Analisi Matematica (II modulo)- Lez. 11

Titolo nota 15/08/2014

1 aprile 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

SERIE NUMERICHE

DEF. 1 DATA LA SUCCESSIONE $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ A VALORI IN $\mathbb{R}$, INDICHIAMO CON $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ LA SUCCESSIONE DELLE SUE SOMME FINITE, CIOÈ $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$. ALLORA DIREMO CHE LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$:

(a) CONVERGE A $\lambda \in \mathbb{R}$, SE $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lambda$

(b) DIVERGE A $+\infty$ $(-\infty)$, SE $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ $(-\infty)$

(c) È INDETERMINATA, SE $\lim_{n\to+\infty} S_n$ NON ESISTE.

ES. 1 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ CONVERGE A 1 (SERIE DI MENGOLI).

SI NOTI CHE:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

È TELESCOPICA

DI CONSEGUENZA:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{n}} - \cancel{\frac{1}{n+1}} + \cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

QUINDI:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1$$

CIOÈ LA SERIE CONVERGE A 1.

ES. 2 $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ (SERIE GEOMETRICA)

SI HA:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \begin{cases} n+1 & \text{SE } q = 1 \\ \boxed{\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}} & \text{SE } q \neq 1 \end{cases}$$

SI OTTIENE OSSERVANDO CHE
$(1+q+q^2+\dots+q^n)\cdot(1-q) =$
$= 1 - \cancel{q} + \cancel{q} - \cancel{q^2} + \cancel{q^2} - \cancel{q^3} + \cancel{\dots} + \cancel{q^n} - q^{n+1} =$
$= 1 - q^{n+1}$

QUINDI, SE $-1<q<1$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

CIÒ SIGNIFICA CHE PER $-1<q<1$ LA SERIE CONVERGE A $\frac{1}{1-q}$.

AD ESEMPIO $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ CONVERGE A 2.

SE INVECE $q=1$ SI HA:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$$

CIOÈ LA SERIE DIVERGE A $+\infty$.

LO STESSO ACCADE SE $q>1$, PERCHÉ

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1-q} + \frac{1}{q-1}\cdot q^{n+1}\right) = +\infty$$

SE INVECE $q\leq -1$, $\lim_{n\to+\infty} S_n$ NON ESISTE PERCHÈ S_{2k} E S_{2k+1} HANNO LIMITI DIVERSI.

INFATTI:

$$\lim_{k\to+\infty} S_{2k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1-q^{2k+1}}{1-q} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1+|q|^{2k+1}}{1+|q|} = \begin{cases} 1 & \text{SE } q=-1 \\ +\infty & \text{SE } q<-1 \end{cases}$$

$$\lim_{k\to+\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1-q^{2k+2}}{1-q} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1-|q|^{2k+2}}{1+|q|} = \begin{cases} 0 & \text{SE } q=-1 \\ -\infty & \text{SE } q<-1 \end{cases}$$

QUINDI PER $q\leq -1$ LA SERIE È INDETERMINATA.

RIASSUMENDO:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \begin{cases} \text{CONVERGE A } \frac{1}{1-q} & \text{SE } -1<q<1 \\ \text{DIVERGE A } +\infty & \text{SE } q\geq 1 \\ \text{È INDETERMINATA} & \text{SE } q\leq -1. \end{cases}$$

SI NOTINO I CASI PARTICOLARI $q=1$ E $q=-1$:

$\sum_{n=0}^{+\infty} 1$ DIVERGE A $+\infty$

$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ È INDETERMINATA.

$\boxed{\text{ES. 3}}$ SONO RICONDUCIBILI A SERIE GEOMETRICHE LE FORMULE PER TRASFORMARE I NUMERI DECIMALI PERIODICI IN FRAZIONI. AD ESEMPIO:

$$0,1\bar{6} = 0,16666\ldots = \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \frac{6}{10^5} + \ldots = \frac{1}{10} + \frac{6}{10^2}\cdot\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^n} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{6}{100}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{10} + \frac{6}{100}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{10} + \frac{6}{100}\cdot\frac{10}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6}$$

OSS. 1 NELL'ESEMPIO PRECEDENTE, AD UN CERTO PUNTO, ABBIAMO BARATO.

PIÙ PRECISAMENTE, QUANDO ABBIAMO SCRITTO:

$$\frac{6}{10^2}+\frac{6}{10^3}+\frac{6}{10^4}+\frac{6}{10^5}+\cdots=\frac{6}{10^2}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots\right)$$

OVVERO, PIÙ FORMALMENTE:
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{6}{10^{n+2}}=\frac{6}{10^2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{10^n}$$

ABBIAMO DATO PER SCONTATO CHE LA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DELLA MOLTIPLICAZIONE RISPETTO ALL'ADDIZIONE, CHE VALE PER LE SOMME FINITE, VALGA AUTOMATICAMENTE ANCHE PER LE SERIE. ORA, PER FORTUNA, CIÒ È VERO (VEDI TEO. 1).

TUTTAVIA CI SONO ALTRE PROPRIETÀ, AD ESEMPIO LA ASSOCIATIVA E LA COMMUTATIVA, CHE PUR VALENDO PER LE SOMME FINITE, NON VALGONO PER LE SERIE.

PER FARCENE UN'IDEA, SE PRENDIAMO $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$, IMMAGINIAMO DI ASSOCIARE I SUOI TERMINI A DUE A DUE NEI SEGUENTI MODI:

$$(1+(-1))+(1+(-1))+(1+(-1))+(1+(-1))+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}\left((-1)^{2n}+(-1)^{2n+1}\right)=\sum_{n=0}0=0$$

$$1+((-1)+1)+((-1)+1)+((-1)+1)+((-1)+\cdots)\cdots=1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left((-1)^{2n+1}+(-1)^{2n+2}\right)=1+\sum_{n=0}^{+\infty}0=1$$

PUR PARTENDO DALLA STESSA SERIE, METTENDO LE PARENTESI IN MODI DIVERSI, ABBIAMO OTTENUTO 2 SERIE CHE CONVERGONO A VALORI DIVERSI.

PER QUANTO RIGUARDA LA PROPRIETÀ COMMUTATIVA, SI OSSERVI CHE PRESA $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ DEFINITA DA:

$$a_n=\begin{cases}-1 & \text{SE } n \text{ È MULTIPLO DI } 3\\ 1 & \text{ALTRIMENTI}\end{cases}$$

ALLORA $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ È UN RIORDINAMENTO DI $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ (CIOÈ HANNO GLI STESSI TERMINI, A MENO DELL'ORDINE) TUTTAVIA $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n$ SAPPIAMO CHE È INDETERMINATA, MENTRE $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ DIVERGE A $+\infty$ PERCHÈ LA SUA SUCCESSIONE DELLE SOMME FINITE $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ È DATA DA:

$$S_n=\begin{cases}k-1 & \text{SE } n=3k\\ k & \text{SE } n=3k+1\\ k+1 & \text{SE } n=3k+2\end{cases}\qquad k\in\mathbb{N}$$

QUINDI $\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$.

TEO. 1 (PROPRIETÀ ELEMENTARI DELLE SERIE)

DATE LE SUCCESSIONI $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ E $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ALLORA VALGONO LE PROPRIETÀ:

IL VICEVERSA NON VALE, VEDI ES. 4

(1) SE $\sum a_n$ CONVERGE ALLORA $a_n \to 0$ (COND. NECESSARIA DI CONVERGENZA)

(2) SE $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ ALLORA $\sum a_n$ E $\sum \lambda a_n$ HANNO LO STESSO CARATTERE. INOLTRE, QUANDO CONVERGONO SI HA $\sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n$ (PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA)

(3) SE $\sum a_n$ E $\sum b_n$ CONVERGONO ALLORA $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ CONVERGE A $\alpha\sum a_n + \beta \sum b_n$

(4) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ E $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ HANNO SEMPRE LO STESSO CARATTERE

(5) SE $\sum a_n$ CONVERGE ALLORA $\sum b_n$ E $\sum (a_n + b_n)$ HANNO LO STESSO CARATTERE.

(6) SE $\sum a_n$ CONVERGE ALLORA $\lim\limits_{m\to+\infty} \sum\limits_{n=m}^{+\infty} a_n = 0$

(7) SE $a_n \geq 0$, DEFINITIVAMENTE IN n, ALLORA $\sum a_n$ NON PUÒ ESSERE INDETERMINATA.

DIMO

(1) PER OGNI $n\in\mathbb{N}$ SIA $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$. DIRE CHE $\sum a_n$ CONVERGE SIGNIFICA CHE $\exists \ell \in \mathbb{R}$ TALE CHE $S_n \to \ell$. SI OSSERVI CHE:

$$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n$$

QUINDI:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

DA CUI SEGUE:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \ell - \ell = 0$$

QUINDI SE $\sum a_n$ CONVERGE ALLORA $a_n \to 0$. (IL VICEVERSA NON VALE, VEDI ES. 4)

(2) SIANO (S_n) E (σ_n) LE SUCCESSIONI DELLE SOMME FINITE DI $\sum a_n$ E $\sum \lambda a_n$ RISPETTIVAMENTE.

ALLORA SI HA:

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} (\lambda a_0 + \lambda a_1 + \dots + \lambda a_n) =$$
$$= \lambda \cdot \lim (a_0 + a_1 + \dots + a_n) = \lambda \lim S_n$$

QUINDI $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n$ E $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ HANNO LO STESSO COMPORTAMENTO (CIOÈ QUANDO UNO È FINITO (O INFINITO O NON ESISTE) L'ALTRO FA LO STESSO).

QUESTO SIGNIFICA CHE $\sum a_n$ E $\sum \lambda a_n$ HANNO SEMPRE LO STESSO CARATTERE.

IN PARTICOLARE, QUANDO CONVERGONO, $\sum \lambda a_n$ CONVERGE A $\lambda \cdot \sum a_n$.

