Lezioni 22-23

Numeri complessi

DEF.0 (INFORMALE)

$\mathbb{C}$ È L'INSIEME DEGLI OGGETTI DEL TIPO $a+bi$, DOVE $a,b\in\mathbb{R}$ E i È UN SIMBOLO. TALI OGGETTI SI SOMMANO E MOLTIPLICANO COME SE FOSSERO POLINOMI NELLA VARIABILE i, CON LA REGOLA AGGIUNTIVA CHE LE POTENZE DI i CON ESPONENTE MAGGIORE DI 1 SI RIDUCONO USANDO LA REGOLA $i^2=-1$.

ESEMPIO 0 ECCO QUALCHE ESEMPIO DI CALCOLO

- $(3+5i)+(7-3i) = 10+2i$
- $(4+i)+(5-i) = 9+0i = 9$
- $(1+i)\cdot(2-3i) = 2+2i-3i-3i^2 = 2-i-3\cdot(-1) = 5-i$
- $(\sqrt{3}+i)^3 = (\sqrt{3})^3+3\cdot(\sqrt{3})^2\cdot i+3\cdot\sqrt{3}\cdot(i)^2+i^3 =$

$$= 3\sqrt{3}+9i+3\sqrt{3}(i)^2+(i)^3 = 3\sqrt{3}+9i-3\sqrt{3}-i = 0+8i = 8i$$

OSS.0 È FACILE DIMOSTRARE CHE $\mathbb{C}$ È UN CAMPO, DOVE L'ELEMENTO NEUTRO DELL'ADDIZIONE È $0+0i$, CIOÈ 0, MENTRE QUELLO DELLA MOLTIPLICAZIONE È $1+0i$, CIOÈ 1. AD ESEMPIO MOSTRIAMO CHE OGNI $a+bi\neq 0+0i$ HA INVERSO MOLTIPLICATIVO. BASTA INFATTI PRENDERE $\alpha+\beta i$, CON $\alpha=\frac{a}{a^2+b^2}$ E $\beta=\frac{-b}{a^2+b^2}$ E SI OTTIENE

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i) = (a+bi)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i\right) = \frac{a^2}{a^2+b^2}-\cancel{\frac{ab}{a^2+b^2}}i+\cancel{\frac{ab}{a^2+b^2}}i-\frac{b^2}{a^2+b^2}(i)^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$$

OSS. 1

PER CHI HA GIÀ SEGUITO UN CORSO DI ALGEBRA, LA DEF. 0 PUÒ ESSERE RESA FORMALE PRENDENDO $\mathbb{R}[x]$, CIOÈ L'ANELLO DEI POLINOMI IN UNA VARIABILE, E QUOZIENTANDOLO RISPETTO ALL'IDEALE GENERATO DA x^2+1. IN TAL MODO IL NUMERO COMPLESSO $a+bi$ CORRISPONDE ALLA CLASSE CONTENENTE IL POLINOMIO $a+bx$. TUTTAVIA, CHI NON AVESSE SEGUITO UN CORSO DI ALGEBRA, PUÒ COMUNQUE DARE UNA DEF. FORMALE NEL MODO CHE SEGUE.

DEF. 1

I NUMERI COMPLESSI SONO UNA TERNA $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, DOVE $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ E $+$ E $\cdot$ SONO OPERAZIONI SU $\mathbb{C}$ DEFINITE DA:

(1) $$(a,b)+(\alpha,\beta)=(a+\alpha, b+\beta)$$

(2) $$(a,b)\cdot(\alpha,\beta)=(a\alpha-b\beta, a\beta+b\alpha)$$

OSS. 2

ANCHE CON QUESTA DEFINIZIONE È SEMPLICE VERIFICARE CHE $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ È UN CAMPO. INOLTRE, SICCOME PER $b=\beta=0$ (1) E (2) DIVENTANO:

$$(a,0)+(\alpha,0)=(a+\alpha, 0)$$

$$(a,0)\cdot(\alpha,0)=(a\alpha-0\cdot 0, a\cdot 0+0\cdot\alpha)=(a\cdot\alpha, 0)$$

SI OTTIENE BANALMENTE CHE L'INSIEME $\{(a,0) \mid a\in\mathbb{R}\}$ È UN SOTTOCAMPO DI $\mathbb{C}$ ISOMORFO A $\mathbb{R}$.

OSS. 3

LA CORRISPONDENZA BIUNIVOCA $a+bi \longleftrightarrow (a,b)$ TRA GLI OGGETTI DEFINITI IN DEF 0 E DEF 1 È CHIARAMENTE UN ISOMORFISMO; PER LA MOLTIPLICAZIONE SI HA:

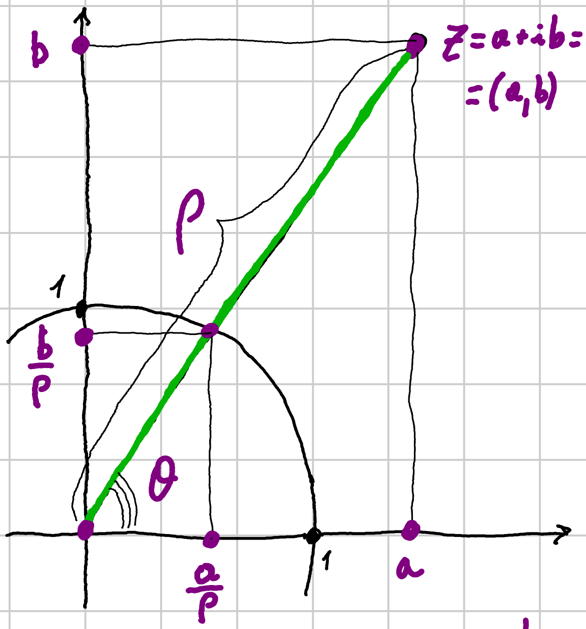
$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)=a\alpha+\alpha bi+a\beta i+b\beta i^2=(a\alpha-b\beta)+(a\beta+\alpha b)i$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \updownarrow$$

$$(a,b)\cdot(\alpha,\beta)=\cdots\cdots=(a\alpha-b\beta, a\beta+\alpha b)$$

E LO STESSO VALE PER L'ADDIZIONE. QUINDI ANCHE SE COME DEFINIZIONE FORMALE ADOTTEREMO $\boxed{\text{DEF. 1}}$, PER FARE I CALCOLI USEREMO LA NOTAZIONE DI $\boxed{\text{DEF. 0}}$

DEF. 2 (NOTAZIONI)



DATO IL NUMERO COMPLESSO $z = a+ib$, CHE POSSIAMO SEMPRE IDENTIFICARE COL PUNTO (a,b) SUL PIANO CARTESIANO, INTRODUCIAMO LE NOTAZIONI:

$a = \mathrm{Re}(z)$ = PARTE REALE DI z

$b = \mathrm{Im}(z)$ = PARTE IMMAGINARIA DI z

$|z| = \rho = \sqrt{a^2+b^2}$ = MODULO DI z

$\arg(z)$ = ARGOMENTO DI z =

= UNICO ANGOLO θ, CON $0 \leq \theta < 2\pi$, TALE CHE $\cos\theta = \frac{a}{\rho}$ E $\sin\theta = \frac{b}{\rho}$

$\bar{z} = a - bi$ = CONIUGATO DI z.

ESEMPIO 1

SE $z = 2-2i$ ALLORA:

$$|z| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{7}{4}\pi$$

$$z = 2-2i = 2\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$$

$$\bar{z} = 2+2i$$

PROPOSIZIONE 1

DATI $z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ ALLORA $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ E $\arg(z_1 \cdot z) - \arg(z_1) + \arg(z_2)$ È UN MULTIPLO DI 2π

DIMO

SIANO $\theta_1 = \arg(z_1)$, $\theta_2 = \arg(z_2)$, $\rho_1 = |z_1|$ E $\rho_2 = |z_2|$.

