Analisi Matematica 1 - 27 Settembre 2023 - docente: Callegari

Lezione 2: Insiemi Numerici

INDICE

1) DEF. ASSIOMATICA DI $\mathbb{R}$ E DIMO. DI ALCUNE PROPRIETÀ NON COMPRESE NEGLI ASSIOMI
2) DEF. DI $\mathbb{N}$
   2.1) $\mathbb{N}$ È STABILE PER SOMMA
   2.2) $\mathbb{N}$ NON È SUP. LIMITATO
   2.3) "$\frac{1}{n} \to 0$"
3) DEF. DI $\mathbb{Z}$
4) DEF. DI $\mathbb{Q}$ E VERIFICA CHE È DENSO

FATTO IN QUESTA LEZIONE

5) INCOMPLETEZZA DI $\mathbb{Q}$.
6) ESISTENZA $\sqrt{2}$ IN $\mathbb{R}$.
7) DEF. FUNZIONE ESPONENZIALE.

PROSSIMA LEZIONE

1

LA DEFINIZIONE DI $\mathbb{R}$ È DIPINTA DI ROSA MENTRE LE PROPRIETÀ DIMOSTRATE SONO IN VERDE

DEF. DI $\mathbb{R}$

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$

1) $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall a \in \mathbb{R}$ $a + 0 = 0 + a = a$

2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a+b)+c = a+(b+c)$

3) $\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists\, b \in \mathbb{R}$ t.c. $a + b = b + a = 0$ $\quad (b = \text{"}-a\text{"})$

4) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $a + b = b + a$

$\boxed{4{,}5) \quad \mathbb{R} - \{0\} \neq \emptyset}$

5) $\exists\, 1 \in \mathbb{R} - \{0\}$ T.C. $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$ $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

6) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

7) $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$ $\exists\, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ t.c. $a \cdot b = 1$ $\quad \left(b = a^{-1} = \frac{1}{a}\right)$

8) $\forall a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ $a \cdot b = b \cdot a$

$\boxed{9) \ \forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$

10) $\forall a \in \mathbb{R}$ $a \leq a$

11) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

12) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $(a \leq b$ e $b \leq a) \Rightarrow b = a$

13) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ VALE $a \leq b$ o $b \leq a$

UNICITÀ DI 0

SE C'È UN ALTRO $0'$ t.c. $\forall a \in \mathbb{R}$ $0' + a = a + 0' = a$ ALLORA

$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0' \Rightarrow 0' = 0$

$\forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 0 = 0$

DIMO

$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$

$a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$

PRENDO $b \in \mathbb{R}$ t.c. $(a \cdot 0) + b = b + (a \cdot 0) = 0$

$b + (a \cdot 0) = b + ((a \cdot 0) + (a \cdot 0))$

$0 = (b + (a \cdot 0)) + (a \cdot 0)$

$0 = 0 + (a \cdot 0) \Rightarrow 0 = a \cdot 0$

14) $\forall a,b,c \in \mathbb{R} \quad a \le b \Rightarrow a+c \le b+c$

15) $\forall a,b,c \ge 0 \quad a \le b \Rightarrow a \cdot c \le b \cdot c$

$\boxed{\text{DEF.}}$ x POSITIVO $\Leftrightarrow 0 \le x$

x NEGATIVO $\Leftrightarrow x \le 0$

$0 \le a \quad 0 \cdot b \le a \cdot b$

$0 \le b \quad 0 \le a \cdot b$

$\boxed{\text{DEF}}$ DATO U INSIEME TOT. ORDINATO DA $\le$ E DATI $A \subset U$ E $\alpha \in U$

DIREMO CHE:

1) α È MAGGIORANTE (MINORANTE) DI A SE $\forall x \in A \quad x \le \alpha$ $(\alpha \le x)$

2) α È IL MASSIMO (MINIMO) DI A SE α È MAGGIORANTE (MINORANTE) DI A E $\alpha \in A$

2) α È SUP(A) (INF(A)) SE α È IL MINIMO (MASSIMO) DEI MAGGIORANTI (MINORANTI) DI A

$\boxed{\text{DEF.}}$ DATI U, $\le$ E A COME PRIMA DIREMO CHE

A È SUPERIORMENTE (INFERIORMENTE) LIMITATO SE HA ALMENO UN MAGGIORANTE (MINORANTE)

---

16) $\forall A \subset \mathbb{R}$ SE A È SUPERIORMENTE (INF~) LIMITATO ALLORA $\exists$ SUP(A) (INF)

$\boxed{2}$ DEF. $A \subset \mathbb{R}$ SI DICE INDUTTIVO SE

1) $1 \in A$

2) $a \in A \Rightarrow a+1 \in A$

DEFINIAMO $\mathbb{N} = \bigcap_{A \text{ È INDUTTIVO}} A$

$\boxed{T.}$ $\mathbb{N}$ È NON VUOTO E INDUTTIVO

$\boxed{DIM}$ $\mathbb{N} \neq \emptyset$, OVVIO PERCHÈ $1 \in A$ $\forall A$ INDUTTIVO E QUINDI

$$1 \in \bigcap A = \mathbb{N}$$

DOBBIAMO DIM. CHE $a \in \mathbb{N} \overset{?}{\Rightarrow} a+1 \in \mathbb{N}$

$$\Downarrow$$

$a \in A$ $\forall A$ INDUTTIVO

$$\Downarrow$$

$a+1 \in A$ $\forall A$ INDUTTIVO

$$\Downarrow$$

$$a+1 \in \bigcap_{A \text{ INDUTTIVO}} A$$

$\boxed{T.}$ $\mathbb{N}$ È STABILE PER "$+$". CIOÈ $\forall p, q \in \mathbb{N}$ SI HA $p+q \in \mathbb{N}$.