(3) SIANO (S_n), (σ_n) E (ς_n) LE SUCCESSIONI DELLE SOMME FINITE DI $\sum a_n$, $\sum b_n$ E $\sum(\alpha a_n+\beta b_n)$, RISPETTIVAMENTE. SI HA:

$$\lim_{n\to+\infty} \varsigma_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}(\alpha a_k+\beta b_k) = \lim_{n\to+\infty}\left(\alpha\sum_{k=0}^{n} a_k+\beta\sum_{k=0}^{n} b_k\right) =$$

$$= \alpha\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k+\beta\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} b_k =$$

$$= \alpha\lim_{n\to+\infty} S_n+\beta\lim_{n\to+\infty}\sigma_n =$$

$$= \alpha\sum a_n+\beta\sum b_n$$

È UN ABUSO DI LINGUAGGIO CHE SI FA SPESSO: ABBIAMO INDICATO CON $\sum a_n$ E $\sum b_n$ NON LE SERIE, MA I VALORI A CUI CONVERGONO

QUINDI $\sum(\alpha a_n+\beta b_n)$ CONVERGE A $\alpha\sum a_n+\beta\sum b_n$.

(4) SIANO $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ E $(\varsigma_n)_{n\geq n_0}$ LE SUCCESSIONI DELLE SOMME FINITE DI $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ E $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$, RISPETTIVAMENTE.

ALLORA PER OGNI $n>n_0$ SI HA

$$S_n = \underbrace{a_0+a_1+a_2+\dots+a_{n_0-1}}_{S_{n_0}}+\underbrace{a_{n_0}+a_{n_0+1}+\dots+a_n}_{\varsigma_n} = S_{n_0}+\varsigma_n$$

QUINDI:

$$\lim_{n\to+\infty}\varsigma_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n-S_{n_0}) = -S_{n_0}+\lim_{n\to+\infty} S_n$$

QUINDI: $\lim_{n\to+\infty}\varsigma_n$ E $\lim_{n\to+\infty} S_n$ HANNO LO STESSO COMPORTAMENTO.

CIÒ SIGNIFICA CHE $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ E $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ HANNO LO STESSO CARATTERE.

(5) SIANO (S_n), (σ_n) E (ς_n) LE SUCCESSIONI DELLE SOMME FINITE DI $\sum a_n$, $\sum b_n$ E $\sum(a_n+b_n)$ RISPETTIVAMENTE. ALLORA

$$\varsigma_n = \sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k+\sum_{k=0}^{n} b_k = S_n+\sigma_n$$

QUINDI:
$$\lim_{n\to+\infty}\varsigma_n = \lim_{n\to+\infty}(S_n+\sigma_n)$$

MA, SICCOME $\sum a_n$ CONVERGE, $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ESISTE FINITO, QUINDI $\lim_{n\to+\infty}(S_n+\sigma_n)$ HA LO STESSO

COMPORTAMENTO DI $\lim_{n \to +\infty} S_n$. CIÒ SIGNIFICA CHE $\sum b_n$ E $\sum (a_n + b_n)$ HANNO LO STESSO CARATTERE.

(6) SIA λ IL VALORE A CUI CONVERGE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ E SIA (S_n) LA SUCCESSIONE DELLE SOMME FINITE DI $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
DAL PUNTO (4) SAPPIAMO GIÀ CHE $\sum_{n=m}^{+\infty} a_n$ CONVERGE AD UN VALORE λ_m DATO DA:

$$\lambda_m = -S_{m-1} + \lambda$$

MA, SICCOME $S_m \to \lambda$, ABBIAMO:

$$\lim_{m \to +\infty} \lambda_m = \lim_{m \to +\infty} (-S_{m-1} + \lambda) = -\lambda + \lambda = 0 .$$

(7) SIA (S_n) LA SUCCESSIONE DELLE SOMME FINITE DI $\sum a_n$. SE PER $n \geq n_0$ SI HA $a_n \geq 0$ ALLORA PER $n \geq n_0$ SI HA:

PERCHÉ $a_n \geq 0$

$$S_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1}$$

QUINDI DA n_0 IN POI S_n È CRESCENTE. DI CONSEGUENZA $\lim_{n \to +\infty} S_n$ ESISTE E QUINDI $\sum a_n$ NON È INDETERMINATA

ES. 4 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ DIVERGE.

SIA (S_n) LA SUCCESSIONE DELLE SUE SOMME FINITE. SICCOME LA SERIE È A TERMINI POSITIVI: SAPPIAMO CHE (S_n) È CRESCENTE E QUINDI HA SEMPRE LIMITE. PER TROVARLO BASTA DUNQUE PRENDERE LA SOTTOSUCCESSIONE DI (S_n) CHE PREFERIAMO. SCEGLIAMO (S_{2^k}). SI HA:

$$S_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{4} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k}\right)}_{2^{k-1}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} =$$

$$= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{k} = 1 + \frac{1}{2}k$$

QUINDI $S_{2^k} \geq 1 + \frac{1}{2}k$ DA CUI SEGUE CHE $\lim_{k \to +\infty} S_{2^k} = +\infty$. QUINDI $\sum \frac{1}{n}$ DIVERGE.

TEO. 2 (CRITERIO DI CAUCHY)

DATA LA SUCCESSIONE (a_n) A VALORI IN $\mathbb{R}$. ALLORA È EQUIVALENTE AFFERMARE CHE:

(1) $\sum a_n$ CONVERGE

(2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE $\forall n, m \in \mathbb{N}$ CON $n \geq m \geq n_0$ SI HA $\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon$

DIMO

SIA (S_n) LA SUCCESSIONE DELLE SOMME FINITE DI $\sum a_n$.

ALLORA LA **(1)** EQUIVALE A:

(1') (S_n) HA LIMITE FINITO PER $n \to +\infty$

INVECE LA **(2)** EQUIVALE A:

(2') $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE $\forall n, m \in \mathbb{N}$ CON $n \geq m \geq n_0$ SI HA $| S_n - S_{m-1} | < \varepsilon$

MA LA **(2')** SIGNIFICA CHE (S_n) È DI CAUCHY QUINDI SAPPIAMO GIÀ CHE È EQUIVALENTE A **(1')**.

ES 5 $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \log_2 n \rfloor}}{n}$ NON CONVERGE.

GRAZIE AL CRITERIO DI CAUCHY BASTA FAR VEDERE CHE COMUNQUE SI PRENDA n_0, $\exists^{no}$ $n, m \geq n_0$

TALI CHE $\sum_{k=m}^{n} a_k \geq \frac{1}{2}$.

QUINDI, COMUNQUE SIA FISSATO n_0 PRENDIAMO $h \in \mathbb{N}$ TALE CHE $2^{2h} > n_0$ E PONIAMO

$m = 2^{2h}$ E $n = 2^{2h+1} - 1$. OTTENIAMO:

PERCHÉ $k < 2^{2h+1}$

PERCHÉ CI SONO 2^{2h} TERMINI TUTTI UGUALI A $\frac{1}{2^{2h+1}}$

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{(-1)^{\lfloor \log_2 k \rfloor}}{k} = \sum_{k=2^{2h}}^{2^{2h+1}-1} \frac{(-1)^{\lfloor \log_2 k \rfloor}}{k} = \sum_{k=2^{2h}}^{2^{2h+1}-1} \frac{1}{k} > \sum_{k=2^{2h}}^{2^{2h+1}-1} \frac{1}{2^{2h+1}} = 2^{2h} \cdot \frac{1}{2^{2h+1}} = \frac{1}{2}$$

PERCHÉ ESSENDO $2^{2h} \leq k < 2^{2h+1}$ SI HA $2h \leq \log_2 k < 2h+1$, QUINDI $\lfloor \log_2 k \rfloor = 2h$

ABBIAMO QUINDI MOSTRATO CHE COMUNQUE SI FISSI $n_0 \in \mathbb{N}$ ESISTONO $n, m \in \mathbb{N}$

CON $n > m > n_0$ TALI CHE $\sum_{k=m}^{n} a_k > \frac{1}{2}$.

QUESTO SIGNIFICA CHE LA CONDIZIONE **(2)** DEL CRITERIO DI CAUCHY NON È SODDISFATTA

PER $\varepsilon < \frac{1}{2}$. QUINDI $\sum a_n$ NON CONVERGE.

---

3 aprile 2020 (9.00-11.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

SERIE NUMERICHE (...CONTINUA...)
(SERIE A TERMINI POSITIVI)

TEO. 1 (CRITERIO DEL CONFRONTO)

DATE $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ E $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ TALI CHE PER OGNI $n\in\mathbb{N}$ SI ABBIA

(1) $$0\le a_n \le b_n$$

ALLORA:

(1) $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ CONVERGE $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ CONVERGE

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ DIVERGE $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ DIVERGE

DIMO

(1) SIA (s_n) LA SUCCESSIONE DELLE SOMME FINITE DI $\sum a_n$ E (σ_n) QUELLA DI $\sum b_n$. DA (1) SEGUE CHE SONO ENTRAMBE CRESCENTI E CHE:

(2) $$s_n \le \sigma_n \quad \text{PER OGNI } n\in\mathbb{N}$$

DALLA MONOTONIA DI (s_n) SEGUE CHE $\lim_{n\to+\infty} s_n$ ESISTE. PER MOSTRARE CHE È FINITO BASTA OSSERVARE CHE, GRAZIE A (2), SI HA:

$$0\le \lim_{n\to+\infty} s_n \le \lim_{n\to+\infty} \sigma_n$$

E CHE $\lim_{n\to+\infty}\sigma_n$ ESISTE FINITO PERCHÈ $\sum b_n$ CONVERGE.

QUINDI $\lim_{n\to+\infty} s_n$ ESISTE FINITO, CIOÈ $\sum a_n$ CONVERGE.

(2) SEGUE BANALMENTE DA (1) PERCHÈ, SE PER ASSURDO $\sum a_n$ DIVERGESSE E $\sum b_n$ CONVERGESSE, DA (1) E DALLA CONVERGENZA DI $\sum b_n$ SEGUIREBBE CHE ANCHE $\sum a_n$ CONVERGE (ASSURDO).

OSS.1 GRAZIE AL FATTO CHE, PER OGNI $n_0 \in \mathbb{N}$, IL CARATTERE DI $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ E $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ È UGUALE A QUELLO DI $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ E $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, L'IPOTESI DEL $\boxed{\text{TEO. 1}}$ PUÒ ESSERE INDEBOLITA. OVVERO NON C'È BISOGNO CHE **(1)** VALGA PER OGNI n, MA BASTA CHE VALGA "DEFINITIVAMENTE IN n", CIOÈ DA UN CERTO n_0 IN POI.

LA STESSA COSA SI POTRÀ DIRE PER TUTTI I TEOREMI CHE FAREMO OGGI.

ES.1 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\cos n}}{n}$ DIVERGE.