ALLORA

$$z_1 = a_1 + b_1 i = \rho_1 \cos\theta_1 + \rho_1 \sin\theta_1 \cdot i$$
$$z_2 = a_2 + b_2 i = \rho_2 \cos\theta_2 + \rho_2 \sin\theta_2 \cdot i$$

QUINDI:

$$z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 \cos\theta_1 + \rho_1 \sin\theta_1 \cdot i)(\rho_2 \cos\theta_2 + \rho_2 \sin\theta_2 \cdot i) =$$
$$= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2 \cdot i + \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \cdot i + \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 \, i^2) =$$
$$= \rho_1 \cdot \rho_2 \left((\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + (\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \cos\theta_2 \sin\theta_1) i \right) =$$
$$= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\cos(\theta_1+\theta_2) + \sin(\theta_1+\theta_2)\, i)$$

QUINDI IL PRODOTTO HA MODULO $\rho_1 \cdot \rho_2$ E ARGOMENTO $\theta_1 + \theta_2$

OSS. 4

IL SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLA PROPOSIZIONE 1 PERMETTE DI DETERMINARE FACILMENTE POTENZE E RADICI DI UN NUMERO COMPLESSO

DEF. 3

DATI $w_0, z_0 \in \mathbb{C}$ E DATO $n \in \mathbb{N}$, CON $n \geq 2$, DIREMO CHE w_0 È RADICE n-ESIMA DI z_0 SE $(w_0)^n = z_0$

ESEMPIO 2

TROVARE TUTTE LE RADICI QUARTE DI $z_0 = -8 + 8\sqrt{3} \cdot i$

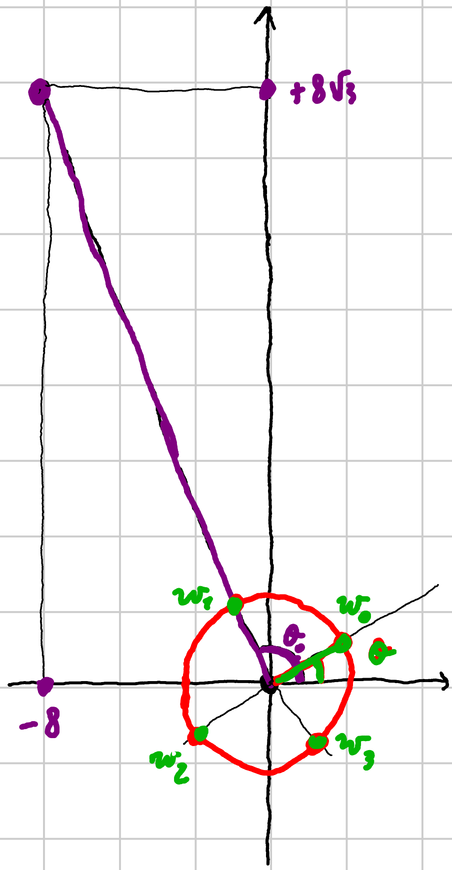
SI HA

$$|z_0| = \sqrt{8^2 + 8^2 \cdot 3} = 8 \cdot \sqrt{1+3} = 16$$

DETTO $\theta_0 = \arg(z_0)$ DEVE ESSERE:

$$\cos\theta_0 = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2} \qquad \sin\theta_0 = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

QUINDI $\theta_0 = \frac{2}{3}\pi$. DI CONSEGUENZA OGNI SUA RADICE QUARTA w DEVE AVERE $|w| = \sqrt[4]{16} = 2$ E DETTO $\theta = \arg(w)$ DEVE ESSERE $4\theta = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ CIOÈ $\theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$.



SI OTTENGONO QUINDI PER θ I SEGUENTI 4 VALORI COMPRESI TRA 0 E 2π:

$$\theta = \frac{\pi}{6} \qquad \theta = \frac{2}{3}\pi \qquad \theta = \frac{7}{6}\pi \qquad \theta = \frac{5}{3}\pi$$

QUINDI LE CORRISPONDENTI 4 RADICI QUARTE SONO:

$$w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$w_1 = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}\,i$$

$$w_2 = 2\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$w_3 = 2\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}\,i$$

OPERANDO NEL CASO GENERALE ESATTAMENTE COME IN QUESTO ESEMPIO SI OTTIENE:

PROPOSIZIONE 2

SIA $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ E SIA $z_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$, ALLORA DETTI $\rho = \sqrt[n]{|z_0|}$ E $\theta = \frac{1}{n}\arg(z_0)$, CI SONO ESATTAMENTE n RADICI n-ESIME DI z_0 E SONO DATE DALLA FORMULA:

$$w_k = \rho(\cos\theta_k + \sin\theta_k \cdot i) \qquad k = 0, \dots, n-1$$

DOVE PER OGNI $k = 0, \dots, n-1$ SI HA $\theta_k = \theta + k \cdot \frac{2\pi}{n}$.

DEF 4

DATO $z = a + ib$ DEFINIAMO $e^z = e^a \cdot (\cos b + i\sin b)$.

OSS. 5

CON TALE NOTAZIONE VALE LA REGOLA $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$.

INFATTI, PRESI $z_1 = a + bi$ E $z_2 = \alpha + \beta i$, SI HA:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{a}(\cos b + i \sin b) \cdot e^{\alpha}(\cos\beta + i \sin\beta) =$$

$$= e^{a+\alpha}(\cos b \cos\beta + i \sin b \cos\beta + i \sin\beta \cos b + i^2 \sin b \sin\beta) =$$

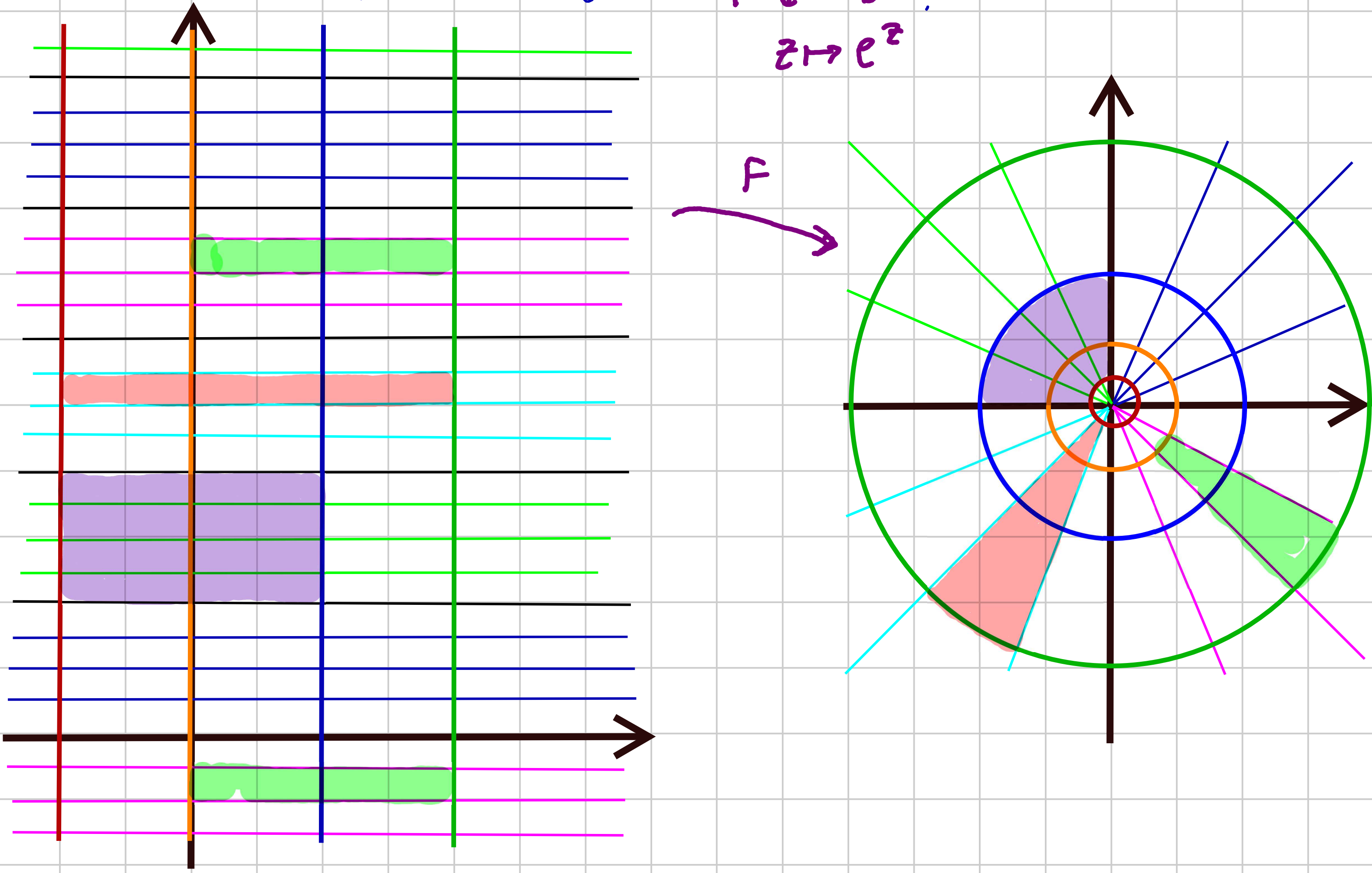
$$= e^{a+\alpha}\left((\cos b \cos\beta - \sin b \sin\beta) + (\sin b \cos\beta + \cos b \sin\beta) i\right) =$$