$\boxed{DIM}$

PER OGNI FISSATO $p \in \mathbb{N}$ SIA $A = \{k \in \mathbb{N} \mid p+k \in \mathbb{N}\}$, MOSTRO CHE $\underline{A = \mathbb{N}}$.

($A \subset \mathbb{N}$)

INFATTI

$1 \in A$? SI PERCHÈ $\mathbb{N}$ È INDUTTIVO

$k \in A \overset{?}{\Rightarrow} k+1 \in A$

$$\Downarrow$$

$p+k \in \mathbb{N} \Rightarrow (p+k)+1 \in \mathbb{N} \Rightarrow p+(k+1) \in \mathbb{N} \Rightarrow \boxed{k+1 \in A}$

} A È INDUTTIVO

$$\Downarrow$$

$\mathbb{N} \subset A$

$$(A \subset \mathbb{N} \text{ e } \mathbb{N} \subset A) \Rightarrow \underline{A = \mathbb{N}}$$

$\boxed{\text{T.}}$ $\mathbb{N}$ NON È SUP. LIMITATO.

$\boxed{\text{DIM}}$ P.A. SIA $\underline{\mathbb{N} \text{ SUP. LIM.}}$, QUINDI $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\lambda = \sup(\mathbb{N})$

QUINDI $\lambda - 1$ NON È MAGGIORANTE QUINDI $\underline{\exists k \in \mathbb{N}}$ t.c. $k > \lambda - 1$

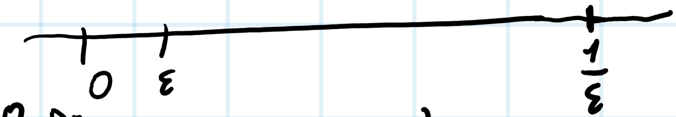
MA ALLORA $\underline{k+1} > \lambda$. MA POICHÈ $\mathbb{N}$ È INDUTTIVO

$k+1 \in \mathbb{N}$ E QUINDI C'È UN ELEMENTO DI $\mathbb{N}$ CHE SUPERA λ

(ASSURDO PERCHÈ $\lambda = \sup(\mathbb{N})$).

$\boxed{\text{T.}}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\boxed{\text{DIM}}$



$\forall \varepsilon > 0$ PRENDO $\frac{1}{\varepsilon}$ (CHE È > 0 PER LA REGOLA DEI SEGNI)

E, POICHÈ $\mathbb{N}$ NON È SUP. LIMITATO, $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $\underline{n > \frac{1}{\varepsilon} > 0}$

MA ALLORA

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$0 < \frac{1}{\varepsilon} < n$$

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

$\rightarrow \boxed{0 < x < y}$ (SD)

$0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ (?)

$\rightarrow 0 < 1 < y \cdot \frac{1}{x}$

$= \left(\frac{1}{y} \cdot y\right) \cdot \frac{1}{x} = 1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$

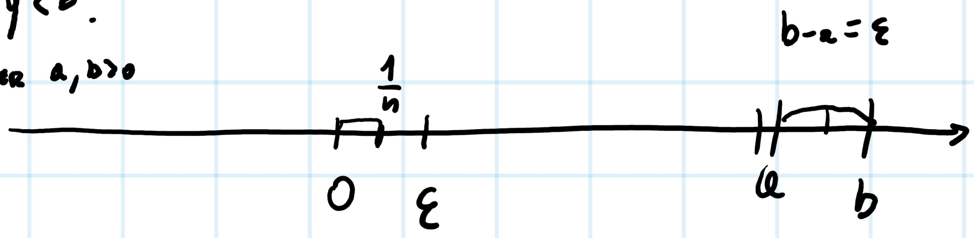
$0 < \frac{1}{y} < \underbrace{\frac{1}{y}\left(y \cdot \frac{1}{x}\right)}_{\frac{1}{x}}$

DEF. DI $\mathbb{Z}$ E $\mathbb{Q}$ [...]

3 4

$\boxed{T.}$ $\mathbb{Q}$ È DENSO IN $\mathbb{R}$, CIOÈ $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$ con $a<b$ $\exists\, q \in \mathbb{Q}$ t.c. $a<q<b$.

$\boxed{\text{DIM}}$ FACCIO PER $a,b>0$



$\{k \mid \frac{k}{n} \leq a\}$ È FINITO.

[SCRIVERE DIMO PER CASA]