA STESSO CARATTERE DI $\int_a^{x_0} f(x) dx$ (PER OSS.1) QUINDI CONVERGE

• $\int_{x_1}^b f(x) dx$ CONVERGE COME $\int_{x_0}^b f(x) dx$ (STESSO MOTIVO)

$$\bullet \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^b f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx$$

PERCHÉ:

$$\int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^{x_1} f(x) dx + \lim_{s \rightarrow b^-} \int_{x_1}^s f(x) dx =$$

$$= \lim_{c \rightarrow a^+} \left(\int_c^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \right) + \lim_{s \rightarrow b^-} \int_{x_1}^s f(x) dx =$$

SI PUÒ PERCHÉ
È UNA COSTANTE

$$= \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^{x_0} f(x) dx + \lim_{s \rightarrow b^-} \left(\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^s f(x) dx \right) =$$

$$= \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^{x_0} f(x) dx + \lim_{s \rightarrow b^-} \int_{x_0}^s f(x) dx =$$

$$= \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx$$

LA VERIFICA CHE ANCHE IL PUNTO 2) NON DIPENDE DALLA SCELTA DI x_0 È DEL TUTTO ANALOGA.

ES. 2

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}} dx \text{ CONVERGE A } \pi.$$

SI HA:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}} dx = \overbrace{\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}} dx}^{(A)} + \overbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}} dx}^{(B)}$$

$$\begin{aligned} (A) &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{2}{x+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[2 \arctan \sqrt{x} \right]_c^1 \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} - 2 \arctan \sqrt{c} \right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$(B) = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}} dx = \dots = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(2 \arctan \sqrt{c} - 2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

QUINDI L'INTEGRALE CONVERGE A π

OSS. 4

A VOLTE SI POTREBBE ESSERE TENTATI DI NON SPEZZARE L'INTEGRALE SU (a, b) IN DUE INTEGRALI, AD ESEMPIO SCRIVERE $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ CON UN SOLO LIMITE $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^c f(x) dx$.

QUESTO È **SBAGLIATO**, COME MOSTRA L'ESEMPIO SEGUENTE

ES. 3

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx \text{ È INDETERMINATO.}$$

INFATTI:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \overbrace{\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2} dx}^{(A)} + \overbrace{\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx}^{(B)}$$

$$(A) = \lim_{C \rightarrow -\infty} \int_C^0 \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} dx = \lim_{C \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_C^0 = \lim_{C \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} \ln(1) - \frac{1}{2} \ln(1+C^2) \right) = -\infty$$

$$(B) = \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_0^C \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} dx = \dots = +\infty$$

SICCOME I 2 PEZZI (A) E (B) DIVERGONO A INFINITI CON SEGNO DIVERSO,
NON RICADIAMO NEL PUNTO 2) DELLA DEF. 1 MA NEL PUNTO 3).
QUINDI L'INTEGRALE DIVERGE.

SE TUTTAVIA NON SI FOSSE SPEZZATO L'INTEGRALE, SI SAREBBE OTTENUTO:

$$\lim_{C \rightarrow +\infty} \int_{-C}^C \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{C \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{-C}^C = \lim_{C \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \ln(1+C^2) - \frac{1}{2} \ln(1+C^2) \right) = 0$$

COSA CHE, **SBAGLIANDO**, SI RISCHIAVA DI INTERPRETARE COME CONVERGENZA.

TRA L'ALTRO SI OSSERVI CHE MANDANDO I 2 ESTREMI A $+\infty$ E $-\infty$ CON VELOCITA'
DIVERSE SI PUO' OTTENERE QUALSIASI RISULTATO.

AD ESEMPIO:

$$\lim_{C \rightarrow +\infty} \int_{-C}^{2C} \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{C \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{-C}^{2C} = \lim_{C \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+4C^2}{1+C^2} \right) = \frac{1}{2} \ln 4 = \ln 2$$

$$\lim_{C \rightarrow +\infty} \int_{-e^C}^C \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{C \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{-e^C}^C = \lim_{C \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+C^2}{1+e^{2C}} \right) = -\infty$$

STUDIO DELLA CONVERGENZA

OSS. 5

QUANDO L'INTEGRANDA HA SEGNO COSTANTE L'INTEGRALE IMPROPRIO
NON E' MAI INDETERMINATO. QUESTO PERCHE' LA FUNZIONE INTEGRALE RISULTA MONOTONA
E QUINDI IL LIMITE (FINITO O INFINITO) ESISTE SEMPRE.

AD ESEMPIO, SE $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ E' IN $\mathcal{R}([a, c]) \forall c \in [a, b)$ ED E' POSITIVA, ALLORA

$\int_a^c f(t) dt$ E' UNA FUNZIONE CRESCENTE NEL SECONDO ESTREMO c , VISTO CHE,

$$\text{SE } c_1 < c_2 \text{ SI HA } \int_a^{c_2} f(t) dt - \int_a^{c_1} f(t) dt = \int_{c_1}^{c_2} f(t) dt \geq 0.$$

DI CONSEGUENZA IL $\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$ ESISTE SEMPRE, FINITO O INFINITO.

QUINDI $\int_a^b f(x) dx$ PUÒ ESSERE CONVERGENTE O DIVERGENTE A $+\infty$, MA MAI INDETERMINATO.

PER QUESTO MOTIVO VEDREMO CHE CI SONO MOLTI CRITERI DI CONVERGENZA PER IL CASO IN CUI L'INTEGRANDA HA SEGNO COSTANTE, MA POCCHI PER QUANDO IL SEGNO È QUALSIASI.

TEO. 1 (CRITERIO DEL CONFRONTO)

DATE $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ T.C. $\forall c \in [a, b)$ $f, g \in \mathcal{R}([a, c])$ E $\forall x \in [a, b)$ $0 \leq g(x) \leq f(x)$.

ALLORA SI HA:

$$1) \int_a^b f(x) dx \text{ CONVERGE} \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \text{ CONVERGE}$$

$$2) \int_a^b g(x) dx \text{ DIVERGE} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ DIVERGE}$$

DIMO

ESSENDO f E g FUNZIONI POSITIVE PER CIASCUN INTEGRALE CI SONO SOLO DUE

POSSIBILITÀ: CONVERGERE O DIVERGERE. CIÒ SIGNIFICA CHE IL PUNTO 2) SEGUE SUBITO DAL PUNTO 1). BASTA QUINDI DIMOSTRARE IL PUNTO 1).

DOBBIAMO QUINDI DIMOSTRARE CHE ESISTE FINITO IL LIMITE

(2)

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c g(x) dx$$

L'ESISTENZA SEGUE DAL FATTO CHE, ESSENDO $g \geq 0$, $\int_a^c g(x) dx$ È CRESCENTE IN c .

PER MOSTRARE CHE È FINITO SI OSSERVI CHE, ESSENDO $0 \leq g \leq f$, PER OGNI $c \in [a, b)$ SI HA:

$$0 \leq \int_a^c g(x) dx \leq \int_a^c f(x) dx$$

QUINDI:

$$0 \leq \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c g(x) dx \leq \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx < +\infty$$

PERCHÉ PER IPOTESI $\int_a^b f(x) dx$ CONVERGE

QUINDI (2) È FINITO, CIÒ È $\int_a^b g(x) dx$ CONVERGE.

099.6

LE IPOTESI SI POSSONO INDEBOLIRE: LA CONDIZIONE $0 \leq g(x) \leq f(x)$ NON C'È BISOGNO CHE VALGA SU TUTTO $[a, b)$ MA BASTA CHE ESISTA $x_0 \in [a, b)$ TALE CHE LA CONDIZIONE VALGA SU $[x_0, b)$. INFATTI, VISTO CHE IL CARATTERE DI $\int_a^b f(x) dx$ È

UGUALE A QUELLO DI $\int_{x_0}^b f(x) dx$, BASTA RESTRINGERSI A $[x_0, b)$ E RAGIONARE COME PRIMA

OSS. 1 OVVIAMENTE IL TEO. 1 SI PUÒ RISCRIVERE ANCHE PER LE FUNZIONI NEGATIVE:
BASTA SOSTITUIRE $0 \leq g(x) \leq f(x)$ CON $f(x) \leq g(x) \leq 0$.

TEO. 2 (CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO)

DATE $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ TALI CHE $\forall c \in [a, b)$ $f, g \in \mathcal{R}([a, c])$ ED $f, g > 0$ SU $[a, b)$.
SE INOLTRE $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = C \in (0, +\infty)$ ALLORA $\int_a^b f(x) dx$ E $\int_a^b g(x) dx$ HANNO LO STESSO CARATTERE.

DIMO SICCOME $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow C$ PER $x \rightarrow b^-$, ALLORA $\exists x_0 \in [a, b)$ TALE CHE:

$$\frac{1}{2}C < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}C \quad \text{PER } x \in [x_0, b)$$

POICHÉ $g(x) > 0$, QUESTO EQUIVALE A:

$$(3) \quad \frac{1}{2}C \cdot g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}C \cdot g(x) \quad \text{PER } x \in [x_0, b)$$

QUINDI, APPLICANDO IL TEO. 1 SULL'INTERVALLO $[x_0, b)$, POSSO DIRE CHE:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^b f(x) dx \text{ CONVERGE} &\Rightarrow \int_{x_0}^b \frac{1}{2}C \cdot g(x) dx \text{ CONVERGE} \Rightarrow \int_{x_0}^b g(x) dx \text{ CONVERGE} \\ \int_{x_0}^b f(x) dx \text{ DIVERGE} &\Rightarrow \int_{x_0}^b \frac{3}{2}C \cdot g(x) dx \text{ DIVERGE} \Rightarrow \int_{x_0}^b g(x) dx \text{ DIVERGE} \end{aligned}$$

QUINDI $\int_{x_0}^b f(x) dx$ E $\int_{x_0}^b g(x) dx$ HANNO SEMPRE LO STESSO CARATTERE.

