Analisi Matematica 1 - 29 Settembre 2023 - docente: Callegari

Lezione 4: Topologia di R

INDICE

Esercizio 2 [4 punti]

Sia $A = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

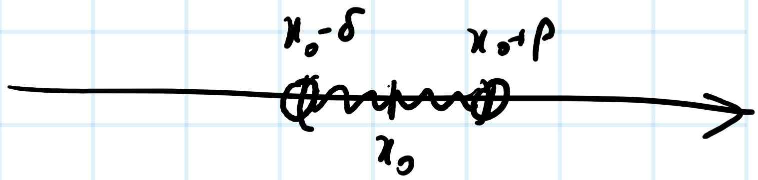
— Determinare la chiusura, l'interno e il derivato di A.

— ~~Dire se esiste una successione di valori di A che non ammette sottosuccessioni convergenti ad un punto di A. In caso affermativo dare un esempio di una tale successione.~~

TOPOLOGIA IN $\mathbb{R}$

DEF. 1 DATI $x_0 \in \mathbb{R}$ E $\rho > 0$ DEFINIAMO

$$I_{x_0}(\rho) = (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$



DEF. 2 DATO $A \subset \mathbb{R}$ E $x_0 \in \mathbb{R}$ DIREMO CHE:

1) x_0 È INTERNO AD A SE $\exists \rho > 0$ t.c. $I_{x_0}(\rho) \subset A$
2) x_0 È ESTERNO AD A SE $\exists \rho > 0$ t.c. $I_{x_0}(\rho) \cap A = \emptyset$
3) x_0 È DI FRONTIERA PER A SE NON È NÉ INTERNO NÉ ESTERNO, OVVERO $\forall \rho > 0$ $I_{x_0}(\rho) \cap A \neq \emptyset$
   $I_{x_0}(\rho) \cap A^c \neq \emptyset$
4) x_0 È DI ACC. PER A SE $\forall \rho > 0$ $I_{x_0}(\rho) \cap (A - \{x_0\}) \neq \emptyset$
5) x_0 È PUNTO ISOLATO DI A SE $x_0 \in A$ MA x_0 NON È DI ACC. PER A.

NOTAZIONE DATO $A \subset \mathbb{R}$ DICIAMO CHE

$\mathring{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x$ È INTERNO AD $A\}$

$\partial A = \{x \in \mathbb{R} \mid x$ È DI FRONTIERA DI $A\}$

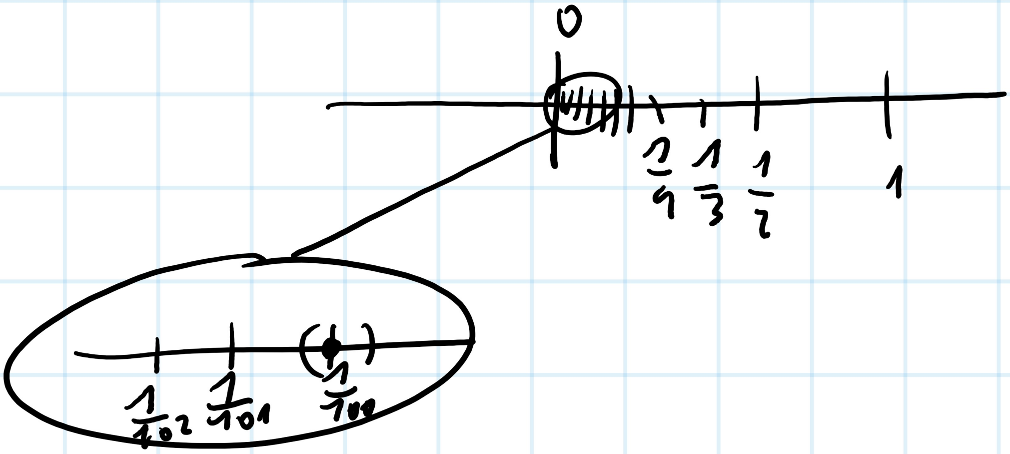
CHIUSURA $\rightarrow$ $\overline{A} = \mathring{A} \cup (\partial A)$

$DA = \{x \in \mathbb{R} \mid x$ È DI ACC. PER $A\}$
DERIVATO

DEF DATO $A \subset \mathbb{R}$ DIREMO CHE A È:

1) APERTO SE $\mathring{A} = A$
2) CHIUSO SE A^c È APERTO
3) DENSO SE $\bar{A} = \mathbb{R}$
4) DISCRETO SE OGNI $x \in A$ È ISOLATO PER A.

ESEMPIO $A = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \}$ È DISCRETO? (SI)



T.1 DATO $A \subset \mathbb{R}$ È EQUIVALENTE DIRE CHE:

1) A È CHIUSO (CIOÈ A^c È APERTO)
2) $\partial A \subset A$
3) $DA \subset A$

DIMO

$(1) \Rightarrow (2)$ P.A. $\exists x \in \partial A$ MA $x \in A^c$

MA ALLORA $\forall \rho > 0 \quad I_x(\rho) \cap \underset{(A^c)^c}{\underset{\shortparallel}{A}} \neq \emptyset$ E $\underline{x \in A^c}$

$\Downarrow$

$x \in A^c$ MA x NON È INTERNO AD A^c $\Rightarrow$ A^c NON È APERTO

ASS.