INFATTI, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ SI HA:

$$\frac{e^{\cos n}}{n} \geq \frac{e^{-1}}{n} = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{n} > 0$$

QUINDI, SICCOME $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ DIVERGE, ANCHE $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{n}$ DIVERGE, QUINDI $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\cos n}}{n}$ DIVERGE PER IL CRIT. DEL CONFRONTO

ES.2 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ CONVERGE.

INFATTI VALE LA STIMA:

$$0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{6}{(n+1)(n+2)}$$

INFATTI, PER $n \geq 1$, SI HA $6n^2 \geq (n+1)(n+2)$ PERCHÉ:
$6n^2 = 2n \cdot 3n = (n+n)(n+2n) \geq (n+1)(n+2)$

MA:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{(n+1)(n+2)} = 6 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

CONVERGE PERCHÉ È LA SERIE DI MENGOLI

QUINDI $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ CONVERGE PER IL CRIT. DEL CONFRONTO.

ES.3 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\ln n}}$ CONVERGE.

SI NOTI CHE NON APPENA $n > e^2$ SI HA $\ln n > 2$ QUINDI:

$$0 < \frac{1}{n^{\ln n}} < \frac{1}{n^2}$$

VALE PER $n > e^2$

QUINDI, DAL FATTO CHE $\sum \frac{1}{n^2}$ CONVERGE, SEGUE CHE CONVERGE ANCHE $\sum \frac{1}{n^{\ln n}}$.

ES.4 $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$ DIVERGE.

STAVOLTA LA STIMA DA FARE È MENO OVVIA:

$$(\ln n)^{\ln(\ln n)} = e^{\ln\left((\ln n)^{\ln(\ln n)}\right)} = e^{\ln(\ln n)\cdot\ln(\ln n)} < e^{\sqrt{\ln n}\cdot\sqrt{\ln n}} = e^{\ln n} = n$$

VALE DEFINITIVAMENTE IN n PERCHÈ $\ln x = o(\sqrt{x})$ PER $x \to +\infty$

MA ALLORA DEFINITIVAMENTE IN n SI HA:

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} > \frac{1}{n}$$

QUINDI, SICCOME $\sum \frac{1}{n}$ DIVERGE, ANCHE $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$ DIVERGE.

TEO.2 (CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO)

DATE $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ E $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ A TERMINI STRETTAMENTE POSITIVI E TALI CHE:

(3) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in (0,+\infty)$$

ALLORA $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ E $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ HANNO LO STESSO CARATTERE.

DIM

DA **(3)** SEGUE CHE, DEFINITIVAMENTE IN n, SI HA:

$$\frac{1}{2}c \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2}c$$

CIOÈ:

(4) $$\frac{1}{2}c\cdot b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2}c\, b_n .$$

MA ALLORA, SE $\sum a_n$ CONVERGE, DA $\frac{1}{2}c\cdot b_n \leq a_n$ E DAL CRITERIO DEL CONFRONTO SEGUE CHE ANCHE $\sum b_n$ CONVERGE.

VICEVERSA, SE CONVERGE $\sum b_n$, LA CONVERGENZA DI $\sum a_n$ SEGUE DA $a_n \leq \frac{3}{2}c\cdot b_n$.

QUINDI $\sum a_n$ CONVERGE SE E SOLO SE $\sum b_n$ CONVERGE.

VISTO CHE NON POSSONO ESSERE INDETERMINATE (PERCHÈ SONO A TERMINI POSITIVI) SI PUÒ CONCLUDERE CHE HANNO SEMPRE LO STESSO CARATTERE.

ES. 5 $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$ DIVERGE

INFATTI, PER $n\to+\infty$ SI HA: $\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \approx \frac{1}{n+1} \approx \frac{1}{n}$ E $\sum\frac{1}{n}$ DIVERGE.

ES.6 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n - 2^n}$ CONVERGE

INFATTI, PER $n \to +\infty$ SI HA:

$$\frac{1}{3^n - 2^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} \approx \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

QUINDI LA NOSTRA SERIE SI COMPORTA COME $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$, CHE CONVERGE.

TEO. 3 (CRITERIO DELL'INTEGRALE)

SIA $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ POSITIVA E DECRESCENTE. ALLORA $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ E $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ HANNO LO STESSO CARATTERE.

DIMO

DAL FATTO CHE f È DECRESCENTE, PER OGNI $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, SI HA:

$$f(k) \leq f(x) \leq f(k-1) \qquad \forall x \in [k-1, k]$$

QUINDI INTEGRANDO SU $[k-1, k]$ SI OTTIENE:

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x) \leq f(k-1)$$

CHE, SOMMATA PER $k = 1, \dots, n$, FORNISCE:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(x) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

OVVERO, SE INDICHIAMO CON (S_n) LA SUCCESSIONE DELLE SOMME FINITE DI $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$:

(5) $$S_n - f(0) \leq \int_0^n f(x)\,dx \leq S_{n-1}$$

ORA, GRAZIE ALLA POSITIVITÀ DI $f(x)$, CIASCUNO DEI 3 MEMBRI DI (5) HA LIMITE PER $n \to +\infty$

SE $\sum f(n)$ CONVERGE ALLORA $\lim_{n\to+\infty} S_{n-1}$ È FINITO E QUINDI ANCHE $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(x)\,dx$ È FINITO (GRAZIE A (5)) E DA CIÒ SEGUE CHE $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE.

VICEVERSA, SE CONVERGE $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$, ALLORA È FINITO $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(x)\,dx$ E QUINDI, SEMPRE GRAZIE A (5), ANCHE $\lim_{n\to+\infty} (S_n - f(0))$ È FINITO. QUINDI $\lim_{n\to+\infty} S_n$ È FINITO E DUNQUE $\sum f(n)$ CONVERGE.

QUINDI $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ CONVERGE SE E SOLO SE CONVERGE $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

SICCOME CI SONO SOLO 2 POSSIBILITÀ (PERCHÉ $f(x) \geq 0$) QUESTO BASTA PER POTER DIRE CHE HANNO SEMPRE LO STESSO CARATTERE.

OSS.2 IL CRITERIO DELL'INTEGRALE CI PERMETTE DI INCREMENTARE "GRATIS" GLI GLI ESEMPI DI SERIE NOTEVOLI DA UTILIZZARE NEI CONFRONTI. AD ESEMPIO, D'ORA IN POI, POTREMMO DISPORRE ANCHE DI:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ CHE CONVERGE PER $\alpha > 1$

2) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ CHE CONVERGE QUANDO:
a) $\alpha > 1$ E $\beta \in \mathbb{R}$
b) $\alpha = 1$ E $\beta > 1$

INFATTI 1) E 2) SI COMPORTANO ESATTAMENTE COME:

A) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ CHE CONVERGE PER $\alpha > 1$

B) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx$ CHE CONVERGE QUANDO:
a) $\alpha > 1$ E $\beta \in \mathbb{R}$
b) $\alpha = 1$ E $\beta > 1$

ES 7 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ DIVERGE.

INFATTI:

$$\frac{1}{\ln(n!)} \geq \frac{1}{\ln(n^n)} = \frac{1}{n \ln n}$$

QUINDI, SICCOME ADESSO SAPPIAMO CHE $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ DIVERGE, GRAZIE AL CRITERIO DEL CONFRONTO POSSIAMO DIRE CHE DIVERGE ANCHE $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$

TEO.4 (CRITERIO DELLA RADICE)

DATA (a_n), A TERMINI NON NEGATIVI, ALLORA:

(1) SE $\exists \rho \in (0,1)$ TALE CHE, DEFINITIVAMENTE IN n, $\sqrt[n]{a_n} < \rho$, ALLORA $\sum a_n$ CONVERGE.

(2) SE, FREQUENTEMENTE IN n, $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, ALLORA $\sum a_n$ DIVERGE.

DIMO

(1) EQUIVALE A DIRE CHE, DEFINITIVAMENTE IN n, SI HA:

$$0 \leq a_n \leq \rho^n$$

MA, SICCOME $\rho \in (0,1)$, $\sum \rho^n$ È UNA SERIE GEOMETRICA CONVERGENTE, PER IL CRITERIO DEL CONFRONTO ANCHE $\sum a_n$ CONVERGE.

(2) È COME DIRE CHE $a_n \geq 1$ FREQUENTEMENTE IN n, QUINDI $a_n \not\to 0$ E PERCIÒ $\sum a_n$ NON CONVERGE.

OSS. 8 NEL CASO IN CUI $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ CRESCENDO, IL CRITERIO DELLA RADICE NON PERMETTE DI DIRE NULLA

TEO. 5 (CRITERIO DEL RAPPORTO)

DATA (a_n) A TERMINI POSITIVI, ALLORA:

(1) SE $\exists\, \rho \in (0,1)$ TALE CHE DEFINITIVAMENTE IN n $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho$ ALLORA $\sum a_n$ CONVERGE

(2) SE DEFINITIVAMENTE IN n $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ ALLORA $\sum a_n$ DIVERGE.

DIMO

(1) SAPPIAMO CHE SE MODIFICHIAMO UN NUMERO FINITO DI TERMINI DI UNA SERIE, IL CARATTERE NON CAMBIA.
QUINDI, SENZA PERDERE DI GENERALITÀ POSSIAMO SUPPORRE CHE LA DISUGUAGLIANZA:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho \tag{6}$$

VALGA $\forall n \in \mathbb{N}$, ANZICHÈ SOLO DEFINITIVAMENTE.

SI NOTI CHE LA (6) EQUIVALE A

$$a_{n+1} < \rho \cdot a_n \tag{7}$$

APPLICANDO RIPETUTAMENTE LA (7) SI OTTIENE

$$a_n < \rho a_{n-1} < \rho^2 a_{n-2} < \rho^3 a_{n-3} < \dots < \rho^n a_0$$

QUINDI, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$, ABBIAMO LA STIMA:

$$0 < a_n < a_0 \cdot \rho^n.$$

LA CONVERGENZA DI $\sum a_n$ SEGUE DUNQUE DAL CRITERIO DEL CONFRONTO E DAL FATTO CHE $\sum \rho^n$ CONVERGE IN QUANTO $\rho \in (0,1)$.