MA ALLORA ANCHE $\int_a^b f(x) dx$ E $\int_a^b g(x) dx$ HANNO LO STESSO CARATTERE.

OSS. 2 I DUE CRITERI APPENA VISTI PERMETTONO DI STUDIARE IL CARATTERE DI $\int_a^b g(x) dx$ CONFRONTANDO CON $\int_a^b f(x) dx$, IL CUI CARATTERE DEVE ESSERCI GIÀ NOTO.

PER UTILIZZARLI BENE CI SERVONO QUINDI DEGLI INTEGRALI IMPROPRI "NOTEVOLI" GIÀ NOTI, CON CUI CONFRONTARE GLI ALTRI.

NEGLI ESEMPI CHE SEGUONO NE PREPARIAMO ALCUNI.

ES. 4 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ CONVERGE PER $\alpha > 1$ E DIVERGE PER $\alpha \leq 1$.

INFATTI PER $\alpha = 1$ SI HA:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{1}{x} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} [\ln x]_1^c = \lim_{c \rightarrow +\infty} \ln c = +\infty.$$

MENTRE PER $\alpha \neq 1$ SI HA:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_1^C \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{C \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_1^C = \lim_{C \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{C^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1} = \begin{cases} \alpha > 1 & = \frac{1}{\alpha-1} \\ \alpha \leq 1 & = +\infty \end{cases}$$

ES.5

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} dx$$

SI HA: ① SE $\alpha > 1$ CONVERGE $\forall \beta \in \mathbb{R}$

② SE $\alpha < 1$ DIVERGE $\forall \beta \in \mathbb{R}$

③ SE $\alpha = 1$ CONVERGE SE $\beta > 1$ E DIVERGE SE $\beta \leq 1$

[...CONTINUA PROSSIMA LEZIONE...]

Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 8

Titolo nota

25 marzo 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

INT. IMPROPRI - STUDIO CONVERGENZA (... CONTINUA...)

ES. 1

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} dx$$

SI HA: ① SE $\alpha > 1$ CONVERGE $\forall \beta \in \mathbb{R}$
② SE $\alpha < 1$ DIVERGE $\forall \beta \in \mathbb{R}$
③ SE $\alpha = 1$ CONVERGE SE $\beta > 1$ E DIVERGE SE $\beta \leq 1$

COMINCIAMO DA ③. SI HA:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^\beta x} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_2^c \frac{1}{(\ln x)^\beta} \cdot (\ln x)' dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{\ln 2}^{\ln c} \frac{1}{y^\beta} dy = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{y^\beta} dy$$

MA L'ULTIMO INTEGRALE È NOTO (ES. 4): SAPPIAMO CHE CONVERGE SE $\beta > 1$ E DIVERGE SE $\beta \leq 1$.

PASSIAMO A ①

SE $\alpha > 1$ POSSO SEMPRE SCRIVERE $\alpha = 1 + \delta$ CON $\delta > 0$. QUINDI:

$$\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = \frac{1}{x^{1+\delta}} \cdot \frac{1}{x^\delta \ln^\beta x} \leq \frac{1}{x^{1+\delta}} \quad \text{SU } [x_0, +\infty) \text{ PER UN OPPORTUNO } x_0 \geq ?$$

LA STIMA VALE NON SU TUTTO $[2, +\infty)$
MA SU $[x_0, +\infty)$ PER UN OPPORTUNO x_0 .
QUESTO GRAZIE AL FATTO CHE, ESSENDO $\delta > 0$,
 $\forall \beta \in \mathbb{R}$ SI HA CHE $x^\delta \ln^\beta x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ E QUINDI
 $x^\delta \ln^\beta x > 1$ DA UN CERTO x_0 IN POI

A QUESTO PUNTO, SICCOME SAPPIAMO GIÀ CHE:

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\delta}} dx \text{ CONVERGE}$$

APPLICANDO IL CRITERIO DEL CONFRONTO SI OTTIENE CHE ANCHE

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} dx \text{ CONVERGE PER OGNI } \beta \in \mathbb{R}$$

QUINDI LO STESSO ACCADE PER:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} dx$$

PASSIAMO A (2)

SE $\alpha < 1$ POSSO SEMPRE SCRIVERE $\alpha = 1 - 2\delta$ CON $\delta > 0$. QUINDI:

$$\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} = \frac{1}{x^{1-\delta}} \cdot \frac{x^\delta}{\ln^\beta x} \geq \frac{1}{x^{1-\delta}} \quad \text{SU } [x_0, +\infty) \text{ PER UN OPPORTUNO } x_0 \geq 2$$

LA STIMA VALE NON SU TUTTO $[2, +\infty)$ MA SU $[x_0, +\infty)$ PER UN OPPORTUNO x_0 . QUESTO GRAZIE AL FATTO CHE, ESSENDO $\delta > 0$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$ SI HA CHE $\frac{x^\delta}{\ln^\beta x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ E QUINDI $\frac{x^\delta}{\ln^\beta x} > 1$ DA UN CERTO x_0 IN POI

A QUESTO PUNTO, SICCOME SAPPIAMO GIÀ CHE:

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^{1-\delta}} dx \text{ DIVERGE}$$

APPLICANDO IL CRITERIO DEL CONFRONTO SI OTTIENE CHE ANCHE

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} dx \text{ DIVERGE PER OGNI } \beta \in \mathbb{R}$$

QUINDI LO STESSO ACCADE PER:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta x} dx$$

ES. 2

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

① DIVERGE PER $\alpha \geq 1$

② CONVERGE A $\frac{1}{1-\alpha}$ PER $\alpha < 1$

PER VERIFICARLO SI PROCEDE IN MODO ANALOGO ALL'ES. 4 DELLA LEZ. 7.

ES. 3

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta} dx$$

SI HA: ① SE $\alpha < 1$ CONVERGE $\forall \beta \in \mathbb{R}$

② SE $\alpha > 1$ DIVERGE $\forall \beta \in \mathbb{R}$

③ SE $\alpha = 1$ CONVERGE SE $\beta > 1$ E DIVERGE SE $\beta \leq 1$

I PUNTI ① E ② SI DIMOSTRANO IN MODO ANALOGO ALL'ES. 1, UTILIZZANDO "UN PO'" DELL'ESPONENTE DI x PER "AMMAZZARE" IL TERMINE $|\ln x|^\beta$.

PASSIAMO A ③. SI HA:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x |\ln x|^\beta} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(-\ln x)^\beta} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) dx \stackrel{\varphi(x) = -\ln x}{=} \lim_{c \rightarrow 0^+} - \int_{-\ln c}^{-\ln \frac{1}{2}} \frac{1}{y^\beta} dy = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_{\ln 2}^{\ln \frac{1}{c}} \frac{1}{y^\beta} dy = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{y^\beta} dy$$

MA SAPPIAMO GIÀ CHE L'ULTIMO INTEGRALE CONVERGE SE E SOLO SE $\beta > 1$.

ES. 9DIRE PER QUALI $\alpha > 0$ CONVERGE

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x+2-\sqrt{4+2x}}{(x(x+2))^\alpha} dx$$

SVOLGIMENTO

VISTO CHE, PER CERTI VALORI DI $\alpha > 0$, L'INTEGRANDA POTREBBE ESSERE NON LIMITATA PER $x \rightarrow 0^+$, SIAMO OBBLIGATI A STUDIARE SEPARATAMENTE I DUE INTEGRALI IMPROPRI:

$$① = \int_0^1 \frac{2x+2-\sqrt{4+2x}}{(x(x+2))^\alpha} dx$$

$$② = \int_1^{+\infty} \frac{2x+2-\sqrt{4+2x}}{(x(x+2))^\alpha} dx$$

OSSERVIAMO CHE LA FUNZIONE INTEGRANDA È POSITIVA PERCHÉ:

$$2x+2 = 2(x+1) \overset{\text{PERCHÉ } x+1 > 1}{>} 2\sqrt{x+1} = \sqrt{4+4x} \overset{\text{PERCHÉ } x > 0}{>} \sqrt{4+2x}$$

QUESTO CI PERMETTERÀ, ALL'OCCORRENZA, DI USARE IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO.

PER STUDIARE ① OSSERVIAMO CHE, PER $x \rightarrow 0^+$ SI HA:

$$2x+2-\sqrt{4+2x} = 2\left(x+1-\sqrt{1+\frac{x}{2}}\right) = 2\left(x+1-1-\frac{1}{4}x+o(x)\right) \approx \frac{3}{2}x$$

QUINDI:

$$\frac{2x+2-\sqrt{4+2x}}{(x(x+2))^\alpha} \approx \frac{\frac{3}{2}x}{x^\alpha \cdot 2^\alpha} = \frac{3}{2^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

MA SAPPIAMO CHE:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx \text{ CONVERGE SE E SOLO SE } \alpha < 2,$$

QUINDI, PER IL CRIT. DEL CONFRONTO ASINTOTICO, ANCHE ① CONVERGE SE E SOLO SE $\alpha < 2$

PER STUDIARE ② OSSERVIAMO CHE, PER $x \rightarrow +\infty$, SI HA:

$$\frac{2x+2-\sqrt{4+2x}}{(x(x+2))^\alpha} \approx \frac{2x}{x^{2\alpha}} = 2 \cdot \frac{1}{x^{2\alpha-1}}$$

E SAPPIAMO CHE:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2\alpha-1}} dx \text{ CONVERGE } \Leftrightarrow 2\alpha-1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 1$$

QUINDI, PER IL CRITERIO DEL CONF. ASINTOTICO, ANCHE ② CONVERGE SE E SOLO SE $\alpha > 1$.

QUINDI L'INTEGRALE ASSEGNATO CONVERGE SE E SOLO SE $1 < \alpha < 2$.