$$= e^{a+\alpha}\left(\cos(b+\beta) - i \sin(b+\beta)\right) =$$

$$= e^{(a+\alpha)+(b+\beta)i} = e^{z_1+z_2}$$

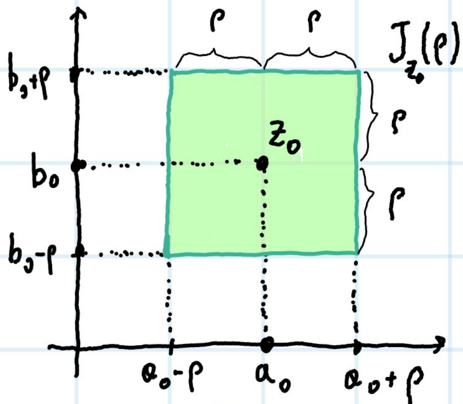
$\boxed{\text{OSS. 6}}$

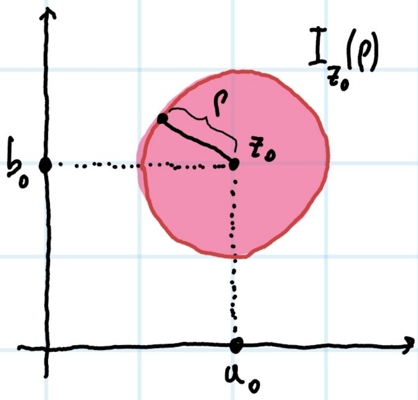
È UTILE VISUALIZZARE L'APPLICAZIONE $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:
$$z \mapsto e^z$$



Lezione 24

Successioni e serie di numeri complessi





DEF. 1 DATI $z_0=a_0+b_0 i\in\mathbb{C}$

E $\rho>0$ DEFINIAMO:

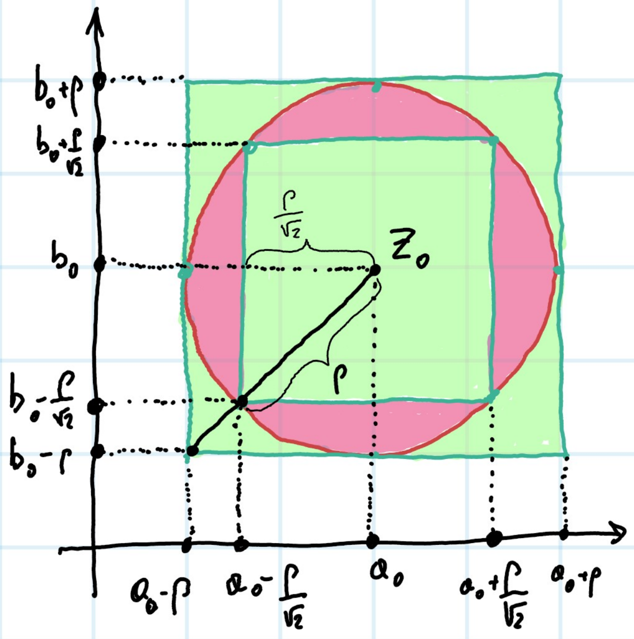
$$I_{z_0}(\rho)=\{z=a+bi\in\mathbb{C} \mid |z-z_0|<\rho\}$$

E

$$J_{z_0}(\rho)=\{z=a+bi\in\mathbb{C} \mid |a-a_0|<\rho \text{ E } |b-b_0|<\rho\}$$

CHIAMEREMO $I_{z_0}(\rho)$ INTORNO SFERICO DI z_0 DI RAGGIO ρ (ZONA COLORATA IN ROSA IN FIGURA)

E $J_{z_0}(\rho)$ INTORNO QUADRATO DI z_0 DI AMPIEZZA ρ (ZONA COLORATA IN VERDE IN FIGURA)



OSS. 1 CON SEMPLICI CALCOLI (VEDI FIGURA)

SI TROVA CHE

$$J_{z_0}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)\subset I_{z_0}(\rho)\subset J_{z_0}(\rho)$$

PER OGNI $\rho>0$ E PER OGNI $z_0\in\mathbb{C}$.

IN PARTICOLARE, FISSATO $z_0\in\mathbb{C}$, SI NOTI CHE,

COMUNQUE SI PRENDA UN SUO INTORNO DI UNO DEI DUE TIPI, È SEMPRE POSSIBILE TROVARE UN INTORNO DELL'ALTRO TIPO IN ESSO CONTENUTO.

VEDREMO CHE, GRAZIE A QUESTO, LA TOPOLOGIA SU $\mathbb{C}$ DA ESSI INDOTTA È LA STESSA.

OSS. 2 UNA VOLTA STABILITO CHI SONO GLI INTORNI DI UN PUNTO, SIAMO IN GRADO DI DEFINIRE I CONCETTI DI INTERNO, ESTERNO, FRONTIERA, ECC. ESATTAMENTE COME SI ERA GIÀ FATTO SU $\mathbb{R}$. AD ESEMPIO, DATI $A \subset \mathbb{C}$ E $z \in \mathbb{C}$, DIRE CHE z È INTERNO AD A SIGNIFICA DIRE CHE ESISTE $\rho > 0$ TALE CHE $I_z(\rho) \subset A$. LASCIAMO ALLO STUDENTE IL COMPITO DI DEFINIRE IL RESTO DEI CONCETTI. SI NOTI CHE, GRAZIE ALL'OSS. 1, USARE $I_z(\rho)$ O $J_z(\rho)$ PORTA SEMPRE AGLI STESSI RISULTATI.

DEF. 2 DATA UNA SUCCESSIONE (z_n) A VALORI IN $\mathbb{C}$ E DATO $\tilde{z} \in \mathbb{C}$, DIREMO CHE $\lim_{n \to +\infty} z_n = \tilde{z}$, O EQUIVALENTEMENTE CHE $z_n \to z$ PER $n \to +\infty$, SE SUCCEDE CHE:

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ DEFINITIVAMENTE IN } n \text{ SI HA } |z_n - \tilde{z}| < \varepsilon.$$

PROPOSIZIONE 1 DATA LA SUCCESSIONE $(z_n) = (a_n + b_n i)$ A VALORI IN $\mathbb{C}$ E DATO $\tilde{z} = \tilde{a} + \tilde{b} i \in \mathbb{C}$, È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE

(1) $z_n \to \tilde{z}$ PER $n \to +\infty$.

(2) $a_n \to \tilde{a}$ E $b_n \to \tilde{b}$ PER $n \to +\infty$.

DIMO BASTA OSSERVARE CHE:

$$(1) \iff \forall \varepsilon > 0, \text{ DEFINITIVAMENTE IN } n,\ z_n \in I_{\tilde{z}}(\varepsilon)$$

E CHE:

$$(2) \iff \forall \varepsilon > 0, \text{ DEFINITIVAMENTE IN } n,\ z_n \in J_{\tilde{z}}(\varepsilon)$$

QUINDI LA LORO EQUIVALENZA È CONSEGUENZA IMMEDIATA DELL' $\boxed{\text{OSS. 1}}$.