$(2) \Rightarrow (3)$ SIA $x \in DA$

- x INTERNO $\Rightarrow x \in A$ (ovvio)
- x NON INTERNO $\Rightarrow x \in \partial A \subseteq A$

$\Downarrow$

x NON È ESTERNO (ALTRIMENTI $\exists I_x(\rho)$ CHE NON INTERSECA A)

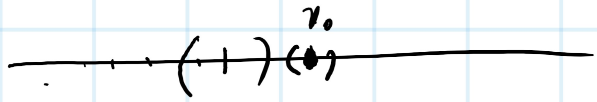
$(3) \Rightarrow (1)$ P.A. A^c NON SIA APERTO $\Rightarrow$ $\exists x \in A^c$ T.C. $\forall \rho > 0 \quad I_x(\rho) \cap A \neq \emptyset$

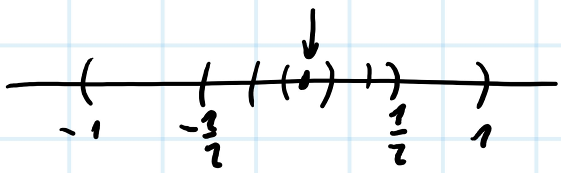
$I_x(\rho) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$

$\Downarrow$

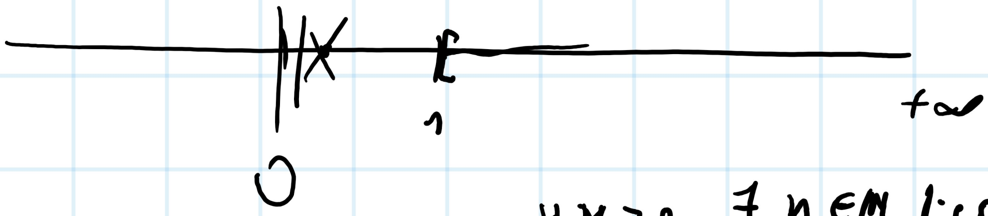
ASS. $\quad x \in DA$

$A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$





$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} = \{0\}$$



$\forall x>0 \ \exists n\in\mathbb{N}$ t.c. $\underbrace{0<\frac{1}{n}<x}_{\Downarrow \; A_n \ni x}$

$\rightarrow A_n = \left[\frac{1}{n}, +\infty\right)$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (0,+\infty)$$

$\boxed{\text{T.}}$ DATI $A, B \subset \mathbb{R}$

A, B APERTI $\Rightarrow$ $A\cup B$ E $A\cap B$ APERTI

$\rightarrow$ .... CHIUSI $\Rightarrow$ .... CHIUSI

$\boxed{\text{DIM}}$

$x\in A\cup B \Rightarrow x\in A$ o $x\in B \Rightarrow \ldots\ldots = I_x(\rho)\subset A\cup B$

$\Downarrow$

$\exists \rho>0$ t.c. $I_x(\rho)\subset A \Rightarrow \underline{I_x(\rho)}\subset A\cup B$

$x\in A\cap B \Rightarrow x\in A$ e $x\in B$

$x\in B \Rightarrow \exists \rho_2>0$ t.c. $I_x(\rho_2)\subset B$

$x\in A \Downarrow$

$\exists \rho_1>0$ t.c. $I_x(\rho_1)\subset A$

Preso $\rho=\min(\rho_1,\rho_2)$ SI HA $I_x(\rho)\subset A\cap B$

A, B Chiusi

$A \cap B$ chiuso $\Leftrightarrow$ $\left(\underbrace{(A \cap B)^c}_{\Updownarrow} \text{ È APERTO} \right)$

?

$A^c \cup B^c$ CHE È APERTO PER PUNTO PRECED.

(IDEM PER $A \cup B$)

$\boxed{T.}$ DATI $\{A_i\}_{i \in I}$ TUTTI SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}$.

$\rightarrow$ 1) $\forall i \in I$ A_i APERTO $\Rightarrow$ $\bigcup_{i \in I} A_i$ APERTO

2) .... CHIUSO $\Rightarrow$ $\bigcap_{i \in I} A_i$ CHIUSA

$\boxed{\text{DIM}}$ $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ $\Rightarrow$ $\exists i \in I$ t.c. $x \in A_i$ $\Rightarrow$ $\exists \rho > 0$ t.c. $\underbrace{I_x(\rho) \subset A_i}_{\Downarrow}$

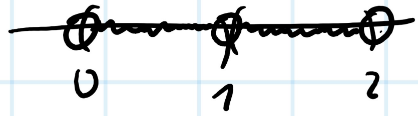
$I_x(\rho) \subset \bigcup A_i$

$\left(\bigcap A_i \right)^c$ È APERTO ?