OSS.1 SE $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ SONO INTEGRABILI IN SENSO IMPROPRIO SU $[a, b)$ ALLORA ANCHE OGNI LORO COMBINAZIONE LINEARE LO È. INFATTI, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ SI HA:

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx + \beta \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

QUINDI:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

DEF.1 DATA $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, CON $f \in \mathcal{R}([a, c])$ PER OGNI $c \in [a, b)$, DIREMO CHE f È ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE SU $[a, b)$ SE $\int_a^b |f(x)| dx$ CONVERGE.

OSS.2 SE $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ SONO ASSOLUTAMENTE INTEGRABILI ALLORA OGNI LORO COMBINAZIONE LINEARE È ANCORA ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE.

INFATTI $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [a, b)$ SI HA:

$$|\alpha f(x) + \beta g(x)| \leq |\alpha| \cdot |f(x)| + |\beta| \cdot |g(x)|$$

QUINDI, GRAZIE AL CRITERIO DEL CONFRONTO, PER MOSTRARE CHE:

$$\int_a^b |\alpha f(x) + \beta g(x)| dx \text{ CONVERGE}$$

BASTA MOSTRARE CHE CONVERGE:

$$\int_a^b (|\alpha| \cdot |f(x)| + |\beta| \cdot |g(x)|) dx$$

MA QUESTO SEGUE SUBITO DALL'OSS.1 EDAL FATTO CHE f E g SONO ASSOLUTAMENTE INTEGRABILI.

TEO.1 (CRITERIO DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA)

SE $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ È ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE ALLORA $\int_a^b f(x) dx$ CONVERGE.

DIMO

SAPPIAMO PER IPOTESI CHE $\int_a^b |f(x)| dx$ CONVERGE.

POICHE' $\forall x \in [a, b)$ SI HA:

$$0 \leq f^+(x) \leq |f(x)| \quad \text{E} \quad 0 \leq f^-(x) \leq |f(x)|$$

DAL CRITERIO DEL CONFRONTO SEGUE CHE ANCHE $\int_a^b f^+(x) dx$ E $\int_a^b f^-(x) dx$ CONVERGONO.

QUINDI, GRAZIE ALL'OSS.1, ANCHE $\int_a^b f(x) dx$ CONVERGE PERCHE' $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$.

095.3

IL VICEVERSA DEL TEO. 1 NON VALE, VISTO CHE ESISTONO CASI IN CUI $\int_a^b f(x) dx$ CONVERGE MA $\int_a^b |f(x)| dx$ DIVERGE, COME MOSTRA IL PROSSIMO ESEMPIO.

ES. 5

SIA $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, ALLORA $\int_{\pi}^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE MA $\int_{\pi}^{+\infty} |f(x)| dx$ DIVERGE.

SVOLGIMENTO

MOSTRIAMO PRIMA CHE $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ CONVERGE. SI HA:

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^C \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^C \frac{1}{x} \cdot (-\cos x)' dx = \\ &= \lim_{C \rightarrow +\infty} \left(\left[-\frac{\cos x}{x} \right]_{\pi}^C - \int_{\pi}^C \frac{\cos x}{x^2} dx \right) = \\ &= \lim_{C \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\cos C}{C} + \frac{\cos \pi}{\pi} - \int_{\pi}^C \frac{\cos x}{x^2} dx \right) = -\frac{1}{\pi} - \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \end{aligned}$$

BASTERÀ QUINDI DIMOSTRARE CHE $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ CONVERGE.

ATALE SCOPO SI OSSERVA CHE SU TUTTO L'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE SI HA:

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

QUINDI, PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO, DALLA CONVERGENZA DI $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ (CHE È NOTA), SEGUE QUELLA DI $\int_{\pi}^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx$. A QUESTO PUNTO, ANCHE $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ CONVERGE, GRAZIE AL CRITERIO DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA.

MOSTRIAMO ORA CHE $\int_{\pi}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ DIVERGE A $+\infty$.

DOBBIAMO QUINDI MOSTRARE CHE, DETTA $F(x) = \int_{\pi}^x \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$, SI HA $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

TALE LIMITE SO GIÀ CHE ESISTE, PERCHÉ F È CRESCENTE. PER CALCOLARLO BASTA CALCOLARE $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n\pi)$. SI HA:

$$F(n\pi) = \int_{\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{k\pi} dx = \sum_{k=2}^n \frac{2}{k\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \geq$$

SIAMO COSTRETTI A FARE COSÌ PERCHÉ NON ABBIAMO ANCORA FATTO LE SERIE

$$\geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^n \left(-\ln k + \ln(k+1) \right) = \frac{2}{\pi} (\ln(n+1) - \ln 2)$$

QUINDI $F(n\pi) \geq \frac{2}{\pi} (\ln(n+1) - \ln 2)$. MA POICHÉ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} (\ln(n+1) - \ln 2) = +\infty$

ALLORA ANCHE $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n\pi) = +\infty$.

PER CASA

RIFLETTERE SUI SEGUENTI QUESITI, CHE VERRANNO TRATTATI NELLA LEZIONE 9

- 1 TROVARE $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ TALE CHE $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE MA CON $f(x) \not\rightarrow 0$ PER $x \rightarrow +\infty$.
- 2 COME 1 MA CON f NON LIMITATA SU NESSUNA SEMIRETTA DESTRA.
- 3 COME 2 MA CON LA CONDIZIONE ULTERIORE CHE $f \geq 0$.
- 4 TROVARE $f, g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ TALI CHE $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1$ PER $x \rightarrow +\infty$ MA $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ E $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ HANNO CARATTERI DIVERSI
- 5 SPIEGARE PERCHÉ 4 NON CONTRADDICE IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO
- 6 GENERALIZZARE IL PROCEDIMENTO UTILIZZATO PER MOSTRARE CHE $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ CONVERGE.
OVVERO DIMOSTRARE CHE SE $f \in C(\mathbb{R})$ È PERIODICA A MEDIA NULLA E $g \in C^1([a, +\infty))$ TENDE A $+\infty$ CRESCENDO, ALLORA $\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} dx$ CONVERGE.

22-03-2021 (14-16)
PARTI AGGIUNTE RISPETTO AL 2020

LEZ 10

ECCO GLI ESEMPI FATTI A LEZIONE CHE SONO
ESSENZIALMENTE DIVERSI DA QUELLI DEL 2020.

ES.1 STUDIARE IL CARATTERE DI $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\ln(1+e^t)} dt$.

SU $[0,1]$ LA FUNZIONE INTEGRANDA È CONTINUA QUINDI
IL CARATTERE È LO STESSO DI:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\ln(1+e^x)} dx$$

POSTO

$$m = \inf \{ \sin^4 x + \cos^4 x \mid 0 \leq x \leq 2\pi \}$$

SI OTTIENE $m > 0$ GRAZIE AL T. DI WEIERSTRASS.
INOLTRE, PER LA PERIODICITÀ DI $\sin^4 x + \cos^4 x$ SI HA

(1) $\sin^4 x + \cos^4 x \geq m \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

INOLTRE $\forall x \geq 1$ SI HA:

(2) $\ln(1+e^x) < \ln(e^x + e^x) = \ln(2e^x) = \ln 2 + x < 2x$

DI CONSEGUENZA

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\ln(1+e^x)} > \frac{m}{\ln(1+e^x)} > \frac{m}{2x} = \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

QUINDI, VISTO CHE $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ DIVERGE, ANCHE $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\ln(1+e^x)} dx$ DIVERGE,
PER IL CRIT. DEL CONFRONTO.

ES.2 STUDIARE IL CARATTERE DI $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x}}{1+x^2} dx$.

IL CARATTERE È LO STESSO DI:

(3) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\cos x}}{1+x^2} dx$

SU $[1, +\infty)$ SI HA:

$$\frac{e^{\cos x}}{1+x^2} \leq \frac{e}{1+x^2} < \frac{e}{x^2} = e \cdot \frac{1}{x^2}$$

BASTA QUINDI RICORDARE CHE

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ CONVERGE}$$

È APPLICARE IL CRIT. DEL CONFRONTO PER OTTENERE CHE ANCHE (3) CONVERGE.

ES.3 STUDIARE IL CARATTERE DI $\int_{\frac{1}{100}}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2 + \sin x}\right) dx$.

IL CARATTERE È LO STESSO DI:

(4) $\int_2^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2 + \sin x}\right) dx$

MA L'ULTIMO INTEGRALE HA IL VANTAGGIO CHE L'INTEGRANDA È POSITIVA, QUINDI SI PUÒ APPLICARE IL CRIT. DEL CONFRONTO ASINTOTICO. INFATTI PER $x \rightarrow +\infty$ SI HA:

$$\sin\left(\frac{1}{x^2 + \sin x}\right) \approx \frac{1}{x^2 + \sin x} \approx \frac{1}{x^2}$$

MA, SICCOME $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ CONVERGE, ANCHE (4) CONVERGE.

Titolo nota

27 marzo 2020 (9.00-11.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma **Tor Vergata**

INT. IMPROPRI - STUDIO CONVERGENZA (... CONTINUA..)

LEMMA 1 SIA $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA E PERIODICA DI PERIODO $T > 0$

ALLORA :

$$(a) \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \int_{x_0}^{x_0+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

(b) Se $\int_0^T f(t) dt = 0$ ALLORA $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ E PERIODICA CON PERIODO T .

(c) SE $\int_0^T f(t) dt = A \neq 0$ $F(x) = \int_0^x \left(f(t) - \frac{A}{T} \right) dt$ È PERIODICA CON PERIODO T .