(2) SI NOTI CHE, ESSENDO $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, DIRE $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ EQUIVALE A DIRE $a_{n+1} \geq a_n$.
QUINDI SE TALE DISUGUAGLIANZA VALE DA UN CERTO $n_0 \in \mathbb{N}$ IN POI QUESTO SIGNIFICA CHE (a_n) È DEBOLMENTE CRESCENTE DA n_0 IN POI. QUINDI, ESSENDO $a_{n_0} > 0$, SI HA CHE $a_n \not\to 0$.
QUINDI $\sum a_n$ NON PUÒ CONVERGERE.

OSS. 9 NEL CASO IN CUI $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ CRESCENDO, IL CRITERIO DEL RAPPORTO NON PERMETTE DI DIRE NULLA

ES. 8 DIRE PER QUALI $A > 0$ CONVERGE LA SERIE $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! \cdot n^{n+1}}{(2n)!} \cdot A^n$.

USIAMO IL CRITERIO DEL RAPPORTO.

POICHÈ $a_n = \frac{n! \cdot n^{n+1}}{(2n)!} \cdot A^n$ SI HA:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\cdot(n+1)^{n+2}}{(2n+2)!}\cdot A^{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n!\cdot n^{n+1}}\cdot\frac{1}{A^n} =$$

$$= \frac{(n+1)\cdot(n+1)\cdot(n+1)^{n+1}}{(2n+2)(2n+1)}\cdot A\cdot\frac{1}{n^{n+1}} =$$

$$= \frac{A}{4}\cdot\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{A}{4}\cdot\underbrace{\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}}}_{\text{TENDE A 1 DECRESCENDO}}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}_{\text{TENDE AD } e \text{ DECRESCENDO}} \xrightarrow{\text{PER } n\to+\infty} \frac{A}{4}\cdot e \begin{cases} <1 & \text{SE } 0<A<\frac{4}{e} \\ =1 & \text{SE } A=\frac{4}{e} \\ >1 & \text{SE } A>\frac{4}{e} \end{cases}$$

QUINDI SE $0<A<\frac{4}{e}$ SI APPLICA IL PUNTO **(1)** DEL CRITERIO DEL RAPPORTO E SI OTTIENE CHE $\sum a_n$ CONVERGE

SE INVECE $A>\frac{4}{e}$ SI APPLICA IL PUNTO **(2)** DEL CR. DEL RAPPORTO E SI OTTIENE CHE $\sum a_n$ DIVERGE

SE INFINE $A=\frac{4}{e}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to 1$ MA, PER FORTUNA, CI TENDE DECRESCENDO (VEDI NOTE) QUINDI SI RICADE LO STESSO NEL PUNTO **(2)** DEL CRITERIO DEL RAPPORTO E QUINDI $\sum a_n$ DIVERGE.

RIASSUMENDO: $\sum a_n$ CONVERGE SE E SOLO SE $0<A<\frac{4}{e}$.

ES. 9 SIA (a_n) DEFINITA PER RICORRENZA DA $\begin{cases} a_0=1 \\ a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}-1 \end{cases}$. DIRE SE $\sum a_n$ CONVERGE.

LA RISPOSTA È SI PERCHÉ PER OGNI $n\in\mathbb{N}$ SI HA:

1) $a_n>0$ (PER INDUZIONE, PERCHÉ $a_0=1>0$ E SE $a_n>0$ ANCHE $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}-1>0$)

2) $\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{1}{2}$ (PERCHÉ $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}-1<\frac{1}{2}a_n$)

QUINDI PER IL CRITERIO DEL RAPPORTO $\sum a_n$ CONVERGE.

Analisi Matematica (II modulo)- Lez. 13

6 aprile 2020 (11.00-13.00) - docente: Prof. **Emanuele Callegari** - Università di Roma ***Tor Vergata***

SERIE NUMERICHE (...CONTINUA...)

(SERIE A TERMINI DI SEGNO QUALSIASI)

DEF. 1 DATA $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ A VALORI IN $\mathbb{R}$, DIREMO CHE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ È ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE SE $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ CONVERGE.

TEO. 1 (CRITERIO DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA)

DATA $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ A VALORI IN $\mathbb{R}$, SE $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ È ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE ALLORA È ANCHE CONVERGENTE.

DIMO

SAPPIAMO CHE:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \quad \text{CONVERGE}$$

E VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{CONVERGE.}$$

A TALE SCOPO DEFINIAMO LE SUCCESSIONI (b_n) E (c_n) NEL MODO SEGUENTE:

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad b_n = \max\{a_n, 0\}$$

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad c_n = \max\{-a_n, 0\}$$

(b_n) E (c_n) SONO RISPETTIVAMENTE PARTE POSITIVA E PARTE NEGATIVA DI (a_n)

NE SEGUE CHE $\forall n\in\mathbb{N}$ VALGONO LE STIME:

$$0 \le b_n \le |a_n| \qquad \text{E} \qquad 0 \le c_n \le |a_n|$$

MA ALLORA, GRAZIE AL CRITERIO DEL CONFRONTO E AL FATTO CHE $\sum |a_n|$ CONVERGE OTTENIAMO CHE:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \quad \text{E} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \quad \text{CONVERGONO.}$$

SI NOTI ORA CHE, $\forall n\in\mathbb{N}$, SI HA:

$$a_n = b_n - c_n$$

PERCHÉ SE $a_n \ge 0$ SI HA:

$b_n - c_n = \max\{a_n, 0\} + \max\{-a_n, 0\} = a_n + 0 = a_n$

MENTRE SE $a_n < 0$ SI HA:

$b_n - c_n = \max\{a_n, 0\} - \max\{-a_n, 0\} = 0 - (-a_n) = a_n$

QUINDI, DAL MOMENTO CHE $\sum b_n$ E $\sum c_n$ CONVERGONO, CONVERGE ANCHE $\sum(b_n - c_n)$, CIOÈ $\sum a_n$.

$\boxed{\text{OSS.1}}$ IL VICEVERSA DEL $\boxed{\text{TEO.1}}$ NON VALE. INFATTI ESISTONO SERIE CONVERGENTI CHE NON SONO ASSOLUTAMENTE CONVERGENTI, COME MOSTRA L'ESEMPIO CHE SEGUE.

$\boxed{\text{ES.1}}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ È CONVERGENTE MA NON ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE.

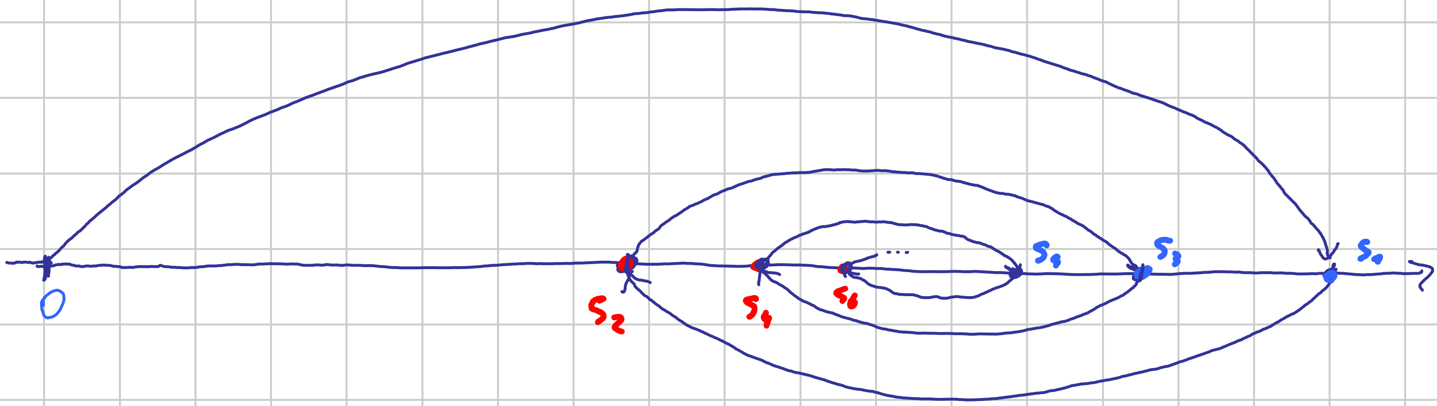
INFATTI LA SERIE DEI MODULI È $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, CHE SAPPIAMO DIVERGERE.

INVECE IL FATTO CHE $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ CONVERGA, SARÀ CONSEGUENZA IMMEDIATA DEL CRITERIO DI LEIBNIZ, CHE VEDIAMO TRA POCO.

AD OGNI MODO NON GUASTA (ANZI CI AIUTERÀ A SEGUIRE MEGLIO LA DIMOSTRAZIONE DEL CRITERIO DI LEIBNIZ) SE CI FACCIAMO PRIMA UN'IDEA INTUITIVA DEL PERCHÈ QUESTA SERIE CONVERGE.

PER COMINCIARE IMMAGINIAMO I TERMINI DELLA SERIE COME SE FOSSERO DEI SALTI SULLA RETTA REALE, IN AVANTI SE POSITIVI E ALL'INDIETRO SE NEGATIVI.

CON TALE NOTAZIONE LA SOMMA DI n TERMINI, CIOÈ S_n E IL PUNTO IN CUI ARRIVO SE PARTO DA $x=0$ E FACCIO LA SEQUENZA DI n PASSI CHE CORRISPONDONO AI PRIMI n TERMINI DELLA SERIE (VEDI FIGURA)



IL FATTO CHE I PASSI SIANO ALTERNATIVAMENTE AVANTI E INDIETRO E DI LUNGHEZZA DECRESCENTE FA SI CHE IL PUNTO DI ARRIVO AL PASSO n-ESIMO SIA SEMPRE DENTRO LA ZONA SCAVALCATA DALL'ULTIMO PASSO. MA LA LUNGHETTA DEL PASSO TENDE A ZERO PER CUI CI SI ASPETTA CHE LA ZONA SCAVALCATA SI CONTRAGGA A UN PUNTO. TALE PUNTO SARÀ IL LIMITE DI S_n.

TEO. 2 (CRITERIO DI LEIBNIZ)

DATA (a_n) TALE CHE $a_n \to 0$ DECRESCENDO, ALLORA $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ CONVERGE.

DIMO

DETTA (S_n) LA SUCCESSIONE DELLE SOMME FINITE, VOGLIAMO MOSTRARE CHE $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ TALE CHE $S_n \to \lambda$.