$\boxed{\text{OSS. 3}}$ LA $\boxed{\text{PROPOSIZIONE 1}}$ PERMETTE DI DIMOSTRARE "QUASI GRATIS" PER PER LE SUCCESSIONI A VALORI IN $\mathbb{C}$ LA MAGGIOR PARTE DEI TEOREMI GIÀ DIMOSTRATI PER LE SUCCESSIONI IN $\mathbb{R}$. LA VERIFICA VIENE LASCIATA ALLO STUDENTE. QUI CI LIMITIAMO, COME ESEMPIO, A DIMOSTRARE IL SEGUENTE:

$\boxed{\text{TEO. 1}}$ DATE LE SUCCESSIONI $(z_n) = (a_n + b_n i)$ E $(s_n) = (\alpha_n + \beta_n i)$, A VALORI IN $\mathbb{C}$, TALI CHE $z_n \to z = a + bi \in \mathbb{C}$ E $s_n \to s = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$.

ALLORA $z_n \cdot s_n \longrightarrow z \cdot s$.

$\boxed{\text{DIMO}}$ GRAZIE ALLA $\boxed{\text{PROPOSIZIONE 1}}$, DA $z_n \to z$ E $s_n \to s$ SEGUE CHE:

$$(1) \qquad a_n \to a, \quad b_n \to b, \quad \alpha_n \to \alpha, \quad \beta_n \to \beta.$$

MA ALLORA, SICCOME:

$$z_n \cdot s_n = (a_n + b_n i) \cdot (\alpha_n + \beta_n i) = (a_n \alpha_n - b_n \beta_n) + (a_n \beta_n + \alpha_n b_n) i,$$

E INOLTRE, GRAZIE A (1), SI HA

$$a_n \alpha_n - b_n \beta_n \to a\alpha - b\beta \quad \text{E} \quad a_n \beta_n + \alpha_n b_n \to a\beta + \alpha b,$$

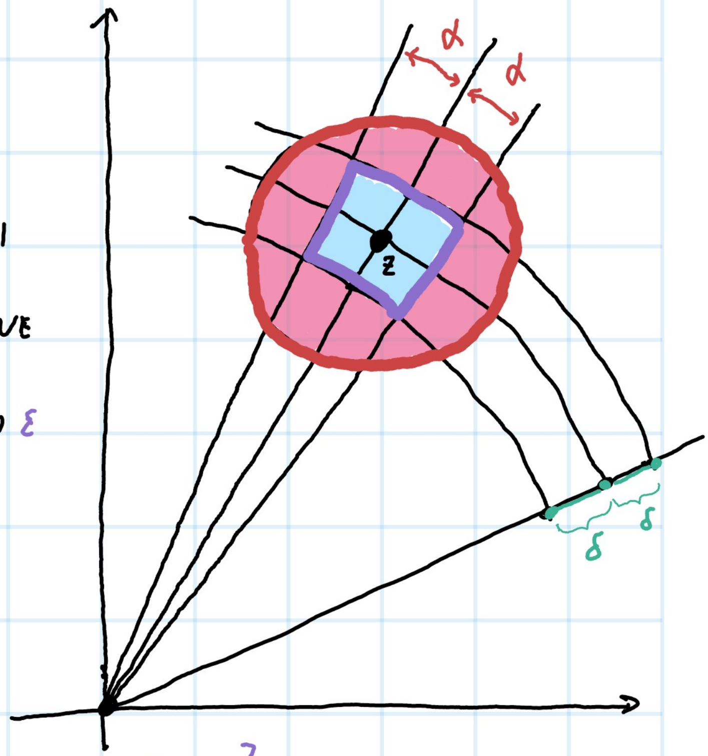
POSSIAMO DI NUOVO INVOCARE LA $\boxed{\text{PROPOSIZIONE 1}}$ E OTTENERE CHE:

$$z_n \cdot s_n \longrightarrow (a\alpha - b\beta) + (a\beta + \alpha b) i = z \cdot s.$$

OSS. 4 TALVOLTA, SE SI DEVE MOSTRARE CHE $\tilde{z}_n \to \tilde{z}$ E $z \neq 0$, PUÒ SUCCEDERE CHE IL MODO PIÙ COMODO DI FARLO SIA VERIFICARE SEPARATAMENTE CHE:

(1) $|\tilde{z}_n| \to |\tilde{z}|$

(2) $\arg(\tilde{z}_n) \to \arg(\tilde{z})$

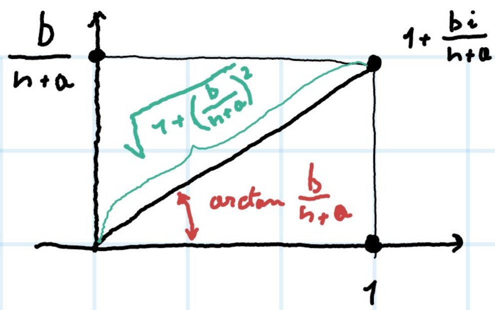


IL FATTO CHE DA (1) E (2) SEGUA CHE $z_n \to \tilde{z}$, SI VERIFICA FACILMENTE MOSTRANDO CHE, COMUNQUE SI PRENDA UN INTORNO SFERICO DI $\tilde{z}$ DI RAGGIO ε (CIOÈ IL CERCHIO ROSA IN FIGURA) È SEMPRE POSSIBILE TROVARE $\alpha, \delta > 0$ TALI CHE, DETTI $\tilde{\rho} = |\tilde{z}|$ E $\tilde{\theta} = \arg(\tilde{z})$, L'INSIEME

$W_{\tilde{z}}(\alpha,\beta) = \left\{ z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\rho - \tilde{\rho}| < \delta \text{ E } |\theta - \tilde{\theta}| < \alpha \right\}$, CHE IN FIGURA È AZZURRO, È TUTTO CONTENUTO IN $I_{\tilde{z}}(\varepsilon)$. INFATTI, SE SI PRENDE $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ E $\alpha = \frac{\varepsilon}{4\tilde{\rho}}$, SI OTTIENE:

$$
\begin{aligned}
|z - \tilde{z}| &= \left| \rho(\cos\theta + i\sin\theta) - \tilde{\rho}(\cos\tilde{\theta} + i\sin\tilde{\theta}) \right| = \\
&= \left| (\rho - \tilde{\rho})(\cos\theta + i\sin\theta) + \tilde{\rho}\left((\cos\theta - \cos\tilde{\theta}) + i(\sin\theta - \sin\tilde{\theta}) \right) \right| \le \\
&\le |\rho - \tilde{\rho}| \cdot |\cos(\theta) + i\sin\theta| + \tilde{\rho}\left(|\cos\theta - \cos\tilde{\theta}| + |\sin\theta - \sin\tilde{\theta}| \right) < \\
&< \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 + \tilde{\rho} \cdot \left(|\theta - \tilde{\theta}| + |\theta - \tilde{\theta}| \right) \le \frac{\varepsilon}{2} + \tilde{\rho} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{4\tilde{\rho}} + \frac{\varepsilon}{4\tilde{\rho}} \right) = \varepsilon
\end{aligned}
$$

ESEMPIO 1 MOSTRARE CHE $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{a + bi}{n} \right)^n = e^{a+bi}$



$\boxed{\text{SOL.}}$ SI HA:

$$\left(1+\frac{a+bi}{n}\right)^n=\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{1+\frac{a}{n}+\frac{bi}{n}}{1+\frac{a}{n}}\right)^n=$$

(2) $$=\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{\frac{bi}{n}}{1+\frac{a}{n}}\right)^n=$$

$$=\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{bi}{n+a}\right)^n$$

OSSERVIAMO PERÒ (VEDI FIGURA) CHE:

$$\rho_n=\left|\left(1+\frac{bi}{n+a}\right)^n\right|=\left|1+\frac{bi}{n+a}\right|^n=\left(\sqrt{1+\frac{b^2}{(n+a)^2}}\right)^n=\left(1+\frac{b^2}{(n+a)^2}\right)^{\frac{n}{2}}=\left(\left(1+\frac{b^2}{(n+a)^2}\right)^{(n+a)^2}\right)^{\frac{n}{2(n+a)^2}}\longrightarrow\left(e^{b^2}\right)^0=1$$

$$\theta_n=\arg\left(\left(1+\frac{bi}{n+a}\right)^n\right)=n\arg\left(1+\frac{bi}{n+a}\right)=n\cdot\arctan\frac{b}{n+a}\to b$$

DI CONSEGUENZA

$$\left(1+\frac{bi}{n+a}\right)^n\to z \quad \text{CON} \quad |z|=1 \ \text{ E } \ \arg(z)=b$$

CIOÈ $z=e^{ib}$, QUINDI LA (2) DIVENTA:

$$\left(1+\frac{a+bi}{n}\right)^n=\dots=\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{bi}{n+a}\right)^n\to e^a\cdot e^{bi}=e^{a+bi}$$

Lezione 25

Successioni e serie di numeri complessi (II)

ES. 1 MOSTRARE CHE $\boxed{\lim_{n\to+\infty} z^n = \begin{cases} 0 & \text{SE } |z|<1 \\ 1 & \text{SE } z=1 \\ \text{NON ESISTE} & \text{IN OGNI ALTRO CASO} \end{cases}}$ (1)

SOLUZIONE SE $|z|<1$ ALLORA $|z|^n \to 0$. DI CONSEGUENZA ANCHE $|z^n-0| \to 0$, PERCHÉ $|z^n-0| = |z^n| = |z|^n \to 0$. CIÒ SIGNIFICA CHE $z^n \to 0$.