DIMO

$$(a) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \int_{x_0}^{x_0+T} f(t) dt = \int_{x_0}^T f(t) dt + \int_T^{x_0+T} f(t) dt = \int_{x_0}^T f(t) dt + \int_0^{x_0} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

$$\int_{x_0}^{x_0 + T} f(t) dt = \int_0^{x_0} f(u + T) du = \int_0^{x_0} f(u) du$$

The diagram shows the substitution $t = u + T$ and the periodicity of f .

$$(b) \quad F(x+T) = \int_0^{x+T} f(t) dt = \int_0^x f(t) dt + \int_x^{x+T} f(t) dt = F(x) + \int_0^T f(t) dt = F(x) + 0 = F(x)$$

(GRAZIE A PUNTO (a))

(c) NOTIAMO CHE $f(t) - \frac{A}{T}$ È A MEDIA NULLA PERCHÉ:

$$\int_0^{\pi} f(t) - \frac{A}{\pi} dt = \int_0^{\pi} f(t) dt - \frac{A}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} 1 dt = A - \frac{A}{\pi} \cdot \pi = 0$$

QUINDI BASTA APPLICARE IL PUNTO (b) USANDO $f(t) - \frac{\lambda}{T}$ AL POSTO DI $f(t)$.

TEO.1 (GENERALIZZAZIONE DELL'ES 5 DELLA LEZ.8)

DATE $f \in C^1([a, +\infty))$ T.C. $f(x) \rightarrow 0$ DECRESCENDO PER $x \rightarrow +\infty$, E $g \in C(\mathbb{R})$ PERIODICA DI PERIODO T , A MEDIA NULLA, CIOE' T.C. $\int_0^T g(t) dt = 0$. ALLORA $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ CONVERGE.

Dino

~~SIA $F(x) = \int_0^x g(t) dt$. VISTO CHE $g(t)$ È A MEDIA NULLA, ANCHE $F(x)$ È PERIODICA,~~
~~GRAZIE AL PUNTO (b) DEL LEMMA 1.~~

~~PRESTA ORA $A = \int_0^T F(x) dx$ DEFINIAMO $G(x) = F(x) - \frac{A}{T}$.~~

~~QUINDI $G(x)$ È UNA PRIMITIVA DI $g(x)$, PERIODICA E A MEDIA NULLA.~~

ERRATA CORRIGE

SOSTITUIRE

SIA
 $G(x) = \int_0^x g(t) dt.$

QUINDI:

$$\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) g(x) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) G'(x) dx =$$

$$= \lim_{c \rightarrow +\infty} \left[f(x) G(x) \right]_a^c - \int_a^c f'(x) G(x) dx =$$

$$= \underbrace{\lim_{c \rightarrow +\infty} (f(c)G(c) - f(a)G(a))}_{(1)} - \underbrace{\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f'(x) G(x) dx}_{(2)}$$

BASTA QUINDI MOSTRARE CHE I LIMITI (1) E (2) ESISTONO FINITI.

PER (1) BASTA OSSERVARE CHE $G(x)$ È LIMITATA (PERCHÉ CONTINUA E PERIODICA) E $f(x)$ È INFINITESIMA PER $x \rightarrow +\infty$, QUINDI PER $c \rightarrow +\infty$

SI HA:

$$f(c) \cdot G(c) - f(a) \cdot G(a) \rightarrow 0 - f(a)G(a) = -f(a)G(a)$$

PER (2) INVECE, DIMOSTRARE CHE ESISTE FINITO EQUIVALE A DIMOSTRARE LA CONVERGENZA DELL'INTEGRALE:

$$\int_a^{+\infty} f'(x) G(x) dx$$

A TALE SCOPO, DETTA $B = \max\{|G(x)| \mid x \in [0, T]\}$, OSSERVIAMO CHE

(1) $0 \leq |f'(x) \cdot G(x)| = f'(x) \cdot |G(x)| \leq B \cdot f'(x).$

OSSERVIAMO ANCHE CHE:

(2) $\int_a^{+\infty} -B \cdot f'(x) dx$ CONVERGE

PERCHÉ:

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c -B \cdot f'(x) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} [-B f(x)]_a^c = \lim_{c \rightarrow +\infty} (-B f(c) + B f(a)) = B f(a)$$

GRAZIE A E POSSIAMO APPLICARE IL CRIT. DEL CONFRONTO E CONCLUDERE

CHE:

$$\int_a^{+\infty} |f'(x) G(x)| dx \text{ CONVERGE.}$$

A QUESTO PUNTO, APPLICANDO IL CRIT. DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA, OTTENDO

CHE:

$$\int_a^{+\infty} f'(x) G(x) dx \text{ CONVERGE.}$$

E QUINDI ANCHE ② ESISTE FINITO.

DAL FATTO CHE ① E ② ESISTANO FINITI SEGUE LA TESI

ES.1

STUDIARE IL CARATTERE DI $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x+\sin x} dx$

SVOLGIMENTO

POSTO $f(x) = \frac{1}{1+x+\sin x}$ E $g(x) = \sin x$, L'INTEGRALE È DELLA FORMA RICHIESTA

PER USARE IL TEO.1 PERCHÉ:

1) $g(x) = \sin x$ È PERIODICA A MEDIA NULLA

2) $f(x) = \frac{1}{1+x+\sin x} \rightarrow 0$ DECRESCENDO PER $x \rightarrow +\infty$, PERCHÉ $1+x+\sin x \rightarrow +\infty$ CRESCENDO.

PATOLOGIE NEGLI INTEGRALI IMPROPRI

ES.2

TROVARE $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ T.C. $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE MA $f(x) \not\rightarrow 0$ PER $x \rightarrow +\infty$.

SVOLGIMENTO

BASTA PRENDERE $f(x) = \sin x^2$.

OVVIAMENTE IL CARATTERE NON CAMBIA SE IL PRIMO ESTREMO È 1.

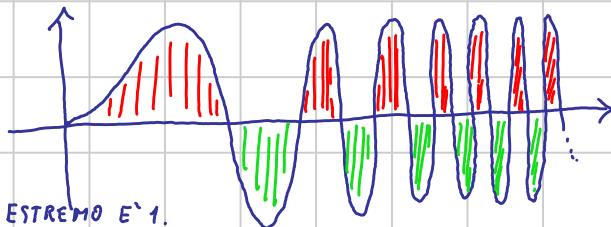
SI HA:

$$\int_1^{+\infty} \sin(x^2) dx = \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_1^C \sin(x^2) dx \stackrel{x=\sqrt{t}}{=} \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_1^{C^2} \sin t \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} dx$$

BASTERÀ QUINDI MOSTRARE CHE:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt \text{ CONVERGE.}$$

A TALE SCOPO BASTA OSSERVARE CHE $\sin t$ È PERIODICA A MEDIA NULLA E CHE



$\frac{1}{2\sqrt{t}} \rightarrow 0$ DECRESCENDO PER $t \rightarrow +\infty$. QUINDI SI PUO' APPLICARE IL **TEO. 1**

ES. 3 TROVARE $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ T.C. $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE MA $\forall a > 0$ f NON SIA LIMITATA SU $[a, +\infty)$

SVOLGIMENTO BASTA PRENDERE $f(x) = x \sin x^3$. IL CARATTERE NON CAMBIA SE COME PRIMO ESTREMO PRENDIAMO 1 ANZICHÉ 0. SI HA:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} x \sin x^3 dx &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c x \sin x^3 dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^{\sqrt[3]{c}} \sqrt[3]{t} \sin t \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} dt = \\ &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^{\sqrt[3]{c}} \frac{\sin t}{3\sqrt[3]{t}} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{3\sqrt[3]{x}} dx. \end{aligned}$$

QUINDI IL CARATTERE DELL'INTEGRALE INIZIALE E LO STESSO DI:

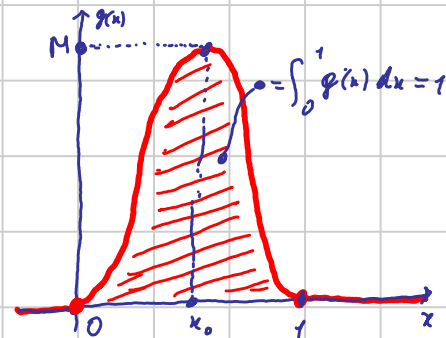
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{3\sqrt[3]{x}} dx$$

CHE CONVERGE GRAZIE AL **TEO. 1**.

ES. 4 COME L'ES. 3 MA CON L'ULTERIORE CONDIZIONE CHE $f(x) \geq 0 \forall x > 0$.

PER COMINCIARE PRENDIAMO $g \in C(\mathbb{R})$ CON LE SEGUENTI CARATTERISTICHE:

- 1) $g(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$
- 2) $g(x) > 0$ SE E SOLO SE $x \in (0, 1)$
- 3) $\int_0^1 g(x) dx = 1$

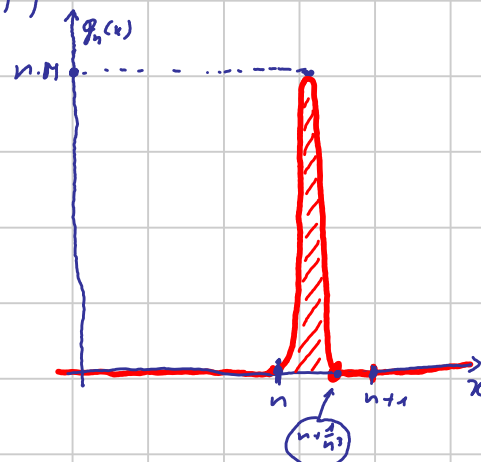


NON È IMPORTANTE TROVARE TALE g ESPLICITAMENTE, L'IMPORTANTE

È CHE TALE g ESISTA. INDICHIAMO CON M IL SUO MAX, CHE ESISTE SICURAMENTE PER T. WEIERSTRASS.

PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ DEFINIAMO $g_n = n g(n^3(x-n))$, CHE HA LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

- (a) $g_n(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$
- (b) $g_n(x) > 0$ SE E SOLO SE $x \in (n, n + \frac{1}{n^3})$
- (c) $\int_n^{n+1} g_n(x) dx = \frac{1}{n^2}$
- (d) $\max\{g_n(x) \mid x \in [n, n+1]\} = n \cdot M$



(a) È OVVIA. PER MOSTRARE (b) SI OSSERVI CHE:

$$g_n(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < n^3(x-n) < 1 \Leftrightarrow 0 < x-n < \frac{1}{n^3} \Leftrightarrow n < x < n + \frac{1}{n^3}$$

PER MOSTRARE (C) SI OSSERVI CHE:

$$\int_n^{n+1} g_n(x) dx = \int_n^{n+\frac{1}{n^2}} g_n(x) dx = \int_n^{n+\frac{1}{n^2}} n g(n^2(x-n)) dx \stackrel{x=\frac{t}{n^2}+n}{=} \int_0^1 n g(t) \cdot \frac{1}{n^2} dt = \frac{1}{n^2} \int_0^1 g(t) dt = \frac{1}{n^2}$$

INFINE MOSTRIAMO (d).

$$\max \{g_n(x) \mid x \in [n, n+1]\} = \max \{g_n(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \max \{n g(n^2(x-n)) \mid x \in \mathbb{R}\} = \max \{n g(y) \mid y \in \mathbb{R}\} = n \cdot M$$

ORA DEFINIAMO f :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{PER } x < 1 \\ g_n(x) & \text{PER } x \in [n, n+1] \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases}$$

MOSTRIAMO CHE

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx$$

CONVERGE, CIOÈ CHE ESISTE FINITO IL LIMITE:

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c f(x) dx$$

VISTA LA POSITIVITÀ DI $f(x)$, BASTERA VERIFICARE CHE $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(x) dx$ ESISTE FINITO.

SI HA:

$$\int_0^n f(x) dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} g_k(x) dx = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} =$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) =$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n-1} < 2$$

MA ALLORA, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(x) dx$, CHE ESISTE PER MONOTONIA, È ANCHE FINITO.

LO STESSO VALE PER $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c f(x) dx$. QUINDI $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE.

TUTTAVIA f NON È LIMITATA IN ALCUNA SEMIRETTA DESTRA.

ES. 5 TROVARE $f, g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ T.C. $f(x) \approx g(x)$ PER $x \rightarrow +\infty$ MA $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE MENTRE $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ DIVERGE.

SVOLGIMENTO

PRENDIAMO $f(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{x}$ E $g(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{x} + \frac{1}{x \ln x}$ SU $[1, +\infty)$

PER $x \rightarrow +\infty$ SI HA:

$$g(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{x} + \frac{1}{x \ln x} = \frac{(-1)^{[x]}}{x} \left(1 + \frac{(-1)^{[x]}}{\ln x} \right) \approx \frac{(-1)^{[x]}}{x} = f(x)$$

PERCHÉ $\rightarrow 0$ PER $x \rightarrow +\infty$

VEDIAMO CHE $\int_4^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE.

DOBBIAMO MOSTRARE CHE $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_4^c f(x) dx$ ESISTE FINITO.

SE PER COMODITÀ DI NOTAZIONE PONIAMO $F(x) = \int_4^x f(t) dt$. QUELLO CHE DOBBIAMO MOSTRARE

È CHE $F(x) \rightarrow \ell$ FINITO PER $x \rightarrow +\infty$. COME PRIMO PASSO MOSTRIAMO UN FATTO PIÙ DEBOLE, CIOÈ CHE $F(2n) \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ PER $n \rightarrow +\infty$.

SI HA:

$$F(2n) = \int_4^{2n} \frac{(-1)^{[x]}}{x} dx = \sum_{k=2}^{n-1} \int_{2k}^{2k+2} \frac{(-1)^{[x]}}{x} dx = \sum_{k=2}^{n-1} \left(\int_{2k}^{2k+1} \frac{1}{x} dx + \int_{2k+1}^{2k+2} -\frac{1}{x} dx \right) =$$

$$= \sum_{k=2}^{n-1} \left(\ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right) - \ln\left(\frac{2k+2}{2k+1}\right) \right) = \sum_{k=2}^{n-1} \ln\left(\frac{(2k+1)^2}{4k(k+1)}\right) = \sum_{k=2}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{4k(k+1)}\right)$$

SICCOME $\ln\left(1 + \frac{1}{4k(k+1)}\right) > 0$ LA SOMMA È CRESCENTE IN n . DI CONSEGUENZA

$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(2n)$ ESISTE. RIMANE DA VEDERE CHE È FINITO. SI HA:

$$F(2n) = \dots = \sum_{k=2}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{4k(k+1)}\right) \leq \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{4k(k+1)} = \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{8}$$

POICHÉ DUNQUE $F(2n) < \frac{1}{8}$ PER OGNI n , ALLORA ANCHE IL SUO LIMITE ℓ (CHE ESISTE)

DEVE ESSERE MINORE O UGUALE A $\frac{1}{8}$, QUINDI FINITO.

ABBIAMO QUINDI DIMOSTRATO CHE $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(2n) = \ell$ FINITO. VOGLIAMO ORA DIMOSTRARE CHE

$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(x) = \ell$. A TALE SCOPO RICORDIAMO CHE:

$\forall a > 4$ $F(x)$ È LIPSCHITZIANA SU $[a, +\infty)$ CON COSTANTE $L = \sup_{x \geq a} |f(x)| = \frac{1}{a}$

ORA, $\forall \varepsilon > 0$ PRENDIAMO $n_0 \in \mathbb{N}$ IN MODO CHE VALGANO DUE CONDIZIONI

1) SE $k \geq n_0$ ALLORA $|F(2k) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$

2) $\frac{1}{2n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$

DETTO CIÒ, $\forall x \geq 2n_0$, ESISTE SEMPRE $k \in \mathbb{N}$, CON $k \geq n_0$, TALE CHE $|2k - x| \leq 1$ E QUINDI

$$|F(x) - \ell| = |F(x) - F(2k) + F(2k) - \ell| \leq |F(x) - F(2k)| + |F(2k) - \ell| \leq \frac{1}{2n_0} |x - 2k| + |F(2k) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(1)

(1) ≤ 2

(3)

ABBIAMO QUINDI VERIFICATO CHE $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = l \in \mathbb{R}$, CIOÈ CHE $\int_4^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE.

PER VEDERE CHE INVECE $\int_4^{+\infty} g(x) dx$ DIVERGE BASTA OSSERVARE CHE:

$$\lim_{C \rightarrow +\infty} \int_4^C g(x) dx = \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_4^C f(x) + \frac{1}{x \ln x} dx = \underbrace{\lim_{C \rightarrow +\infty} \int_4^C f(x) dx}_{(1)} + \underbrace{\lim_{C \rightarrow +\infty} \int_4^C \frac{1}{x \ln x} dx}_{(2)}$$

MA SAPPIAMO CHE (1) ESISTE FINITO PERCHÈ $\int_4^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE, MENTRE

(2) È $+\infty$ PERCHÈ SAPPIAMO CHE $\int_4^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ DIVERGE.

QUINDI $\lim_{C \rightarrow +\infty} \int_4^C g(x) dx = +\infty$, CIOÈ $\int_4^{+\infty} g(x) dx$ DIVERGE.

26-03-2021 (ORE 9-11)
PARTI AGGIUNTE RISPETTO AL 2020

LEZ 12

NEL SEGUITO SONO ELENATE ALCUNE OSSERVAZIONI
ED ESEMPI DELLA LEZIONE 12 DEL 2021 CHE NON SONO
PRESENTI NEGLI APPUNTI DELLE LEZIONI DEL 2020.

OSS.1 DATE $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ TALI CHE $\forall c \in [a, b)$ $f, g \in \mathcal{R}([a, c])$,
SE $\int_a^b g(x) dx$ CONVERGE ALLORA:

$\int_a^b g(x) + f(x) dx$ E $\int_a^b f(x) dx$ HANNO LO STESSO CARATTERE.

DIMO

SI OSSERVI CHE:

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c g(x) + f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \left(\int_a^c g(x) dx + \int_a^c f(x) dx \right) =$$

(A) $= \int_a^b g(x) dx + \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$ (B)

PERCHÉ $\int_a^b g(x) dx$ CONVERGE
E QUINDI $\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c g(x) dx$ ESISTE FINITO

QUINDI:

(A) ESISTE FINITO $\Leftrightarrow$ (B) ESISTE FINITO

(A) $= +\infty (-\infty)$ $\Leftrightarrow$ (B) $= +\infty (-\infty)$

(A) NON ESISTE $\Leftrightarrow$ (B) NON ESISTE

QUESTO SIGNIFICA CHE $\int_a^b f(x) dx$ E $\int_a^b g(x) + f(x) dx$ HANNO
LO STESSO CARATTERE.

OSS. 2

SE f E g SONO COME NEL CRITERIO PER GLI INTEGRALI OSCILLANTI (**TEO. 1** LEZ. 8 DEL 2020) MA CON L'UNICA DIFFERENZA CHE g NON È A MEDIA NULLA, NEL SENSO CHE SI HA:

$$\int_a^{a+T} g(x) dx = A \neq 0 \quad \left(\text{DOVE } T \text{ È IL PERIODO DI } g \right),$$

ALLORA $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$ E $\int_a^{+\infty} A f(x) dx$ HANNO LO STESSO CARATTERE.

Dimo OSSERVIAMO CHE:

$$(1) \quad \int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) \left(g(x) - \frac{A}{T} \right) + f(x) \cdot \frac{A}{T} dx$$

SI NOTI CHE $g(x) - \frac{A}{T}$ È A MEDIA NULLA PERCHÉ:

$$\int_a^{a+T} \left(g(x) - \frac{A}{T} \right) dx = \int_a^{a+T} g(x) dx - \frac{A}{T} \int_a^{a+T} 1 dx = A - \frac{A}{T} \cdot T = 0$$

DI CONSEGUENZA, APPLICANDO IL CRIT. DEGLI INTEGRALI OSCILLANTI, SI OTTIENE CHE:

$$\int_a^{+\infty} f(x) \left(g(x) - \frac{A}{T} \right) dx \text{ CONVERGE}$$

E QUINDI, GRAZIE ALL' **OSS. 1**, L'INTEGRALE AL II° MEMBRO DI (1) HA LO STESSO CARATTERE DI $\int_a^{+\infty} f(x) \cdot \frac{A}{T} dx$ CIOÈ DI $\int_a^{+\infty} A f(x) dx$.