A TALE SCOPO MOSTREREMO SEPARATAMENTE CHE

$\exists\, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ TALE CHE $S_{2k} \to \lambda_1$

$\exists\, \lambda_2 \in \mathbb{N}$ TALE CHE $S_{2k-1} \to \lambda_2$

DOPODICHÈ MOSTREREMO CHE $\lambda_1 = \lambda_2$.

I° PASSO (S_{2k}) È CRESCENTE

INFATTI, $\forall k \in \mathbb{N} - \{0\}$, SI HA:

PERCHÈ (a_n) È DECRESCENTE E QUINDI $a_{2k+1} - a_{2k+2} \geq 0$

$$S_{2(k+1)} = S_{2k+2} = S_{2k} + a_{2k+1} - a_{2k+2} \geq S_{2k}$$

II° PASSO (S_{2k-1}) È DECRESCENTE

INFATTI, $\forall k \in \mathbb{N} - \{0\}$, SI HA

PERCHÈ (a_n) È DECRESCENTE E QUINDI $-a_{2k+2} + a_{2k+3} \leq 0$

$$S_{2(k+1)-1} = S_{2k+1} = S_{2k-1} - a_{2k} + a_{2k+1} \leq S_{2k-1}$$

III° PASSO (S_{2k}) ED (S_{2k-1}) SONO ENTRAMBE LIMITATE.

INFATTI $\forall k \in \mathbb{N} - \{0\}$ SI HA:

PERCHÈ $a_{2k} \geq 0$, VISTO CHE $a_n \to 0$ DECRESCENDO

$$S_{2k} = S_{2k-1} - a_{2k} \leq S_{2k-1}$$

DA CUI SEGUE:

PERCHÈ (S_{2k}) È CRESCENTE

$$S_2 \leq \dots \leq S_{2k} \leq S_{2k-1} \leq \dots \leq S_1$$

PERCHÈ (S_{2k-1}) È DECRESCENTE

QUINDI (S_{2k}) E (S_{2k-1}) SONO TUTTE CONTENUTE NELL'INTERVALLO $[S_2, S_1]$.

IV PASSO CONCLUSIONE.

ESSENDO (S_{2k}) ED (S_{2k-1}) MONOTONE E LIMITATE, ENTRAMBE AVRANNO LIMITE FINITO. SIA λ_1 IL LIMITE DI (S_{2k}) E λ_2 QUELLO DI (S_{2k-1}). AVREMO CHE:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \lim_{k\to+\infty} S_{2k} - \lim_{k\to+\infty} S_{2k-1} = \lim_{k\to+\infty} (S_{2k} - S_{2k-1}) = \lim_{k\to+\infty} a_{2k} = 0$$

PERCHÈ $a_n \to 0$

QUINDI $\lambda_1 = \lambda_2$. QUINDI TUTTA (S_n) TENDE A λ_1.

ES. 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ CONVERGE.

SVOLGIMENTO

POSTO $a_n=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, SI HA BANALMENTE $a_n\to 0$.

INOLTRE (a_n) È DECRESCENTE PERCHÉ $\forall n\in\mathbb{N}$ SI HA:

PERCHÉ $\ln(1+x)$ È CRESCENTE E $\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$

$$a_{n+1}=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=a_n$$

QUINDI LA CONVERGENZA SEGUE DAL CRITERIO DI LEIBNIZ.

ATTENZIONE: ERRORE FREQUENTE

QUANDO CORREGGO GLI SCRITTI, SPESSO TROVO QUESTO **ERRORE**:

NON SI PUÒ!! PERCHÉ NON SONO A TERMINI POSITIVI

$$(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\approx(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}\Rightarrow \text{STUDIO } \sum(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}} \text{ CHE CONVERGE PER LEIBNIZ}$$

TALE AFFERMAZIONE, NON SOLO È FORMALMENTE SCORRETTA PERCHÉ SI APPLICA IL CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO TRA SERIE A SEGNO VARIABILE, MA PORTA IN CERTI CASI PROPRIO A RISULTATI ERRATI, COME SI VEDE NELL'ESEMPIO CHE SEGUE.

ES 3 STUDIARE IL CARATTERE DI $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$.

POSTA $a_n=\ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$, SI POTREBBE **ERRONEAMENTE** PENSARE CHE CONVERGA, VISTO CHE $a_n\approx\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ E CHE $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ CONVERGE GRAZIE AL CR. DI LEIBNIZ.

MOSTRIAMO CHE INVECE $\sum a_n$ DIVERGE A $-\infty$.

SI RICORDI CHE:

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\overbrace{\frac{1}{3!}\cdot\frac{2}{(1+\xi_x)^3}\cdot x^3}^{\text{RESTO DI LAGRANGE}}\qquad(\text{CON } \xi_x \text{ COMPRESO TRA } 0 \text{ E } x)$$

QUINDI:

$$a_n=\ln\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)=\underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}}_{A_n}-\underbrace{\frac{1}{2n}}_{B_n}+\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1+\xi_n)^3}\cdot\frac{(-1)^{3n+3}}{n\sqrt{n}}}_{C_n}\qquad\left(\text{CON } \xi_n \text{ COMPRESO TRA } 0 \text{ E } \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$$

SI OSSERVI CHE PER $n\geq 2$ SI HA:

$$0\leq\frac{1}{(1+\xi_n)^3}\leq\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}\leq\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^3}=27$$

QUINDI PER $n \geq 2$ SI HA:

$$|C_n| = \frac{1}{3} \cdot \left| \frac{1}{(1+\xi_n)^3} \right| \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{3} \cdot 27 \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}} = 9 \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

MA $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ CONVERGE, QUINDI $\sum |C_n|$ CONVERGE PER IL CR. DEL CONFRONTO.

QUINDI ANCHE $\sum C_n$ CONVERGE, PER IL CR. DELLA CONV. ASSOLUTA.

INOLTRE ANCHE $\sum A_n$ CONVERGE, GRAZIE AL CR. DI LEIBNIZ.

RIASSUMENDO, ABBIAMO TROVATO CHE

$$a_n = A_n + B_n + C_n$$

CON $\sum A_n$ E $\sum C_n$ CHE CONVERGONO.

POSSIAMO QUINDI DIRE CHE $\sum a_n$ E $\sum B_n$ HANNO LO STESSO CARATTERE.

MA $B_n = -\frac{1}{2n}$, QUINDI $\sum B_n$ DIVERGE A $-\infty$. QUINDI ANCHE $\sum a_n$ DIVERGE A $-\infty$.

TEO.3 (CRITERIO DI ABEL) DATE $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ E $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ SUCCESSIONI A VALORI IN $\mathbb{R}$ E SIA $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ LA SUCCESSIONE DELLE SOMME FINITE DI $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. SUPPONIAMO CHE:

(a) $a_n \to 0$ DECRESCENDO

(b) B_n È LIMITATA, CIOÈ $\sup_{n\in\mathbb{N}} |B_n| = M < +\infty$.

ALLORA $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ HA LO STESSO CARATTERE DI $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) B_n$, LA QUALE CONVERGE.

DIMO

MOSTRIAMO PRIMA CHE $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) B_n$ CONVERGE. SI NOTI CHE:

(1) $$|(a_n - a_{n+1}) B_n| \overset{\text{PERCHÈ } (a_n) \text{ È DECRESCENTE}}{=} (a_n - a_{n+1}) \cdot |B_n| \overset{\text{PERCHÈ } M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |B_n|}{\leq} M \cdot (a_n - a_{n+1})$$

MA $\sum_{n=0}^{+\infty} M \cdot (a_n - a_{n+1})$ CONVERGE A $M a_0$ PERCHÈ:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} M(a_k - a_{k+1}) = \lim_{n\to+\infty} \left(M(a_0 - \cancel{a_1}) + M(\cancel{a_1} - \cancel{a_2}) + M(\cancel{a_2} - \cancel{a_3}) + \cancel{\cdots} + M(\cancel{a_n} - a_{n+1}) \right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (M a_0 - M a_{n+1}) \overset{\text{PERCHÈ } a_n \to 0}{=} M a_0$$

MA ALLORA, GRAZIE A (1) E AL CR. DEL CONFRONTO, ANCHE $\sum_{n=0}^{+\infty} |(a_n - a_{n+1}) B_n|$ CONVERGE.

DI CONSEGUENZA, GRAZIE AL CR. DELLA ASSOLUTA CONVERGENZA, ANCHE $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) B_n$ CONVERGE.

MOSTRIAMO ORA CHE $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) B_n$ E $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ HANNO LO STESSO CARATTERE.

A TALE SCOPO INDICHIAMO CON (S_n) LA SUCCESSIONE DELLE SOMME FINITE DEL PRIMO E

CON (S_n) QUELLA DEL SECONDO.

SI HA:

$$\mathcal{S}_n = (a_0 - a_1)B_0 + (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + \dots + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + (a_n - a_{n+1})B_n =$$

$$= a_0 B_0 + a_1(-B_0 + B_1) + a_2(-B_1 + B_2) + \dots \dots + a_n(-B_{n-1} + B_n) - a_{n+1} B_n =$$

$$= a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n - a_{n+1} B_n =$$

$$= S_n - a_{n+1} B_n$$

PERCHÉ $a_{n+1} B_n \to 0$, IN QUANTO $a_n \to 0$ E B_n È LIMITATA

DA CUI SEGUE:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (a_{n+1} \cdot B_n + \mathcal{S}_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{S}_n$$

ESISTE FINITO PERCHÉ $\sum B_n(a_n - a_{n+1})$ CONVERGE

QUINDI $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ E $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) B_n$ CONVERGONO ALLO STESSO VALORE.

OSS. 2 IL CR. DI LEIBNIZ SI OTTIENE COME CASO PARTICOLARE DEL CR. DI ABEL PONENDO $b_n = (-1)^{n+1}$.

ES. 4 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{2}{3} n\pi\right)}{n}$ CONVERGE.

BASTA PORRE $a_n = \frac{1}{n}$ E $b_n = \cos\left(\frac{2}{3} n\pi\right)$. LE CONDIZIONI DEL CR. DI ABEL SONO VERIFICATE PERCHÉ:

1) $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ DECRESCENDO.

2) DA $b_n = \cos\left(\frac{2}{3} n\pi\right)$ SEGUE: $b_n = \begin{cases} 1 & \text{SE } n \text{ È MULTIPLO DI} \\ -\frac{1}{2} & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$

QUINDI SE $B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ SI HA:

$$B_n = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{SE } n = 3k+1 \quad \text{CON } k \in \mathbb{N} \\ -1 & \text{SE } n = 3k+2 \quad \text{CON } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{SE } n = 3k \quad \text{CON } k \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases}$$

QUINDI (B_n) È LIMITATA

QUINDI POSSO APPLICARE IL T. DI ABEL E DIRE CHE LA SERIE CONVERGE.