SE INVECE $|z|>1$ SI HA $|z|^n \to +\infty$. QUINDI z^n NON PUÒ AVERE LIMITE FINITO, PERCHÉ SE FOSSE $z^n \to \tilde{z}$ DOVREBBE ESSERE ANCHE $|z|^n = |z^n| \to |\tilde{z}| \in \mathbb{R}$, IN CONTRADDIZIONE COL FATTO CHE $|z|^n \to +\infty$.

RESTA DA STUDIARE IL CASO $|z|=1$.

IN TAL CASO, SE $z=1$ ALLORA, PER OGNI $n\in\mathbb{N}$ SI HA $z^n=1$ E QUINDI $z^n\to 1$.

SE INVECE $|z|=1$ MA $z\neq 1$, SI HA:

$$|z^{n+1}-z^n| = |z^n\cdot(z-1)| = |z|^n\cdot|z-1| = 1^n\cdot|z-1| = |z-1|$$

QUINDI

$$\lim_{n\to+\infty} |z^{n+1}-z^n| = |z-1| \neq 0 \qquad (2)$$

E DI CONSEGUENZA NON PUÒ ESISTERE $z_0\in\mathbb{C}$ TALE CHE $z^n\to z_0$ PERCHÉ ALTRIMENTI SI AVREBBE ANCHE $z^{n+1}\to z_0$ E QUINDI SI OTTERREBBE $|z^{n+1}-z^n|\to 0$ IN CONTRASTO CON LA (2).

QUESTO COMPLETA LA VERIFICA CHE VALE (1).

ES. 2 MOSTRARE CHE $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{z^n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{SE } |z|\leq 1 \\ \text{NON ESISTE} & \text{SE } |z|>1 \end{cases}}$

SOLUZIONE SE $|z|\leq 1$ SI HA $\left|\frac{z^n}{n}\right| = \frac{|z|^n}{n} \leq \frac{1}{n}$, DA CUI SEGUE CHE $\left|\frac{z^n}{n}\right| \to 0$ E QUINDI ANCHE CHE $\frac{z^n}{n} \to 0$.

SE INVECE $|z|>1$, ALLORA $\left|\frac{z^n}{n}\right| \geq \frac{|z|^n}{n} \to +\infty$, QUINDI $\lim_{n\to+\infty} \frac{z^n}{n}$ NON ESISTE.

ES. 3 MOSTRARE CHE $\lim_{n\to+\infty} \frac{z^n+1}{z^n-1} = \begin{cases} 1 & |z|>1 \\ -1 & |z|<1 \end{cases}$

PROBLEMA PER CASA: RIFLETTERE SU COSA SUCCEDE SE $|z|=1$. IN PARTICOLARE, DESCRIVERE L'INSIEME DEGLI $|z|=1$ TALI CHE LA SUCCESSIONE È DEFINITA PER OGNI $n \in \mathbb{N}-\{0\}$

SOLUZIONE SE $|z|<1$ SI HA $z^n \to 0$ E QUINDI:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{z^n+1}{z^n-1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

PERCHÉ $\left|\frac{1}{z}\right|<1$ E QUINDI $\left(\frac{1}{z}\right)^n \to 0$

SE INVECE $|z|>1$ SI HA:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{z^n+1}{z^n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{z^n}}{1-\frac{1}{z^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\left(\frac{1}{z}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{z}\right)^n} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

DEF. 1 DATA LA SUCCESSIONE (z_n) A VALORI IN $\mathbb{C}$ DIREMO CHE $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ CONVERGE AL VALORE $\lambda \in \mathbb{C}$ SE $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lambda$ DOVE $S_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$.

ES. 4 MOSTRARE CHE $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \begin{cases} \text{CONVERGE A } \frac{1}{1-z} & \text{SE } |z|<1. \\ \text{NON CONVERGE} & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$

SOLUZIONE SE $|z|\geq 1$ LA SERIE NON PUÒ CONVERGERE PERCHÉ IL TERMINE NON È INFINITESIMO. SE INVECE $|z|<1$ SI HA:

$$S_n = 1+z+z^2+\dots+z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{z}{1-z}\cdot z^n \to \frac{1}{1-z} - \frac{z}{1-z}\cdot 0 = \frac{1}{1-z}$$

OSS. 1 PER LE SERIE A TERMINI COMPLESSI VALGONO (CIRCA) GLI STESSI RISULTATI GIÀ DIMOSTRATI PER LE SERIE REALI. NON STAREMO A DIMOSTRARLI SUBITO TUTTI, MA SOLO OCCASIONALMENTE QUANDO CI SERVONO. UNO STRUMENTO UTILE PER FARLO È IL SEGUENTE (OVVIO) LEMMA:

LEMMA 1 DATE (a_n) E (b_n) SUCCESSIONI A VALORI IN $\mathbb{R}$. PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ SIA $z_n = a_n + b_n i \in \mathbb{C}$. ALLORA

(3) $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z_n \text{ CONVERGE A } z = a + bi\right) \iff \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ CONVERGE AD } a \text{ E } \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ CONVERGE A } b\right)$

DIMO SIANO (S_n), (s_n) E (σ_n) LE SUCCESSIONI DELLE SOMME FINITE DI $\sum z_n$, $\sum a_n$ E $\sum b_n$ RISPETTIVAMENTE. SI HA:

$$S_n = z_0 + z_1 + \dots + z_n = (a_0 + b_0 i) + (a_1 + b_1 i) + \dots + (a_n + b_n i) =$$

$$= (a_0 + a_1 + \dots + a_n) + (b_0 + b_1 + \dots + b_n) i = s_n + \sigma_n i$$

DI CONSEGUENZA:

$$(S_n \to z = a + bi) \iff (s_n \to a \text{ E } \sigma_n \to b)$$

CHE EQUIVALE AD AFFERMARE (3).

TEO. 1 (CR. CONV. ASSOLUTA) DATA LA SUCCESSIONE (z_n) A VALORI IN $\mathbb{C}$, SE $\sum |z_n|$ CONVERGE ALLORA ANCHE $\sum z_n$ CONVERGE.

DIMO SICCOME $|z_n|^2 = a_n^2 + b_n^2$, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ SI HA:

$$0 \leq |a_n| \leq |z_n| \quad \text{E} \quad 0 \leq |b_n| \leq |z_n|$$

DI CONSEGUENZA, GRAZIE AL CR. DEL CONFRONTO, DALLA CONVERGENZA DI $\sum |z_n|$ SEGUE QUELLA DI $\sum |a_n|$ E $\sum |b_n|$. MA SICCOME PER LE SERIE A TERMINI IN $\mathbb{R}$ SAPPIAMO GIÀ CHE IL CRITERIO DELLA CONV. ASSOLUTA VALE, POSSIAMO CONCLUDERE CHE ANCHE $\sum a_n$ E $\sum b_n$ CONVERGONO E QUINDI, PER IL LEMMA 1, CONVERGE ANCHE $\sum z_n$.

ES. 5 PER QUALI VALORI DI $z \in \mathbb{C}$ CONVERGE LA SERIE $\overbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3} z^n}^{(4)}$?