ES. 1

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\sin x)}{\ln(e + x + \sin x)} dx \text{ CONVERGE}$$

BASTA APPLICARE IL CRITERIO PER GLI INTEGRALI OSCILLANTI DOPO AVER OSSERVATO CHE:

(a) $\arctan(\sin x)$ È PERIODICA A MEDIA NULLA

(b) $\frac{1}{\ln(e+x+\sin x)} \rightarrow 0$ DECRESCENDO

IL PUNTO (b) È OVVIO DOPO AVER OSSERVATO CHE
 $x + \sin x \rightarrow +\infty$ CRESCENDO.

PER IL PUNTO (a), DOPO AVER OSSERVATO CHE $\arctan(\sin x)$
HA PERIODO 2π , BASTA NOTARE CHE:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \arctan(\sin x) dx = 0$$

PERCHÉ $\arctan(\sin x)$ È UNA FUNZIONE DISPARI.

ES.2 $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{2} \sin x)}{x} dx$ DIVERGE A $-\infty$.

PER VERIFICARLO BASTA APPLICARE L'**OSS.2** DOPO
AVER MOSTRATO CHE:

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + \frac{1}{2} \sin x) dx = C < 0$

PER MOSTRARE (2) SI OSSERVI CHE:

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + \frac{1}{2} \sin x) dx = \int_{-\pi}^0 \ln(1 + \frac{1}{2} \sin x) dx + \int_0^{\pi} \ln(1 + \frac{1}{2} \sin x) dx$

DOVE:

A $= \int_{\pi}^0 \ln(1 + \frac{1}{2} \sin(-t)) \cdot (-1) dt = \int_0^{\pi} \ln(1 - \frac{1}{2} \sin t) dt$

QUINDI (3) DIVENTA:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 + \frac{1}{2} \sin x\right) dx = \int_0^{\pi} \ln\left(1 - \frac{1}{2} \sin x\right) dx + \int_0^{\pi} \ln\left(1 + \frac{1}{2} \sin x\right) dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \ln\left(1 - \frac{1}{2} \sin x\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2} \sin x\right) dx = \int_0^{\pi} \ln\left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 x\right) dx \leq$$

$$\leq \int_0^{\pi} -\frac{1}{4} \sin^2 x dx = -\frac{1}{4} \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{8} < 0$$

$$\ln(1+x) \leq x \\ \forall x > -1$$

Analisi Matematica (II modulo) - Lez. 10

Titolo nota

15/08/2014

30 marzo 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. Emanuele Callegari - Università di Roma Tor Vergata

INT. IMPROPRI - STUDIO CONVERGENZA (... CONTINUA...)

ES. 1 TROVARE $f, g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ T.C. $f(x) \approx g(x)$ PER $x \rightarrow +\infty$ MA $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE MENTRE $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ DIVERGE.

SVOLGIMENTO

PRENDIAMO $f(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{x}$ E $g(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{x} + \frac{1}{x \ln x}$ SU $[4, +\infty)$

PER $x \rightarrow +\infty$ SI HA:

$g(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{x} + \frac{1}{x \ln x} = \frac{(-1)^{[x]}}{x} \left(1 + \frac{(-1)^{[x]}}{\ln x} \right) \approx \frac{(-1)^{[x]}}{x} = f(x)$

PERCHÉ $\rightarrow 0$ PER $x \rightarrow +\infty$

VEDIAMO CHE $\int_4^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE.

DOBBIAMO MOSTRARE CHE $\lim_{C \rightarrow +\infty} \int_4^C f(x) dx$ ESISTE FINITO.

SE PER COMODITÀ DI NOTAZIONE PONIAMO $F(x) = \int_4^x f(t) dt$. QUELLO CHE DOBBIAMO MOSTRARE

È CHE $F(x) \rightarrow l$ FINITO PER $x \rightarrow +\infty$. COME PRIMO PASSO MOSTRIAMO UN FATTO PIÙ DEBOLE, CIOÈ CHE $F(2n) \rightarrow l \in \mathbb{R}$ PER $n \rightarrow +\infty$.

SI HA:

$$F(2n) = \int_4^{2n} \frac{(-1)^{[x]}}{x} dx = \sum_{k=2}^{n-1} \int_{2k}^{2k+2} \frac{(-1)^{[x]}}{x} dx = \sum_{k=2}^{n-1} \left(\int_{2k}^{2k+1} \frac{1}{x} dx + \int_{2k+1}^{2k+2} -\frac{1}{x} dx \right) =$$

$$= \sum_{k=2}^{n-1} \left(\ln \left(\frac{2k+1}{2k} \right) - \ln \left(\frac{2k+2}{2k+1} \right) \right) = \sum_{k=2}^{n-1} \ln \left(\frac{(2k+1)^2}{4k(k+1)} \right) = \sum_{k=2}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{1}{4k(k+1)} \right)$$

SICCOME $\ln \left(1 + \frac{1}{4k(k+1)} \right) > 0$ LA SOMMA È CRESCENTE IN n . DI CONSEGUENZA

$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(2n)$ ESISTE. RIMANE DA VEDERE CHE È FINITO. SI HA:

$$F(2n) = \dots = \sum_{k=2}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{1}{4k(k+1)} \right) \leq \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{4k(k+1)} = \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{8}$$

POICHÉ DUNQUE $F(2n) < \frac{1}{8}$ PER OGNI n , ALLORA ANCHE IL SUO LIMITE l (CHE ESISTE)

DEVE ESSERE MINORE O UGALE A $\frac{1}{8}$, QUINDI FINITO.

ABBIAMO QUINDI DIMOSTRATO CHE $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(2n) = \ell$ FINITO. VOGLIAMO ORA DIMOSTRARE CHE

$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = \ell$. A TALE SCOPO RICORDIAMO CHE:

(1) $\forall \alpha > 0$, $F(x)$ È LIPSCHITZIANA SU $[a, +\infty)$ CON COSTANTE $L = \sup_{x \geq a} |f(x)| = \frac{1}{\alpha}$

ORA, $\forall \varepsilon > 0$ PRENDIAMO $n_0 \in \mathbb{N}$ IN MODO CHE VALGANO DUE CONDIZIONI

1) SE $k \geq n_0$ ALLORA $|F(2k) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$

2) $\frac{1}{2n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$

DETTO CIÒ, $\forall x \geq 2n_0$, ESISTE SEMPRE $k \in \mathbb{N}$, CON $k \geq n_0$, TALE CHE $|2k - x| \leq 1$ E QUINDI

$$|F(x) - \ell| = |F(x) - F(2k) + F(2k) - \ell| \leq |F(x) - F(2k)| + |F(2k) - \ell| \leq \frac{1}{2n_0} |x - 2k| + |F(2k) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ABBIAMO QUINDI VERIFICATO CHE $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = \ell \in \mathbb{R}$, CIOÈ CHE $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE.

PER VEDERE CHE INVECE $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ DIVERGE BASTA OSSERVARE CHE:

$$\lim_{C \rightarrow +\infty} \int_a^C g(x) dx = \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_a^C \left(f(x) + \frac{1}{x \ln x} \right) dx = \underbrace{\lim_{C \rightarrow +\infty} \int_a^C f(x) dx}_{(1)} + \underbrace{\lim_{C \rightarrow +\infty} \int_a^C \frac{1}{x \ln x} dx}_{(2)}$$

MA SAPPIAMO CHE (1) ESISTE FINITO PERCHÈ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE, MENTRE

(2) È $+\infty$ PERCHÈ SAPPIAMO CHE $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ DIVERGE.

QUINDI $\lim_{C \rightarrow +\infty} \int_a^C g(x) dx = +\infty$, CIOÈ $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ DIVERGE.

TEO. 1 (CRITERIO DI CAUCHY)

DATA $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ TALE CHE PER OGNI $c \in [a, b)$ SIA $f \in \mathcal{R}([a, c])$, ALLORA È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

(a) $\int_a^b f(x) dx$ CONVERGE.

(b) $\forall \varepsilon > 0 \exists c \in [a, b)$ T.C. $x_1, x_2 \in [c, b) \Rightarrow \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| < \varepsilon$

DIMO PRESA $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, L'AFFERMAZIONE (a) EQUIVALE AD:

(a) $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ ESISTE FINITO

MENTRE LA (b) EQUIVALE A:

$$(\beta) \forall \varepsilon > 0 \exists c \in [a, b) \text{ TALE CHE } x_1, x_2 \in [c, b) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

A QUESTO PUNTO L'EQUIVALENZA TRA (α) E (β) È UN TEOREMA NOTO SUI LIMITI.

OSS. 1 IL TEO. 1 SI UTILIZZA SOPRATTUTTO IN NEGATIVO, CIOÈ PER DIMOSTRARE CHE UN INTEGRALE NON CONVERGE, COME VEDIAMO NELL'ESEMPIO SUCCESSIVO.

ES. 2 MOSTRARE CHE $\int_0^{+\infty} \sin \sqrt{x} \, dx$ NON CONVERGE

SVOLGIMENTO

$\forall k \in \mathbb{N}$ PRENDIAMO $a_k = (2k\pi)^2$ E $b_k = ((2k+1)\pi)^2$. SI HA

$$\begin{aligned} \int_{a_k}^{b_k} \sin \sqrt{x} \, dx & \stackrel{x=(t+2k\pi)^2}{=} \int_0^\pi \sin(t+2k\pi) \cdot 2(t+2k\pi) \, dt = \int_0^\pi 2 \cdot (2k\pi+t) \cdot \sin t \, dt \geq \\ & \geq 4k\pi \int_0^\pi \sin t \, dt = 8k\pi \end{aligned}$$

MA ALLORA PER $k \rightarrow +\infty$, PUR ESSENDO $a_k, b_k \rightarrow +\infty$, SI HA $\left| \int_{a_k}^{b_k} \sin \sqrt{x} \, dx \right| \rightarrow +\infty$.