ES. 5 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n}$ CONVERGE.

PONGO $a_n = \frac{1}{n}$ E $b_n = \cos n$.

CHE $a_n \to 0$ DECRESCENDO È OVVIO, RIMANE DA DIMOSTRARE CHE È LIMITATA (B_n) DEFINITA DA

$$B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n$$

A TALE SCOPO OSSERVIAMO CHE, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$, SI HA:

$$\cos n = \Re\left(e^{in}\right)$$

QUINDI:

$$B_n = \cos 1 + \cos 2 + \dots + \cos n = \Re\left(e^{i}\right) + \Re\left(e^{2i}\right) + \dots + \Re\left(e^{ni}\right) =$$

$$= \Re\left(e^{i} + \left(e^{i}\right)^2 + \dots + \left(e^{i}\right)^n\right) = \Re\left(e^{i}\cdot\left(1 + e^{i} + e^{2i} + \dots + e^{(n-1)i}\right)\right) =$$

$$= \Re\left(\underbrace{e^{i}\cdot\frac{\left(e^{i}\right)^n - 1}{e^{i} - 1}}_{z_n}\right)$$

SI OTTIENE:

$$|z_n| = \left| e^{i}\cdot\frac{\left(e^{i}\right)^n - 1}{e^{i} - 1}\right| = \frac{|e^{i}|}{|e^{i}-1|}\cdot\left|\left(e^{i}\right)^n - 1\right| \le \frac{|e^{i}|}{|e^{i}-1|}\cdot\left|\,|e^{i}|^n + |1|\,\right| = \frac{2}{|e^{i}-1|}$$

DUNQUE, POSTO $M = \frac{2}{|e^{i}-1|}$, PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ SI HA $|z_n| < M$.

QUINDI, A MAGGIOR RAGIONE, $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ SI HA $|\Re(z_n)| < M$, CIOÈ $|B_n| < M$.

QUINDI POSSO APPLICARE IL CRITERIO DI ABEL E DIRE CHE LA SERIE CONVERGE

SERIE NUMERICHE (...CONTINUA...)
(COMPLEMENTI E OSSERVAZIONI)

OSS. 1 (RELAZIONE TRA CR. DEL RAPPORTO E CR. DELLA RADICE)

DATA $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, A TERMINI STRETTAMENTE POSITIVI, LA CONDIZIONE $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to \ell$ È PIÙ FORTE DELLA CONDIZIONE $\sqrt[n]{a_n}\to\ell$. INFATTI SI HA:

1. SE $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to\ell\geq 0$ ALLORA ANCHE $\sqrt[n]{a_n}\to\ell$
2. ESISTONO CASI DI (a_n) TALI CHE $\sqrt[n]{a_n}\to\ell\geq 0$ MA $\frac{a_{n+1}}{a_n}\not\to\ell$.

DIM

1. BISOGNA MOSTRARE CHE:

(1) $\forall\varepsilon>0$ DEFINITIVAMENTE IN n $\ell-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<\ell+\varepsilon$

DIMOSTRIAMO PRIMA LA DISUGUAGLIANZA $\sqrt[n]{a_n}<\ell+\varepsilon$

A TALE SCOPO, SIA $n_0\in\mathbb{N}$ TALE CHE:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\ell+\frac{\varepsilon}{2}\qquad \text{PER } n\geq n_0$$

PER $n>n_0$ SI HA:

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{a_{n_0}\cdot\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\cdot\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}}\cdot\ldots\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}}<$$

$$<\sqrt[n]{a_{n_0}\cdot\left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0}}=\sqrt[n]{a_{n_0}}\cdot\left(\ell+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{n_0}{n}}\xrightarrow{\text{PER } n\to+\infty}\ell+\frac{\varepsilon}{2}$$

DI CONSEGUENZA, DEFINITIVAMENTE IN n $\sqrt[n]{a_n}<\ell+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\ell+\varepsilon$.

IN MODO DEL TUTTO ANALOGO SI DIMOSTRA CHE DEFINITIVAMENTE IN n SI HA $\sqrt[n]{a_n}>\ell-\varepsilon$, AVENDO CURA DI SCEGLIERE $\varepsilon>0$ IN MODO CHE $\ell-\varepsilon\geq 0$

(IN PARTICOLARE SE $\ell=0$ QUESTA SECONDA DISUGUAGLIANZA È GRATIS.)

QUINDI VALE **(1)**.

2 PRENDIAMO $a_n = \left(\rho + \frac{1+(-1)^n}{2n}\rho\right)^n$, CIOÈ:

$$a_n = \begin{cases} \rho^n & \text{SE } n \text{ È DISPARI} \\ \left(\rho + \frac{\rho}{n}\right)^n & \text{SE } n \text{ È PARI} \end{cases}$$

CHIARAMENTE SI HA:

$$\sqrt[n]{a_n} = \rho + \frac{1+(-1)^n}{2n}\rho \to \rho$$

PER $n \to +\infty$.

INVECE IL LIMITE DI $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ NON ESISTE PERCHÉ:

$$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \frac{\left(\rho + \frac{\rho}{2k}\right)^{2k}}{\rho^{2k-1}} = \rho \cdot \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k} \to \rho \cdot e$$

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{\rho^{2k+1}}{\left(\rho + \frac{\rho}{2k}\right)^{2k}} = \frac{\rho}{\left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k}} \to \frac{\rho}{e}$$

OSS. 2 ABBIAMO IMPARATO CHE IL CRITERIO DEL RAPPORTO NON CI AIUTA QUANDO $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ CRESCENDO. IN TAL CASO PUÒ AIUTARCI IL SEGUENTE:

TEO. 1 (CONFRONTO DI RAPPORTI)

DATE $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ E $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ A TERMINI STRETTAMENTE POSITIVI E TALI CHE,

(2) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \text{DEFINITIVAMENTE IN } n.$$

ALLORA:

1 $\sum b_n$ CONVERGE $\Rightarrow \sum a_n$ CONVERGE

2 $\sum a_n$ DIVERGE $\Rightarrow \sum b_n$ DIVERGE

DIMO

COME AL SOLITO POSSIAMO, SENZA PERDERE DI GENERALITÀ, SUPPORRE CHE LA **(2)** VALGA $\forall n \in \mathbb{N}$, INVECE CHE DEF. IN n.

IN TAL CASO $\forall n \in \mathbb{N}$ SI HA:

$$\frac{a_n}{a_0} = \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_1}{b_0} \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdot \ldots \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_n}{b_0}$$

DA CUI SEGUE:

$$\frac{a_n}{a_0} \leq \frac{b_n}{b_0}$$

CIOÈ:

$$a_n \leq \frac{a_0}{b_0} \cdot b_n$$

QUINDI, APPLICANDO IL CRITERIO DEL CONFRONTO, DALLA CONVERGENZA DI $\sum b_n$ SEGUE QUELLA DI $\sum a_n$ E, ANALOGAMENTE, DALLA DIVERGENZA DI $\sum a_n$ SEGUE QUELLA DI $\sum b_n$.

COROLLARIO 1

SIA $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ A TERMINI STRETTAMENTE POSITIVI E TALE CHE:

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} \geq 1 - \frac{1}{n} \qquad \text{DEFINITIVAMENTE IN } n$$

ALLORA $\sum B_n$ DIVERGE

DIMO

POSTO $A_n = \frac{1}{n-1}$, SI HA CHE $\sum A_n$ DIVERGE E INOLTRE:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

QUINDI, DEF. IN n SI HA:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = 1 - \frac{1}{n} \leq \frac{B_{n+1}}{B_n}$$

APPLICANDO IL TEO.1, DALLA DIVERGENZA DI $\sum A_n$ SEGUE QUELLA DI $\sum B_n$.

ES.1 STUDIARE LA CONVERGENZA DI $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!} A^n$ AL VARIARE DI $A>0$.

SVOLGIMENTO

APPLICHIAMO IL CR. DEL RAPPORTO

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot A^{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n^{2n}} \cdot \frac{1}{A^n} =$$

$$= \frac{(n+1)^{\cancel{2}} \cdot (n+1)^{2n}}{\underbrace{\cancel{(2n+2)}}_{2}(2n+1) \cdot \cancel{(2n)!}} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{n^{2n}} \cdot \frac{A^{\cancel{n+1}}}{\cancel{A^n}}$$

$$= \frac{n+1}{2n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \cdot \frac{A}{2} = \frac{2n+2}{2n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} \cdot \frac{A}{4} \to \frac{A}{4} \cdot e^2 \begin{cases} <1 & \text{SE } 0<A<\frac{4}{e^2} \\ =1 & \text{SE } A=\frac{4}{e^2} \\ >1 & \text{SE } A>\frac{4}{e^2} \end{cases}$$

QUINDI PER $0<A<\frac{4}{e^2}$ LA SERIE CONVERGE E PER $A>\frac{4}{e^2}$ DIVERGE.

RIMANE DA STABILIRE IL COMPORTAMENTO PER $A=\frac{4}{e^2}$. IN TAL CASO SI HA:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+2}{2n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} \cdot e^{-2} =$$

$$= \frac{2n+1+1}{2n+1} \cdot e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}} \cdot e^{-2} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{2n+1}\right) \cdot e^{2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-2} =$$

$$2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-2 = 2n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-2 = \cancel{2} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \cancel{-2} = -\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \left(1+\frac{1}{2n+1}\right) \cdot e^{-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{2n+1}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= 1+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$\frac{n+1}{(2n+1)n} = \frac{2n+1+1}{(2n+1)2n} = \frac{1}{2n}+\frac{1}{(2n+1)2n} = \frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{n+1}{(2n+1)n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

QUINDI:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \overset{\text{DEF. IN } n}{>} 1-\frac{1}{n}$$

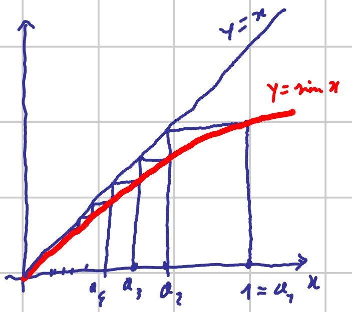
QUINDI POSSO APPLICARE IL COROLLARIO 1 E DIRE CHE PER $A=\frac{4}{e^2}$ LA SERIE DIVERGE.