SOLUZIONE PER PRIMA COSA VEDIAMO PER QUALI $z \in \mathbb{C}$ CONVERGE LA SERIE DEI MODULI, CIOÉ:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3} z^n \right| \tag{5}$$

ALLA QUALE, ESSENDO A TERMINI POSITIVI, POSSIAMO APPLICARE IL CRITERIO DELLA RADICE. SI HA:

$$\sqrt[n]{\left| \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3} \cdot z^n \right|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \cdot |z| \longrightarrow e \cdot |z|$$

DI CONSEGUENZA **(5)** È SICURAMENTE CONVERGENTE SE $e\cdot|z|<1$, CIOÈ SE $|z|<\frac{1}{e}$.

QUINDI, GRAZIE AL CR. DELLA CONV. ASSOLUTA, SE $|z|<\frac{1}{e}$ ANCHE LA **(4)**.

INVECE IL FATTO CHE LA **(5)** DIVERGA PER $|z|>\frac{1}{e}$ NON CI DÀ ALCUNA INFORMAZIONE SUL COMPORTAMENTO DI **(4)**. PER MOSTRARE CHE **(4)** NON CONVERGE FACCIAMO INVECE VEDERE CHE IL SUO TERMINE NON È INFINITESIMO, MOSTRANDO ANZI CHE IL SUO MODULO TENDE A $+\infty$. INFATTI SE $|z|>\frac{1}{e}$, PRENDIAMO $\lambda\in\mathbb{R}$ TALE CHE $|z|>\lambda>\frac{1}{e}$, E ABBIAMO:

$$\left|\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}\cdot z^n\right| = \underbrace{\boxed{\frac{\left(\frac{|z|}{\lambda}\right)^n}{n}}}_{\to +\infty}\cdot\left(\underbrace{\boxed{\lambda\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}}_{\to \lambda e}\right)^{\boxed{n}\to+\infty} \longrightarrow (+\infty)\cdot\underbrace{\boxed{(\lambda e)^{+\infty}}}_{\to+\infty} = +\infty$$

PERCHÉ $|z|>\lambda$

PERCHÉ $\lambda>\frac{1}{e}$

QUINDI $\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}\cdot z^n$ NON È INFINITESIMO, PERCIÒ **(4)** NON PUÒ CONVERGERE.

RIMANE ORA DA STUDIARE COSA SUCCEDE QUANDO $|z|=\frac{1}{e}$, CIOÈ $z=e^{-1+ib}$.

NEL CASO PARTICOLARE $b=0$, CIOÈ $z=\frac{1}{e}$, LA SERIE È A TERMINI POSITIVI E SI HA:

$$\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{n}e^{n^3\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-n} = \frac{1}{n}\cdot e^{n^3\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^4}+O\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)-n} =$$

$$= \frac{1}{n}e^{-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{1}{n}\left[1+\left(-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

QUINDI, SICCOME $\sum\frac{1}{n}$ DIVERGE, ANCHE LA NOSTRA SERIE DIVERGE PER IL CR. CONF. ASINT.

INFINE NEL CASO GENERALE, CIOÈ CON $z=\frac{e^{ib}}{e}$, LA **(4)** DIVENTA $\sum a_n$ CON

$$a_n = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^n\left(e^{ib}\right)^n = \dots = \left(\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)e^{ibn} = \frac{1}{n}e^{ibn}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

MA SICCOME $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE, LA **(4)** HA LO STESSO CARATTERE DI:

(6) $$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{ibn}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\cos(bn)}{n}+\frac{\sin(bn)}{n}i\right)$$

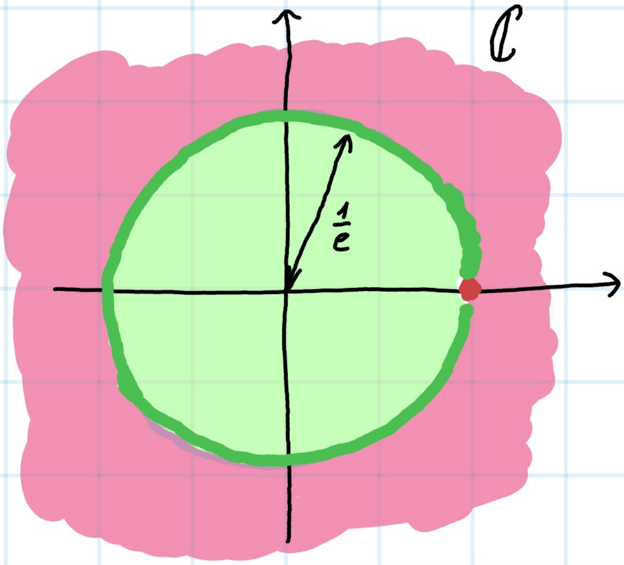
A QUESTO PUNTO, SICCOME SAPPIAMO GIÀ CHE

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(bn)}{n} \quad \text{E} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(bn)}{n}$$

CONVERGONO PER IL CR. DI ABEL, POSSIAMO APPLICARE IL $\boxed{\text{LEMMA 1}}$ E CONCLUDERE CHE ANCHE (6) CONVERGE.

QUINDI CONVERGE ANCHE (4).

RIASSUMENDO, LA (4) CONVERGE PER OGNI z TALE CHE $|z| \leq 1$, ESCLUSO $z = 1$, CIOÈ PER GLI z CHE APPARTENGONO ALLA ZONA COLORATA DI VERDE NELLA FIGURA.



Analisi Matematica 2 - CdL Matematica - docente: Callegari - (9 maggio 2022)

Lezione 26

Successioni e serie di numeri complessi (III)

TEO. 1 DATA LA SUCCESSIONE (a_n) A VALORI IN $\mathbb{C}$, PONIAMO

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

CON CIÒ INTENDIAMO ANCHE CHE $\rho = 0$ SE $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ E CHE $\rho = +\infty$ SE $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$

ALLORA PER OGNI FISSATO $z \in \mathbb{C}$ LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

(a) CONVERGE SE $|z| < \rho$

(b) NON CONVERGE SE $|z| > \rho$.

DIMO COMINCIAMO DA (a). USEREMO IL CRITERIO DELLA RADICE PER MOSTRARE CHE $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n|$ CONVERGE, DOPODICHÉ LA TESI SEGUIRÀ GRAZIE AL CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA. COMINCIAMO DAL CASO $0 < \rho < +\infty$.

SI NOTI CHE PER OGNI $\varepsilon > 0$ SI HA

VALE DEFINITIVAMENTE IN n PERCHÉ $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\rho}$

(1) $$\sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\frac{1}{\rho} + \varepsilon}{\frac{1}{|z|}} \cdot \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\frac{1}{\rho} + \varepsilon} < \frac{\frac{1}{\rho} + \varepsilon}{\frac{1}{|z|}} \cdot 1 = \frac{\frac{1}{\rho} + \varepsilon}{\frac{1}{|z|}}$$

MA POICHÉ $|z| < \rho$, CIOÈ $\frac{1}{\rho} < \frac{1}{|z|}$, SI PUÒ SEMPRE SCEGLIERE $\varepsilon > 0$ TALE CHE $\frac{1}{\rho} < \frac{1}{\rho} + \varepsilon < \frac{1}{|z|}$. IN TAL MODO LA COSTANTE $\frac{\frac{1}{\rho} + \varepsilon}{\frac{1}{|z|}}$ CHE COMPARE IN FONDO A (1) È STRETTAMENTE MINORE DI 1.

CIÒ SIGNIFICA CHE NELLA (1) C'È SCRITTO CHE $\sqrt[n]{|a_n z^n|}$ È DEFINITIVAMENTE MINORE DI UNA COSTANTE MINORE DI 1. QUINDI $\sum |a_n z^n|$ CONVERGE GRAZIE AL CRITERIO DELLA RADICE. DI CONSEGUENZA CONVERGE ANCHE $\sum a_n z^n$ GRAZIE AL CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA. QUESTO COMPLETA IL CASO $0<\rho<+\infty$.