$\bigcup A_i^c$ APERTA

36 PAG. 10

$A = (0,1) \cup (1,2)$



$\mathring{A} = A$ APERTO

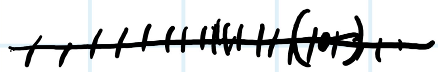
$\partial A = \{0,1,2\}$

$\bar{A} = [0,2]$

37 PAG. 10

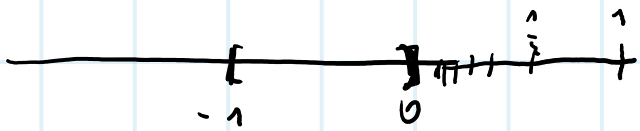
$A = \mathbb{Q}$

$\mathring{A} = \emptyset$



$\partial A = \mathbb{R}$

$\bar{A} = \mathbb{R}$



$A = [-1,0) \cup \underline{\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}}$ $\quad \bar{A} = [-1,0] \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

$\mathring{\bar{A}}$

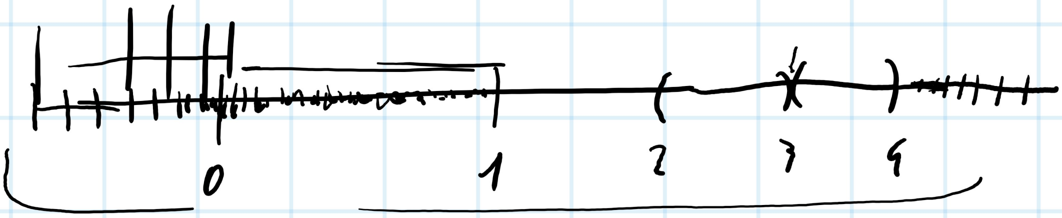
$\mathring{A} = (-1,0) \leftarrow$

$\overline{\mathring{A}} = [-1,0]$

$\mathring{\overline{\mathring{A}}} =$

$\boxed{\text{ES.}}$ TROVARE $A\subset\mathbb{R}$ T.C., OPERANDO SU DI ESSO RIPETUTAMENTE CON CHIUSURA E PARTE INTERNA, SI POSSANO OTTENERE ALTRI 6 INSIEMI DIVERSI.

MOSTRARE POI CHE PIÙ DI 6 DIVERSI NON SI POSSONO OTTENERE



$$A = \{x\in\mathbb{Q} \mid 0<x<1\} \cup (2,3)\cup(3,4) \cup \{-\tfrac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\}$$

$$\mathring{A} = (2,3)\cup(3,4)$$

$$\overline{\mathring{A}} = [2,4]$$

$$\mathring{\overline{\mathring{A}}} = (2,4)$$

$$\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} =$$

$$\overline{A} = \{-\tfrac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\}\cup[0,1]\cup[2,4]$$

$$\mathring{\overline{A}} = (0,1)\cup(2,4)$$

$$\overline{\mathring{\overline{A}}} = [0,1]\cup[2,4]$$

$$\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} =$$

$$\mathring{A}\subset A\subset\overline{A}$$

$\forall A\subset\mathbb{R}$ $\boxed{\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}}$

$\subseteq$

$\boxed{\supseteq}$

$$\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}}$$

$$A\subset B \Rightarrow \begin{array}{l}\mathring{A}\subset\mathring{B}\\ \overline{A}\subset\overline{B}\end{array}$$

$$\overline{\mathring{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} \quad ?$$

$$\mathring{A} \subset \overline{\mathring{A}} \Rightarrow \mathring{\mathring{A}} \subset \mathring{\overline{\mathring{A}}} \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{\overline{\mathring{A}}} \Rightarrow \overline{\mathring{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$$

$$\overline{\mathring{A}} \supset \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} \quad ?$$

$$\overline{\mathring{A}} \supset \mathring{\overline{\mathring{A}}} \Rightarrow \overline{\overline{\mathring{A}}} \supset \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} \Rightarrow \overline{\mathring{A}} \supset \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$$

$$\overline{\mathring{A}} = \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$$

$$\mathring{\overline{A}} = \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} \quad ?$$

$$\subset$$

$$\mathring{\overline{A}} \subset \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} \quad (?) \quad \mathring{A} \subset \overline{\mathring{A}} \Rightarrow \mathring{\mathring{A}} \subset \mathring{\overline{\mathring{A}}} \Rightarrow \mathring{\overline{A}} \subset \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}$$

$$\mathring{\overline{A}} \overset{\subset}{\supset} \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} \quad (?) \qquad \overline{A} \supset \mathring{\overline{A}} \Rightarrow \overline{\overline{A}} \supset \overline{\mathring{\overline{A}}} \Rightarrow \overline{A} \supset \overline{\mathring{\overline{A}}} \Rightarrow \mathring{\overline{A}} \supset \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}$$