OSS. 3 (STUDIO DI $\sum a_n$ QUANDO (a_n) È DEFINITA PER RICORRENZA)

UN PROBLEMA DEL GENERE È GIÀ STATO TRATTATO IN ES.9 DI LEZ.12, IN UN CASO NON CRITICO CIOÈ CON UNA LEGGE RICORRENTE DEL TIPO $a_{n+1}=f(a_n)$ IN CUI f DI CLASSE C^1 SODDISFA $f(0)=0$ E $0<f'(0)<1$. VEDIAMO ORA COME SI PUÒ ATTACCARE IL PROBLEMA QUANDO $f'(0)=1$.

ES.2 SIA (a_n) DEFINITA DA:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sin(a_n) \end{cases}$$



DIRE SE $\sum a_n$ CONVERGE.

SVOLGIMENTO

MOSTRIAMO PER INDUZIONE CHE $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}-\{0\} \quad 0<a_{n+1}<a_n<\frac{\pi}{2}.}$ (3)

PER $n=1$ È OVVIO PERCHÈ:

$$0<\sin 1<1<\frac{\pi}{2}$$

INOLTRE, VISTO CHE SU $[0,\frac{\pi}{2}]$ $\sin x$ È STRETTAMENTE CRESCENTE E SODDISFA $0<\sin x<x$, SE VALE $0<a_{k+1}<a_k<\frac{\pi}{2}$ ALLORA VALE ANCHE $0<\sin(a_{k+1})<\sin(a_k)<\frac{\pi}{2}$ CIOÈ:

$$0<a_{k+2}<a_{k+1}<\frac{\pi}{2}$$

QUINDI, PER INDUZIONE, VALE **(3)**.

QUINDI (a_n) È DECRESCENTE E LIMITATA QUINDI HA UN LIMITE FINITO ℓ.

MA ℓ DEVE SODDISFARE:

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sin(a_n) = \sin \ell$$

CIOÈ:

$$\ell = \sin \ell$$

DA CUI SEGUE $\ell = 0$.

QUINDI $a_n \to 0$ DECRESCENDO, IN PARTICOLARE È A TERMINI POSITIVI.

PER MOSTRARE CHE $\sum a_n$ DIVERGE BASTERÀ MOSTRARE CHE:

(4) $$a_n \geq \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

E POI APPLICARE IL CR. DEL CONFRONTO

DIMOSTRIAMO **(4)** PER INDUZIONE.

PER $n=1$ È OVVIO PERCHÈ $a_1 = 1$.

SE POI VALE PER $n=k$, ALLORA SFRUTTANDO LA CRESCENZA DI $\sin x$ SU $[0,1]$ SI HA:

PERCHÉ: $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} \geq \frac{1}{k\cdot 2k} \geq \frac{1}{6k^2}$

$$\sin(a_k) \geq \sin\frac{1}{k} \geq \frac{1}{k} - \frac{1}{6k^3} \geq \frac{1}{k+1}$$

DA QUESTO, RICORDANDO CHE $a_{k+1} = \sin(a_k)$, SEGUE CHE $a_{k+1} \geq \frac{1}{k+1}$.

QUINDI, PER INDUZIONE, VALE LA **(4)**.

MA ALLORA, VISTO CHE $\sum \frac{1}{n}$ DIVERGE, PER IL CR. DEL CONFRONTO ANCHE $\sum a_n$ DIVERGE.

ES.3 DATA (a_n) DEFINITA DA:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = -\sin(a_n) \end{cases}$$

STUDIARE IL CARATTERE DI $\sum a_n$.

MOSTRIAMO CHE, POSTO $b_n = |a_n|$, ALLORA:

PERCHÉ $-1 \leq a_n \leq 1$ PER OGNI n E INOLTRE SU $[-1,1]$ $\sin x$ È DISPARI E CRESCENTE

$$b_{n+1} = |a_{n+1}| = |\sin a_n| = \sin|a_n| = \sin b_n$$

INOLTRE $b_1 = |a_1| = 1$.

QUINDI (b_n) SODDISFA

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = \sin b_n \end{cases}$$

DA $\boxed{\text{ES.2}}$ SAPPIAMO CHE $b_n \to 0$ DECRESCENDO.

MOSTRIAMO INFINE CHE $a_n = (-1)^{n+1} b_n$.

ANCHE QUESTO SI DIMOSTRA SUBITO PER INDUZIONE VISTO CHE PER $n=1$ È OVVIO E, SE VALE PER $n=k$, PER $n=k+1$ SI OTTIENE:

$$a_{k+1} = -\sin(a_k) = -\sin\left((-1)^{k+1} b_k\right) = (-1)^{k+2} \sin(b_k) = (-1)^{k+2} b_{k+1}$$

IN DEFINITIVA $\sum a_n$ È DELLA FORMA $\sum (-1)^{n+1} b_n$, CON $b_n \to 0$ DECRESCENDO. QUINDI CONVERGE GRAZIE AL CR. DI LEIBNIZ.

OSS. 4 TIPICO ERRORE CHE SI PUÒ FARE QUANDO SI STUDIANO LE SERIE È PENSARE CHE SODDISFINO AUTOMATICAMENTE TUTTE LE PROPRIETÀ DELLE SOMME FINITE. INVECE SPESSO NON È COSÌ, COME VEDIAMO TRA POCO.

DEF. 1 DATE DUE SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ E $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, DIREMO CHE $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ È UN RIARRANGIAMENTO DI $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ SE $\exists$ $m: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ BIUNIVOCA TALE CHE $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n = a_{m_n}$.

ES. 4 MOSTRARE CHE ESISTE UN RIARRANGIAMENTO $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ DI $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ TALE CHE $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ CONVERGE A 2020.

POSTO $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, DEFINIAMO LE DUE SUCCESSIONI (P_k) E (N_k) COSÌ.

$$P_k = a_{2k-1} = \frac{1}{2k-1} \qquad \text{E} \qquad N_k = a_{2k} = -\frac{1}{2k}$$

OVVERO (P_k) È LA SUCCESSIONE DEI TERMINI POSITIVI DI (a_n), PRESI NELL'ORDINE IN CUI STANNO, MENTRE (N_k) È QUELLA DEI TERMINI NEGATIVI.

SI NOTI CHE:

(5) $$\sum P_k = \sum \frac{1}{2k-1} = +\infty \qquad \text{E} \qquad \sum N_k = \sum -\frac{1}{2k} = -\infty.$$

SCELGO I TERMINI PER (b_n) RISPETTANDO LE SEGUENTI REGOLE (DOVE $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$):

1) $b_1 = P_1$

2) $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$, SE $\overset{(A)}{\boxed{S_n \leq 2020}}$ PRENDO b_{n+1} = TERMINE DI (P_k) CON INDICE PIÙ BASSO CHE NON È ANCORA STATO PRESO

SE $\overset{(B)}{\boxed{S_n > 2020}}$ PRENDO b_{n+1} = COME SOPRA MA DA (N_k)

SI NOTI CHE NON PUÒ SUCCEDERE CHE DEFINITIVAMENTE VALGA (A) (OPPURE (B)) GRAZIE A (5). QUESTO GARANTISCE CHE FREQUENTEMENTE IN n SI PRENDE UN TERMINE DA (P_k) E LO STESSO DA (N_k). QUINDI $\sum b_n$ È EFFETTIVAMENTE UN RIARRANGIAMENTO DI $\sum a_n$.

PER MOSTRARE CHE $\forall \varepsilon > 0$ DEFINIT. IN n SI HA $|S_n - 2020| < \varepsilon$ BASTA OSSERVARE CHE (P_k) E (N_k) SONO INFINITESIME E CHE:

$$N_{k_1} \leq S_n - 2020 \leq P_{k_2}$$

DOVE N_{k_1} E P_{k_2} SONO GLI ULTIMI TERMINI PRESI DA (N_k) E (P_k).

OSS.5 NELL'ESEMPIO 4 NON C'È NULLA DI SPECIALE NEL NUMERO 2020: PROCEDENDO IN MODO SIMILE SI POTEVA MOSTRARE CHE $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\exists$ UN RIARRANGIAMENTO DI $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ CHE CONVERGE A λ.
NON SOLO: SI POTEVANO ANCHE COSTRUIRE RIARRANGIAMENTI DIVERGENTI O INDETERMINATI.

OSS.6 ESSENZIALE PERCHÈ IL PROCEDIMENTO DELL'ESEMPIO 4 FUNZIONI È CHE LE SERIE (P_k) E (N_k) SIANO ENTRAMBE INFINITESIME E CHE $\sum P_k = +\infty$ E $\sum N_k = -\infty$.
EBBENE CIÒ ACCADE PER OGNI SERIE CHE SIA CONVERGENTE MA NON ASSOLUTAMENTE.
A TALI SERIE QUINDI SI ESTENDE IL RISULTATO.

12-04-2021 (14:00-16:00) — LEZ 20

PRENDENDO SPUNTO DAGLI ESERCIZI SVOLTI SONO STATE INTRODOTTE LE NOZIONI DI TEORIA RIPORTATE DI SEGUITO.

TEO.1 (CRITERIO DI GAUSS)

SIA $\sum a_n$ A TERMINI POSITIVI E TALE CHE, PER $n \to +\infty$, SI ABBIA

(1) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ALLORA: **a** $\alpha > 1 \Rightarrow \sum a_n$ CONVERGE

b $\alpha < 1 \Rightarrow \sum a_n$ DIVERGE

DIMO

a SIA β TALE CHE $1 < \beta < \alpha$ E PER OGNI $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ SIA:

(2) $$b_n = \frac{1}{n^\beta}$$

SI HA:

(3) $$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^\beta = 1 - \frac{\beta}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

DA (1) E (3) SEGUE CHE:

(4) $$\frac{b_{n+1}}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha - \beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \overset{\alpha > \beta}{\geq} 0 \quad \text{DEFINITIVAMENTE IN } n$$

CIOÈ:

(5) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \text{DEFINITIVAMENTE IN } n$$

MA SICCOME $\beta > 1$ E b_n È DEFINITA DA (2) SI HA CHE $\sum b_n$ CONVERGE.