NEL CASO $\rho=0$ INVECE NON C'È NIENTE DA DIMOSTRARE, MENTRE NEL CASO $\rho=+\infty$ DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ CONVERGE PER OGNI $z\in\mathbb{C}$. MA QUESTO È IMMEDIATO PERCHÉ $\rho=+\infty$ SIGNIFICA $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}=0$, CIOÈ $\sqrt[n]{|a_n|}\to 0$, QUINDI, QUALSIASI SIA $z\in\mathbb{C}$, SI HA:

$$\sqrt[n]{|a_n\cdot z^n|}=|z|\cdot\sqrt[n]{|a_n|}\to 0<1$$

DA CUI SEGUE CHE $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n z^n|$ CONVERGE PER IL CRITERIO DELLA RADICE E QUINDI $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ CONVERGE PER IL CRITERIO DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA.

QUESTO COMPLETA LA DIMOSTRAZIONE DI (a).

PASSIAMO A (b) E COMINCIAMO DAL CASO $0<\rho<+\infty$.

SICCOME $|z|>\rho$ SI OTTIENE CHE $\frac{1}{|z|}<\frac{1}{\rho}=\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ E QUINDI $\frac{1}{|z|}$ NON È UN MAGGIORANTE DEFINITIVO DI $\sqrt[n]{|a_n|}$. QUINDI FREQUENTEMENTE IN n SI HA $\sqrt[n]{|a_n|}>\frac{1}{|z|}$, DA CUI SEGUE CHE:

FREQUENTEMENTE IN n

$$(2)\qquad \sqrt[n]{|a_n\cdot z^n|}=|z|\cdot\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\frac{1}{|z|}}>1$$

DALLA (2), ELEVANDO TUTTO ALLA n, SI OTTIENE CHE:

$$|a_n z^n| > 1^n = 1 \quad \text{FREQUENTEMENTE IN } n.$$

NE SEGUE CHE $a_n z^n$ NON È INFINITESIMA E QUINDI $\sum a_n z^n$ NON CONVERGE. QUESTO COMPLETA IL CASO $0<\rho<+\infty$.

OVVIAMENTE SE $\rho=+\infty$ NON C'È NIENTE DA DIMOSTRARE, MENTRE INVECE SE $\rho=0$ SI HA $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}=+\infty$, CIOÈ $\sqrt[n]{|a_n|}$ NON HA MAGGIORANTI DEFINITIVI E DI CONSEGUENZA, PER OGNI $z\neq 0$, SI OTTIENE

(3) $$\sqrt[n]{|a_n \cdot z^n|} = \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\frac{1}{|z|}} > 1 \quad \text{FREQUENTEMENTE IN } n$$

PERCHÉ $\frac{1}{|z|}$ NON È UN MAGGIORANTE DEFINITIVO.

DALLA (3), ELEVANDO TUTTO ALLA n, SI OTTIENE CHE, FREQUENTEMENTE IN n, ANCHE $|a_n \cdot z^n|>1$. DI CONSEGUENZA $a_n z^n \not\to 0$ E QUINDI $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ NON PUÒ ESSERE CONVERGENTE.

$\boxed{\text{ES. 1}}$ STUDIARE, AL VARIARE DI $z\in\mathbb{C}$, LA CONVERGENZA DELLA SERIE:

(4) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(1-\frac{2+\cos \pi n}{(n-1)!}\right)^{n!} \cdot z^n$$

NEL NOSTRO CASO:

$$a_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2+\cos \pi n}{(n-1)!}\right)^{n!}$$

QUINDI PER n PARI, CIOÈ PER $n=2k$, SI HA $\cos(2k\pi)=1$, QUINDI

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[2k]{\frac{1}{2k}\cdot\left(1-\frac{3}{(2k-1)!}\right)^{(2k)!}} = \frac{1}{\sqrt[2k]{2k}}\cdot\left(1-\frac{3}{(2k-1)!}\right)^{(2k-1)!} \longrightarrow e^{-3}$$

INVECE, PER n DISPARI, CIOÈ PER $n=2k+1$, SI HA $\cos((2k+1)\pi)=-1$ QUINDI

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[2k+1]{\frac{1}{2k+1}\cdot\left(1-\frac{1}{(2k)!}\right)^{(2k+1)!}} = \frac{1}{\sqrt[2k+1]{2k+1}}\left(1-\frac{1}{(2k)!}\right)^{(2k)!} \longrightarrow e^{-1}$$

QUINDI IL RAGGIO DI CONVERGENZA ρ È DATO DA:

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = e^{-1}$$

CIOÈ $\rho = e$.

QUESTO SIGNIFICA CHE, GRAZIE AL $\boxed{\text{TEO. 1}}$, LA SERIE **(4)** CONVERGE SE $|z|<e$ MENTRE DIVERGE SE $|z|>e$. SE INVECE $|z|=e$ IL $\boxed{\text{TEO. 1}}$ NON SI APPLICA E BISOGNA STUDIARE IL COMPORTAMENTO "A MANO". PRENDIAMO DUNQUE $z = e\cdot e^{bi}$ CON $0\le b<2\pi$ E CERCHIAMO PER QUALI VALORI DI b CONVERGE. COMINCIAMO CON $b=0$, OVVERO CON $z=e$. LA SERIE DIVENTA:

$$\text{(5)} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(1-\frac{2+\cos(\pi n)}{(n-1)!}\right)^{n!}\cdot e^n$$

CHE È A TERMINI POSITIVI.

SE INDICHIAMO CON A_n IL SUO TERMINE GENERICO, PER n DISPARI, CIOÈ PER $n=2k+1$, SI HA:

(6)

$$A_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}\cdot\left(1-\frac{1}{(2k)!}\right)^{(2k+1)!}\cdot e^{2k+1} = \frac{1}{2k+1}\, e^{(2k+1)!\,\ln\left(1-\frac{1}{(2k)!}\right)+(2k+1)} =$$

$$= \frac{1}{2k+1}\cdot e^{(2k+1)!\left(-\frac{1}{(2k)!}-\frac{1}{2\cdot((2k)!)^2}+o\left(\left(\frac{1}{(2k)!}\right)^3\right)\right)+2k+1} =$$

$$= \frac{1}{2k+1}\cdot e^{-\cancel{(2k+1)}-\frac{(2k+1)}{2\cdot(2k)!}+o\left(\frac{2k+1}{((2k)!)^2}\right)+\cancel{(2k+1)}} =$$

$$= \frac{1}{2k+1}\cdot e^{o\left(\frac{1}{k}\right)} = \frac{1}{2k+1}\left(1+o\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \frac{1}{2k+1}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

INVECE PER n PARI, CIOÈ PER $n=2k$, SI HA:

(7)

$$A_{2k} = \frac{1}{2k}\left(1-\frac{3}{(2k-1)!}\right)^{(2k)!}\cdot e^{2k} =$$

$$= \frac{1}{2k}\left(\left(1-\frac{3}{(2k-1)!}\right)^{(2k-1)!}\cdot e\right)^{2k} \le$$

$$\le \frac{1}{2k}\cdot\left(\frac{1}{e^2}\cdot e\right)^{2k} = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{e}\right)^{2k}$$

$\boxed{\text{VALE DEFINITIVAMENTE IN } n}$

PERCHÉ $\left(1-\frac{3}{(2k-1)!}\right)^{(2k-1)!} \to \frac{1}{e^3}$ E

QUINDI È DEFINITIVAMENTE

MINORE DI $\frac{1}{e}$

SI RICORDI CHE STUDIARE LA CONVERGENZA DI (5) SIGNIFICA STABILIRE SE ESISTE FINITO $\lim_{n\to+\infty} S_n$ DOVE $S_n = (A_1+A_2+\dots+A_n)$. CHIARAMENTE, VISTO CHE $A_n \to 0$, BASTA STABILIRE SE ESISTE FINITO $\lim_{n\to+\infty} S_{2k}$, PERCHÉ

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2k+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(S_{2k}+A_{2k+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} S_{2k}$$

ORA, PER COMODITÀ, IMMAGINIAMO DI SOMMARE SEPARATAMENTE TERMINI PARI E DISPARI, CIOÈ PONIAMO $D_k = A_1+A_3+\dots+A_{2k-1}$ E $P_k = A_2+A_4+\dots+A_{2k}$, COSICCHÉ:

$$\lim_{k\to+\infty} S_{2k} = \lim_{k\to+\infty} (D_k + P_k).$$

SI NOTI CHE STABILIRE SE ESISTONO FINITI $\lim_{k\to+\infty} D_k$ E $\lim_{k\to+\infty} P_k$, EQUIVALE A STUDIARE IL CARATTERE DI $\sum_{k=1}^{+\infty} A_{2k-1}$ E $\sum_{k=1}^{+\infty} A_{2k}$, RISPETTIVAMENTE. INOLTRE, GRAZIE A (7), SI HA CHE $|A_{2k}| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{2k}$, QUINDI $\sum_{k=1}^{+\infty} A_{2k}$ CONVERGE, CIOÈ $\lim_{k\to+\infty} P_k$ ESISTE FINITO.