QUINDI LA (a) DEL TEO. 1 È VIOLATA, QUINDI $\int_0^{+\infty} \sin \sqrt{x} \, dx$ NON CONVERGE.

PROVA SIMULATA SU "INTEGRALI E INT. IMPROPRI"

P. 1 CALCOLARE $\int_0^{+\infty} \frac{3x}{x^4+5x^2+4} \, dx$

SVOLGIMENTO

SI HA:

$$\frac{3x}{x^4+5x^2+4} = \frac{3x}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{x^3+4x-x^3-x}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{x^3+4x}{(x^2+1)(x^2+4)} - \frac{x^3+x}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+4}$$

QUINDI:

$$\begin{aligned} \lim_{C \rightarrow +\infty} \int_1^C \frac{3x}{x^4+5x^2+4} \, dx &= \lim_{C \rightarrow +\infty} \left(\int_1^C \frac{x}{x^2+1} \, dx - \int_1^C \frac{x}{x^2+4} \, dx \right) = \\ &= \lim_{C \rightarrow +\infty} \left(\left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_1^C - \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+4) \right]_1^C \right) = \end{aligned}$$

$$= \lim_{C \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \ln(C^2+1) - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(C^2+4) + \frac{1}{2} \ln 5 \right) =$$

$$= \lim_{C \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{C^2+1}{C^2+4} + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$$

P.2 STUDIARE AL VARIARE DI $\alpha > 0$ LA CONVERGENZA DI $\int_0^1 \left(\frac{e^x - \cos x}{\tan x - \sin x} \right)^\alpha dx$

SVOLGIMENTO

L'INTEGRALE È IMPROPRIO NEL PRIMO ESTREMO.

PER $x \rightarrow 0^+$ SI HA:

$$e^x - \cos x = 1 + x + o(x) - (1 + o(x)) = x + o(x)$$

$$E: \quad \tan x - \sin x = \tan x \cdot (1 - \cos x) = (x + o(x)) \cdot \left(1 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

QUINDI:

$$f(x) = \left(\frac{x + o(x)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} \right)^\alpha \approx 2^\alpha \cdot \frac{1}{x^{2\alpha}}$$

PER IL CRIT. DEL CONFRONTO ASINTOTICO IL CARATTERE DI $\int_0^1 f(x) dx$ È UGUALE A QUELLO DI $\int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha}} dx$, CHE CONVERGE PER $2\alpha < 1$.

QUINDI GLI $\alpha > 0$ CHE RENDONO CONVERGENTE $\int_0^1 f(x) dx$ SONO GLI α TALI CHE $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

P.3 STUDIARE LA CONVERGENZA DI $\int_0^{+\infty} \left(\frac{A + \sin x}{17 + \cos x} \right)^x dx$ PER $A=15$ E PER $A=16$.

SVOLGIMENTO

MOSTRIAMO CHE $\int_0^{+\infty} \left(\frac{15 + \sin x}{17 + \cos x} \right)^x dx$ CONVERGE

POICHÉ $|\sin x| \leq 1$ E $|\cos x| \leq 1$ SI HA

(2) $15 + \sin x \leq 16 \leq 17 + \cos x$

MA SICCOME $\sin x = 1$ E $\cos x = -1$ NON SI VERIFICANO MAI PER LO STESSO x , UNA DELLE DUE DISUGUAGLIANZE DELLA (2) È SEMPRE STRETTA QUINDI:

(3) $\frac{15 + \sin x}{17 + \cos x} < 1$ PER OGNI $x \in \mathbb{R}$

MA $\frac{15 + \sin x}{17 + \cos x}$ È CONTINUA E PERIODICA, QUINDI HA MASSIMO M SU $[0, 2\pi]$ E QUINDI SU $\mathbb{R}$.

DALLA (3) SEGUE CHE $M < 1$.

SI OTTIENE:

PERCHÉ $|\sin x| \leq 1$ E $|\cos x| \leq 1$

$$0 < \frac{15 + \sin x}{17 + \cos x} \leq M < 1$$

DA CUI SEGUE:

VALE DA UN CERTO $x_0 > 0$ IN POI
PERCHÉ $M < 1$ E QUINDI $M^x = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ PER $x \rightarrow +\infty$

$$0 < \left(\frac{15 + \sin x}{17 + \cos x} \right)^x \leq M^x < \frac{1}{x^2}$$

POICHÉ $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ CONVERGE, PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO CONVERGE ANCHE $\int_{x_0}^{+\infty} \left(\frac{15 + \sin x}{17 + \cos x} \right)^x dx$.

E QUINDI ANCHE $\int_0^{+\infty} \left(\frac{15 + \sin x}{17 + \cos x} \right)^x dx$.

MOSTRIAMO ORA CHE $\int_0^{+\infty} \left(\frac{16 + \sin x}{17 + \cos x} \right)^x dx$ DIVERGE.

OSSERVIAMO CHE:

$$(4) \quad \frac{16 + \sin x}{17 + \cos x} \geq 1 \Leftrightarrow 16 + \sin x \geq 17 + \cos x \Leftrightarrow \sin x - \cos x \geq 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$$

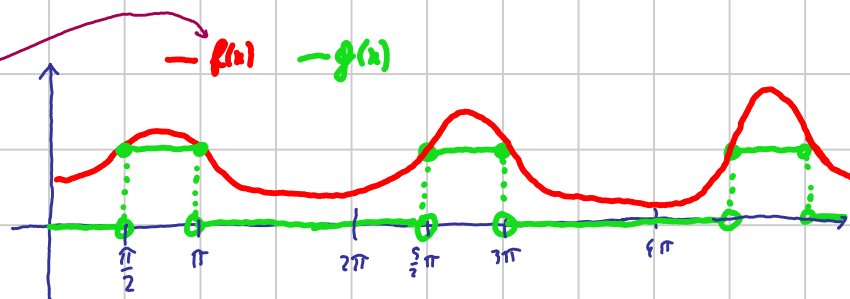
SE DEFINIAMO.

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi \right] \text{ PER QUALCHE } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

GRAZIE A (4) AVREMO:

$$0 \leq g(x) \leq \left(\frac{16 + \sin x}{17 + \cos x} \right)^x = f(x)$$

PER OGNI $x \in [0, +\infty)$.



PER AVERE LA TESI BASTERÀ DUNQUE MOSTRARE CHE $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ DIVERGE.

GRAZIE ALLA POSITIVITÀ DI $g(x)$ È SUFFICIENTE MOSTRARE CHE $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{a_n} g(x) dx = +\infty$

PER UNA SOLA $a_n \rightarrow +\infty$. PRENDIAMO DUNQUE $a_n = 2n\pi$. SI HA:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2n\pi} g(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} g(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} \cdot n \right) = +\infty$$

QUINDI $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ DIVERGE E DUNQUE, PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO, ANCHE $\int_0^{+\infty} \left(\frac{16 + \sin x}{17 + \cos x} \right)^x dx$.

P.9 DATA $F(x) = \int_1^x \sqrt{1 + \frac{1}{t^3}} dt$

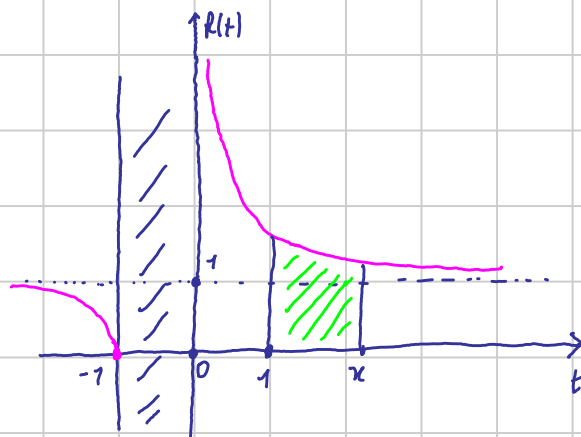
(a) TROVARNE IL DOMINIO, CIOÈ TROVARE PER QUALI $x \in \mathbb{R}$ $F(x)$ È BEN DEFINITO COME INTEGRALE DIRIEMANN O COME INTEGRALE IMPROPRIO CONVERGENTE.

(b) STUDIARNE LA MONOTONIA.

(c) DIRE SE IL SUO GRAFICO INTERSECA LA RETTA $y=x$.

SVOLGIMENTO

(a) LA FUNZIONE INTEGRANDA $f(t) = \sqrt[4]{1 + \frac{1}{t^3}}$
È DEFINITA FUORI DALL'INTERVALLO $(-1, 0]$
ED HA UN GRAFICO APPROSSIMATIVO COME QUELLO
IN FIGURA. QUINDI SE IL PRIMO ESTREMO
DELL' INTEGRALE È -1 , IL SECONDO ESTREMO
 x PUÒ ESSERE PRESO NELL'INSIEME $(0, +\infty)$.



RIMANE DA DECIDERE SE VADA BENE ANCHE $x=0$, CIOÈ SE $\int_0^1 \sqrt[4]{1 + \frac{1}{t^3}} dt$ CONVERGA.
A TALE SCOPO SI OSSERVI CHE PER $t \rightarrow 0^+$ SI HA:

$$f(t) = \sqrt[4]{1 + \frac{1}{t^3}} \approx \sqrt[4]{\frac{1}{t^3}} = \frac{1}{t^{3/4}}$$

QUINDI, GRAZIE AL FATTO CHE $\int_0^1 \frac{1}{t^{3/4}} dt$ CONVERGE, PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO
ANCHE $\int_0^1 f(t) dt$ CONVERGE AD UNA QUANTITÀ FINITA $A > 0$. QUINDI:

$$F(0) = \int_{-1}^0 f(t) dt = - \int_0^1 f(t) dt = -A.$$

(b) PER IL T.F.C.2 SI HA:

$$F'(x) = f(x) = \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^3}} > 1 \quad \text{PER } x > 0$$

QUINDI F È STRETTAMENTE CRESCENTE.