QUINDI, GRAZIE A (5) E AL CRIT. DEL CONFRONTO DI RAPPORTI, SI OTTIENE CHE ANCHE $\sum a_n$ CONVERGE.

b PRESO $\beta > 0$ TALE CHE $\alpha < \beta < 1$, SIA b_n DEFINITO DA **(2)**.

PROCEDENDO COME PRIMA SI OTTIENE ANCORA **(3)**, MA STAVOLTA, SICCOME $\alpha < \beta$, DA **(3)** SEGUE:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

INOLTRE $\sum b_n$ DIVERGE PERCHÉ $\beta < 1$. DI CONSEGUENZA ANCHE $\sum a_n$ DIVERGE GRAZIE AL CRITERIO DEL CONFRONTO DI RAPPORTI.

TEO.2

PER OGNI $\alpha \in [0,1)$ SI HA $(n^n)^\alpha = o(n!)$ PER $n \to +\infty$.

DIMO

POSTO:

$$R_n = \frac{(n^n)^\alpha}{n!}$$

VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE $R_n \to 0$ PER $n \to +\infty$.

A TALE SCOPO MOSTREREMO UNA COSA PIÙ FORTE: $\sum R_n$ CONVERGE.

INFATTI, APPLICANDO IL CRITERIO DEL RAPPORTO A $\sum R_n$ SI HA:

PERCHÉ $\alpha < 1$

$$\frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{((n+1)^{n+1})^\alpha}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n^n)^\alpha} = \frac{(n+1)^\alpha}{n+1} \cdot \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^\alpha \to 0 \cdot e^\alpha = 0$$

QUINDI $\sum R_n$ CONVERGE PER IL CRITERIO DEL RAPPORTO E, COME EFFETTO COLLATERALE, $R_n \to 0$.

ES.1 (ESEMPIO DI UTILIZZO DEL CR. DI GAUSS)

STUDIARE, AL VARIARE DI $A > 0$, IL CARATTERE DI $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2n-1}}{(2n)!} \cdot A^n$.

SOLUZIONE

POSTO:

$$a_n = \frac{n^{2n-1}}{(2n)!}$$

SI HA:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{2n+1}}{(2n+2)!} \cdot A^{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n^{2n-1}} \cdot \frac{1}{A^n} = \frac{A}{4} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} \to A \cdot \frac{e^2}{4}$$

QUINDI, GRAZIE AL CR. DEL RAPPORTO, $\sum a_n$ CONVERGE PER $0<A<\frac{4}{e^2}$ E DIVERGE PER $A>\frac{4}{e^2}$.

INVECE PER $A=\frac{4}{e^2}$ IL CRITERIO DEL RAPPORTO NON FUNZIONA PERCHÉ $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to 1$ DAL BASSO. PROVIAMO QUINDI AD APPLICARE IL CR. DI GAUSS.

PER $A=\frac{4}{e^2}$ SI HA:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=e^{-2}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}=\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)e^{-2+2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)e^{-2+2n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\cdot e^{-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)=1-\frac{\frac{3}{2}}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

QUINDI:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\qquad \text{CON } \alpha=\frac{3}{2}>1$$

DI CONSEGUENZA, GRAZIE AL CR. DI GAUSS, LA SERIE CONVERGE ANCHE PER $A=\frac{4}{e^2}$.

19-04-2021 (14:00-16:00)

LEZ 24

PRENDENDO SPUNTO DAGLI ESERCIZI SVOLTI SONO STATE INTRODOTTE LE NOZIONI DI TEORIA RIPORTATE DI SEGUITO.

TEO.1 (CRIT. DI CONDENSAZIONE)

SIA (a_n) UNA SUCCESSIONE POSITIVA E DECRESCENTE,

ALLORA

$$\sum a_n \quad \text{E} \quad \sum 2^k a_{2^k}$$

HANNO LO STESSO CARATTERE.

DIMO

SIANO

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

E

$$\sigma_k = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^k a_{2^k}$$

I PASSO $\sigma_k \to L$ FINITO $\Rightarrow S_n \to \ell$ FINITO.

INFATTI $\forall k \in \mathbb{N}$ SI HA:

(1)

$$S_{2^{k+1}-1} = a_0 + a_1 + \underbrace{a_2 + a_3}_{\leq} + \underbrace{a_4 + a_5 + a_6 + a_7}_{\leq} + \dots + \underbrace{a_{2^k} + \dots + a_{2^{k+1}-1}}_{\leq} \leq$$

PERCHÈ a_n È DECRESCENTE

$$\leq a_0 + a_1 + \boxed{2a_2} + \boxed{4a_4} + \dots + \boxed{2^k a_{2^k}} =$$

$$= a_0 + \sigma_k$$

SICCOME SAPPIAMO GIÀ CHE $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ ESISTE, PERCHÈ S_n È CRESCENTE,

LA (1) BASTA A GARANTIRCI CHE È FINITO.

$\boxed{\text{II PASSO}}$ $\sigma_k \to +\infty \Rightarrow S_n \to +\infty$

SI RAGIONA COME PRIMA, DOPO AVER OSSERVATO CHE:

$$S_{2^k} = a_0 + a_1 + a_2 + \underbrace{a_3 + a_4} + \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8} + \dots + \underbrace{a_{2^{k-1}+1} + \dots + a_{2^k}} \geq$$

$$\geq a_0 + a_1 + a_2 + \boxed{2a_4} + \boxed{4a_8} + \dots + \boxed{2^{k-1}a_{2^k}} \geq$$

$$\geq a_0 + \frac{1}{2}\left(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots + 2^k a_{2^k}\right) = a_0 + \frac{1}{2}\sigma_k$$

14-04-2021 (11:00-13:00) | LEZ 21

PRENDENDO SPUNTO DAGLI ESERCIZI SVOLTI SONO STATE INTRODOTTE LE NOZIONI DI TEORIA RIPORTATE DI SEGUITO.

OSS.1 PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ CONVERGE A e^x.

INFATTI SI HA:

$$e^x = 1 + x + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \boxed{\frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}}$$

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE
ξ COMPRESO TRA 0 E x

QUINDI $\forall n \in \mathbb{N}$ E $\forall x \in \mathbb{R}$ SI HA:

$$(1) \qquad 0 \leq \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{e^{|x|} \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

MA PER OGNI FISSATO $x \in \mathbb{R}$ SI HA:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{|x|} \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

QUINDI DA **(1)** SEGUE CHE:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

CIOÈ CHE:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ CONVERGE A } e^x$$

OSS.2 PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$ CONVERGE A $\cos x$.

INFATTI SI HA:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \frac{(-1)^{n+1} \sin(\xi) \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

DA CUI SEGUE CHE $\forall x \in \mathbb{R}$ E $\forall n \in \mathbb{N}$ SI HA:

$$0 \leq \left| \cos x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

DA CUI SI OTTIENE LA TESI IN MODO DEL TUTTO ANALOGO ALL' **OSS. 1** .

OSS. 3 PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ CONVERGE A $\sin x$.

LA VERIFICA È DEL TUTTO ANALOGA.

OSS. 4 PER OGNI $x \in \mathbb{R}$ LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$ CONVERGE A e^{ix}.

LA CONVERGENZA SEGUE SUBITO DAL FATTO CHE

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(ix)^n}{n!} \right| = \sum \frac{|x|^n}{n!} \text{ CONVERGE.}$$

RIMANE DA MOSTRARE CHE IL VALORE A CUI CONVERGE È e^{ix}.

VISTO CHE LA SERIE CONVERGE, PER TROVARNE IL VALORE BASTA CONSIDERARE UNA QUALSIASI SOTTOSUCCESSIONE DELLA SUCCESSIONE (S_n) DELLE SOMME FINITE, AD ESEMPIO (S_{2n+1}). SI HA:

$$S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

QUINDI:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \lim_{n \to +\infty} S_{2n+1} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \lim_{n \to +\infty} i \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos x + i \sin x = e^{ix}$$

OSS. 5 PER OGNI $z \in \mathbb{C}$ LA SERIE $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ CONVERGE A e^z.

INFATTI, PRESO $z = x + iy$, SI HA:

$$S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k!} (x+iy)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k!} \sum_{p+q=k} \frac{k!}{p! \cdot q!} x^p (iy)^q =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{p+q=k} \frac{1}{p!} x^p \cdot \frac{1}{q!} (iy)^q =$$

$$= \sum_{p+q \leq 2n} \frac{1}{p!} x^p \cdot \frac{1}{q!} (iy)^q =$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{p=0,\dots,n \\ q=0,\dots,n}} \frac{1}{p!} x^p \cdot \frac{1}{q!} (iy)^q}_{A_n} + \underbrace{\sum_{\substack{p+q \leq 2n \\ p>n \vee q>n}} \frac{1}{p!} x^p \cdot \frac{1}{q!} (iy)^q}_{B_n}$$

SI HA:

$$|B_n| \leq \sum_{\substack{p+q \leq 2n \\ p>n \vee q>n}} \frac{1}{p! \cdot q!} \cdot |x|^p \cdot |y|^q \leq \sum_{\substack{p+q \leq 2n \\ p>n \vee q>n}} \frac{1}{(n+1)!} (1+|x|+|y|)^{2n} \leq$$

PERCHÈ IL NUMERO DI COPPIE $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ TALI CHE $\substack{p+q \leq 2n \\ p>n \vee q>n}$ È DATO DA $n(n+1)$

$$\leq n(n+1) \cdot \frac{1}{(n+1)!} \cdot (1+|x|+|y|)^{2n} = \frac{(1+|x|+|y|)^{2n}}{(n-1)!} \longrightarrow 0$$

PER $n \to +\infty$

$$A_n = \sum_{\substack{p=0,\dots,n \\ q=0,\dots,n}} \frac{1}{p!} x^p \cdot \frac{1}{q!} (iy)^q = \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} x^p \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{n} \frac{1}{q!} (iy)^q \right) \to e^x \cdot e^{iy} = e^z$$

DI CONSEGUENZA:

$$\lim_{n \to +\infty} S_{2n} = \lim_{n \to +\infty} (A_n + B_n) = e^z + 0 = e^z$$

INFINE ANCHE

$$\lim_{n \to +\infty} S_{2n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left(S_{2n} + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = e^z + 0 = e^z$$

QUINDI $S_n \to e^z$, CHE È QUELLO CHE VOLEVAMO DIMOSTRARE.