QUESTO SIGNIFICA CHE IL CARATTERE DI (5) COINCIDE CON QUELLO DI $\sum_{k=1}^{+\infty} A_{2k-1}$.

MA GRAZIE A (6), SICCOME $\sum_{n=1}^{+\infty} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ CONVERGE, IL CARATTERE DI $\sum_{k=1}^{+\infty} A_{2k-1}$ È LO STESSO DI $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1}$, CHE NON CONVERGE. QUINDI (5) NON CONVERGE.

INFINE TRATTIAMO IL CASO $z = e \cdot e^{bi}$ CON $b \in (0, 2\pi)$. LA SERIE DA STUDIARE QUINDI È:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{2+\cos(\pi n)}{(n-1)!}\right)^{n!} \cdot e^n \cdot \left(\cos(bn) + i \sin(bn)\right) \tag{8}$$

SI NOTI CHE SE, FISSATO b, INDICHIAMO CON B_n IL TERMINE n-ESIMO DI (8), E CONTINUIAMO AD INDICARE CON A_n IL TERMINE n-ESIMO DI (5), SI HA:

$$B_n = A_n \cdot \left(\cos(nb) + i \sin(nb)\right)$$

DI CONSEGUENZA $|B_n| = |A_n|$ E QUINDI, RAGIONANDO COME PER LA (5), SI TROVA CHE $\sum_{k=1}^{+\infty} B_{2k}$ CONVERGE E QUINDI IL CARATTERE DI (8) COINCIDE CON QUELLO DI $\sum_{k=1}^{+\infty} B_{2k-1}$, CHE, GRAZIE A (6), SI PUÒ SCRIVERE:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k-1} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \cdot \left(\cos(bk) + i \sin(bk)\right) \tag{9}$$

A QUESTO PUNTO, OSSERVIAMO CHE:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sigma\left(\frac{1}{k^2}\right)\cdot\left(\cos(bk)+i\sin(bk)\right)$$

CONVERGE GRAZIE AL CRITERIO DELLA CONV. ASSOLUTA, PERCHÉ:

$$\left|\sigma\left(\frac{1}{k^2}\right)\cdot\left(\cos(bk)+i\sin(bk)\right)\right| = \left|\sigma\left(\frac{1}{k^2}\right)\right| = \sigma\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

DI CONSEGUENZA IL CARATTERE DI **(9)** È UGUALE A QUELLO DI

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1}\left(\cos(bk)+i\sin(bk)\right)$$

CIOÈ DI:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\cos(bk)}{2k-1}+\frac{\sin(bk)}{2k-1}\cdot i\right)$$

CHE CONVERGE PERCHÉ, GRAZIE AL CRITERIO DI ABEL, SAPPIAMO GIÀ CHE SONO CONVERGENTI LE DUE SERIE REALI:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(bk)}{2k-1} \quad \text{E} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(bk)}{2k-1}$$

QUINDI **(8)** CONVERGE PER OGNI $b\in(0,2\pi)$.

DUNQUE RIASSUMENDO LA NOSTRA SERIE **(4)** CONVERGE SE E SOLO SE $z\in\Omega$ DOVE:

$$\Omega=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\le e \text{ MA CON } z\ne e\}$$

TEO. 2

PER OGNI $z\in\mathbb{C}$ LA SERIE $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$ CONVERGE AL VALORE e^z.

DIMO

ABBIAMO GIÀ DIMOSTRATO CHE QUESTO È VERO NEL CASO REALE E ABBIAMO OSSERVATO CHE IN MODO DEL TUTTO ANALOGO SI RIESCE A DIMOSTRARE CHE $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$ E $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$

CONVERGONO A $\cos x$ E $\sin x$, RISPETTIVAMENTE, PER OGNI $x \in \mathbb{R}$.

INOLTRE, IL FATTO CHE $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ CONVERGA PER OGNI $z \in \mathbb{C}$ SEGUE SUBITO DAL $\boxed{\text{TEO. 1}}$

PERCHÉ IL SUO RAGGIO DI CONVERGENZA ρ È $+\infty$ PERCHÉ:

$$\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

MOSTRIAMO ORA CHE LA TESI VALE SE $z = yi$. SI HA:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \dots + \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \dots + \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} \right) + \left((iy) + \frac{(iy)^3}{3!} + \dots + \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \right) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{y^k}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \cos y + i \sin y = e^{iy}$$

SE ORA MOSTRIAMO CHE PER OGNI $z, s \in \mathbb{C}$ VALE L'IDENTITÀ

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+s)^n}{n!} \qquad (10)$$

ALLORA POTREMO CONCLUDERE PERCHÉ UTILIZZANDOLA CON $z = x$ E $s = iy$ SI OTTIENE

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+iy)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \right) = e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy}$$

QUINDI DIMOSTRIAMO (10):

(... CONTINUA NELLA LEZ. 27 ...)

Lezione 27

Serie sui complessi (IV) - Topologia di R^n

(... CONTINUA DALLA LEZ. 26)

DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE $\forall z, s \in \mathbb{C}$ SI HA:

(1) $$\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(z+s)^h}{h!} = \left(\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{z^h}{h!}\right) \cdot \left(\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{s^h}{h!}\right)$$

CIOÈ CHE

(2) $$\lim_{h \to +\infty} \overbrace{\sum_{k=0}^{h} \frac{(z+s)^k}{k!}}^{A_n} = \lim_{h \to +\infty} \overbrace{\left(\left(\sum_{p=0}^{n} \frac{z^p}{p!}\right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{n} \frac{s^q}{q!}\right)\right)}^{B_n}$$

SI NOTI CHE:

$$A_n = \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{z^p}{p!}\right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{n} \frac{s^q}{q!}\right) = \sum_{\substack{p=0,\dots,n \\ q=0,\dots,n}} \frac{z^p \cdot s^q}{p! \cdot q!} = \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{\substack{p+q=k \\ p \le n \\ q \le n}} \frac{z^p \cdot s^q}{p! \cdot q!}\right) =$$

SI NOTI CHE $\boxed{\text{QUESTA}}$ CONDIZIONE È SUPERFLUA QUANDO $k \le n$ QUINDI

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{p+q=k} \frac{z^p \cdot s^q}{p! \cdot q!} + \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{\substack{p+q=k \\ p \le n \\ q \le n}} \frac{z^p \cdot s^q}{p! \cdot q!}$$

E CHE:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(z+s)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} \cdot \sum_{p+q=k} \frac{k!}{p!\,q!} \cdot z^p \cdot s^q\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{p+q=k} \frac{z^p \cdot z^q}{p! \cdot q!}\right)$$

IN PARTICOLARE SI HA:

$$A_n = B_n + \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{\substack{p+q=k \\ p \le n \\ q \le n}} \frac{z^p \cdot s^q}{p! \cdot q!}$$

PERCHÉ SAPPIAMO CHE $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(|z|+|s|)^n}{n!}$ CONVERGE E QUINDI DETTA (S_n) LA SUCCESSIONE DELLE SUE SOMME FINITE SI HA:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(|z|+|s|)^k}{k!} = S_{2n} - S_n \to 0$$

QUINDI

$$|A_n - B_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{\substack{p+q=k \\ p \le n \\ q \le n}} \frac{z^p \cdot s^q}{p! \cdot q!} \right| \le \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{\substack{p+q=k \\ p \le n \\ q \le n}} \frac{|z|^p \cdot |s|^q}{p! \cdot q!} \le \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{p+q=k} \frac{|z|^p \cdot |s|^q}{p! \cdot q!} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{1}{k!} \sum_{p+q=k} \frac{k!}{p! \cdot q!} \cdot |z|^p \cdot |s|^q \right) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(|z|+|s|)^k}{k!} \xrightarrow{\text{PER } n \to 0} 0$$

QUESTO DIMOSTRA (2) E QUINDI ANCHE (1).