INOLTRE:

$$F(-1) = \int_{-1}^{-1} f(t) dt = 0$$

QUINDI, DALLA MONOTONIA SEGUE CHE $F(x)$ È NEGATIVA SU $[-1, 0]$ E POSITIVA SU $(0, +\infty)$.

INOLTRE DAL FATTO CHE PER OGNI x SIA $F'(x) > 1$ SEGUE CHE $F(x)$ STA SOPRA ALLA
RETTA PASSANTE PER $(1, F(1))$ E CON PENDENZA 1. QUINDI $F(x) \rightarrow +\infty$ PER $x \rightarrow +\infty$.

(c) PER VEDERE SE $y=F(x)$ INTERSECA LA RETTA $y=x$, CERCHIAMO PRIMA SE HA
UN ASINTOTO OBLIQUO PER $x \rightarrow +\infty$. SI HA:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^3}} = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(F(x) - (x-1) - 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_1^x \sqrt[4]{1+\frac{1}{t^3}} dt - \int_1^x 1 dt - 1 \right) =$$

PERCHÉ $\sqrt[4]{1+x} \leq 1 + \frac{x}{4}$

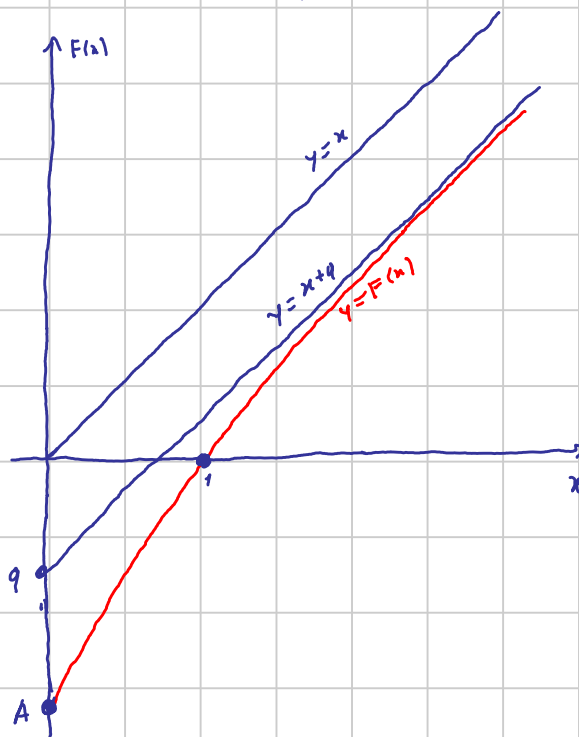
$$= -1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{t^3}} - 1 \right) dt \leq$$

$$\leq -1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{4t^3} dt = -1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{8t^2} \right]_1^x = -1 + \frac{1}{8} = -\frac{7}{8}$$

QUINDI L'ASINTOTO OBLIQUO È $y = x + q$ CON $q \leq -\frac{7}{8}$.

INOLTRE $F(x)$ È CONCAVA PERCHÉ $F'(x)$ È DECRESCENTE, QUINDI $F(x)$ STA SOTTO AL SUO

ASINTOTO OBLIQUO E QUINDI ANCHE ALLA RETTA $y = x$. IL GRAFICO È IL SEGUENTE:



P.9 DATA $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, LIPSCHITZIANA,

(a) MOSTRARE CHE SE $\forall n \in \mathbb{N} \ f(\sqrt[n]{n}) = 0$ ALLORA $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE.

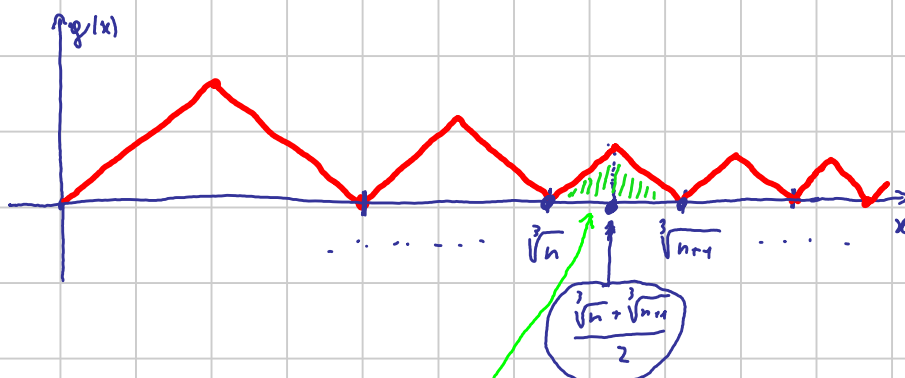
(b) COSA SUCCEDDE NEL PUNTO (a) LA CONDIZIONE $f(\sqrt[n]{n}) = 0$ VIENE SOSTITUITA DA $f(\sqrt{n}) = 0$?

SVOLGIMENTO

(a) DETTA L LA COSTANTE DI LIPSCHITZ DI f , DEFINIAMO $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ NEL MODO SEGUENTE:

$$g(x) = \begin{cases} L(x - \sqrt[n]{n}) & \text{SE } x \in [\sqrt[n]{n}, \frac{\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}}{2}] \\ -L(x - \sqrt[n]{n+1}) & \text{SE } x \in [\frac{\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}}{2}, \sqrt[n]{n+1}] \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

IL GRAFICO DI $g(x)$ È IL SEGUENTE:



IN PARTICOLARE SI NOTI CHE OGNI TRATTO DEL GRAFICO DI $g(x)$ HA PENDENZA L O $-L$.

INOLTRE, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$, SI HA:

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt[n]{n}}^{\sqrt[n]{n+1}} g(x) dx &= \text{AREA DI } \text{triangolo} = \frac{1}{2} \cdot \overbrace{(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})}^{\text{BASE TRIANGOLINO}} \cdot \overbrace{\frac{L}{2}(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})}^{\text{ALTEZZA TRIANGOLINO}} = \frac{L}{4} (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})^2 = \\ &= \frac{L}{4} (\sqrt[n]{n})^2 \cdot \left(\sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)^2 \leq \frac{L}{4} \cdot n^{\frac{2}{n}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^2 = \frac{L}{36} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

QUINDI $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ CONVERGE PERCHÈ:

$$\lim_{C \rightarrow +\infty} \int_0^C g(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt[n]{n}} g(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\sqrt[k]{k}}^{\sqrt[k+1]{k+1}} g(x) dx =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 g(x) dx + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\sqrt[k]{k}}^{\sqrt[k+1]{k+1}} g(x) dx \right) =$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{L}{4} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{L}{36} \cdot \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}} \right) =$$

$$= \frac{L}{4} + \frac{L}{36} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{L}{4} + \frac{L}{36} + \frac{L}{36} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{n-1} \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{1}{2}} dx \leq$$

$$\leq \frac{L}{4} + \frac{L}{36} + \frac{L}{36} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{n-1} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx = \text{ESISTE FINITO PERCHÈ} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx \text{ CONVERGE}$$

A QUESTO PUNTO, SE AVESSIMO GIÀ FATTO LE SERIE AVREMMO FINITO PERCHÈ $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ CONVERGE, INVECE SIAMO COSTRETTI A CAVARCELA IN ALTRO MODO

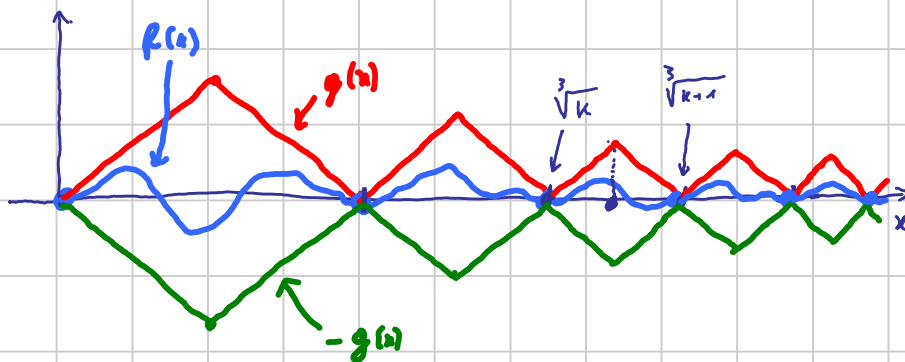
QUINDI $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ CONVERGE.

ORA, DAL FATTO CHE f È LIPSCHITZIANA CON COSTANTE DI LIPSCHITZ L , SEGUE CHE

(5)

$$|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in [0, +\infty)$$

COME EVIDENZIATO NELLA FIGURA SEGUENTE:



INFATTI SE $f(x)$ USCISSE DALLA ZONA DELIMITATA DA $g(x)$ E $-g(x)$, VISTO CHE

$f(\sqrt[3]{k}) = 0$ È FORZATO CI SAREBBE NECESSARIAMENTE UN RAPPORTO INCREMENTALE CON MODULO MAGGIORE DI L , IN CONTRASTO COL FATTO CHE L È COSTANTE DI LIPSCHITZ DI $f(x)$.

DUNQUE VALE (5) E QUINDI, PER IL T. DEL CONFRONTO, $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx$ CONVERGE. MA ALLORA, PER IL CRITERIO DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA, ANCHE $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ CONVERGE.

(6) COSTRUIENDO $g(x)$ IN ANALOGIA A QUANTO FATTO NEL PUNTO (a) MA USANDO $\sqrt{n}$ AL POSTO DI $\sqrt[3]{n}$, SI OTTIENE CHE $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ STAVOLTA DIVERGE. QUINDI TALE $g(x)$ FORNISCE IL CONTROESEMPIO CHE SERVE.
