APPUNTI RISISTEMATI PER LA I^a PARTE DELLA LEZIONE 7.

A QUESTO PUNTO DEL CORSO, PER POTER FARE ESERCIZI ED ESEMPI SIGNIFICATIVI, DOBBIAMO DEFINIRE ALCUNE FUNZIONI E DESCRIVERE LE LORO PROPRIETÀ.

DEF. 1 UNA FUNZIONE POLINOMIALE È UNA FUNZIONE DEL TIPO

$$p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \dots + A_1 x + A_0 = p(x)$$

TEO. 1 SIA $p(x) = A_k x^k + \dots + A_0$ UN POLINOMIO E (a_n) UNA SUCCESSIONE IN $\mathbb{R}$ t.c. $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

ALLORA $p(a_n) \to \ell$.

DIMO

BASTA APPLICARE IL TEO. SULLE OPERAZIONI CON I LIMITI. SI HA:

$$p(a_n) = A_k (a_n)^k + A_{k-1} (a_n)^{k-1} + \dots + A_1 a_n + A_0 =$$
$$= A_k \cdot \overbrace{a_n \cdot a_n \cdots a_n}^{k} + A_{k-1} \overbrace{a_n \cdot a_n \cdots a_n}^{k-1} + \dots + A_1 a_n + A_0 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow A_k \cdot \overbrace{\ell \cdot \ell \cdots \ell}^{k} + A_{k-1} \overbrace{\ell \cdot \ell \cdots \ell}^{k-1} + \dots + A_1 \cdot \ell + A_0 = p(\ell)$$

OSS. 1 OPERANDO COME NEL CASO DI $\sqrt{2}$ SI TROVA CHE $\forall x \in [0, +\infty)$ ESISTE UN SOLO $y \geq 0$ TALE CHE $y^2 = x$ E CHE VIENE INDICATO CON $\sqrt{x}$. VALE IL SEGUENTE

TEO. 2 LA FUNZIONE $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $x \mapsto \sqrt{x}$ È STRETTAMENTE MONOTONA, BIUNIVOCA E, $\forall (a_n)$ A VALORI IN $[0, +\infty)$, SE $a_n \to \ell \in [0, +\infty)$

ALLORA $\sqrt{a_n} \to \sqrt{\ell}$.

DIMO La suriettività è ovvia perché, $\forall y \in [0,+\infty)$ basta prendere $x=y^2$ per avere che $\sqrt{x}=y$.

Mostriamo ora che è strettamente crescente.

Sappiamo già che $\forall u,v \in \mathbb{R}$ valgono le implicazioni

(*)
$$0 \leq u < v \Rightarrow 0 \leq u^2 < v^2$$
$$0 \leq u = v \Rightarrow 0 \leq u^2 = v^2$$
$$0 \leq v < u \Rightarrow 0 \leq v^2 < u^2.$$

Di conseguenza, se $\overbrace{0<x<y}^{(*)}$, deve essere $0<\sqrt{x}<\sqrt{y}$.

Infatti, se per assurdo fosse $0\leq\sqrt{y}\leq\sqrt{x}$, applicando (*) si otterrebbe $0\leq y\leq x$, che contraddice la (*).

Quindi la funzione è strettamente crescente e quindi anche iniettiva.

Mostriamo infine che, se $a_n \to l$, allora $\sqrt{a_n}\to\sqrt{l}$, cioè mostriamo che:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \text{DEF. IN } n \quad |\sqrt{a_n}-\sqrt{l}|<\varepsilon$$

A tale scopo si osservi che:

$$(\bullet) \quad |\sqrt{a_n}-\sqrt{l}| = \left|\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{l}}{1}\right| = \frac{|a_n-l|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{l}} < \frac{|a_n-l|}{\sqrt{l}}$$

Di conseguenza, siccome $a_n\to l$, si ha che DEF. IN n $|a_n-l|<\varepsilon\cdot\sqrt{l}$

E QUINDI LA (●) DIVENTA:

$$\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{\ell}\right| = \cdots\cdots < \frac{|a_n-\ell|}{\sqrt{\ell}} \overset{\text{DEF INN}}{<} \frac{\varepsilon\cdot\sqrt{\ell}}{\sqrt{\ell}} = \varepsilon$$

CIÒ SIGNIFICA CHE $\sqrt{a_n}\to\sqrt{\ell}$.

OSS. 2 IN MODO DEL TUTTO ANALOGO SI PUÒ DIMOSTRARE CHE LA FUNZIONE $x\mapsto\sqrt[k]{x}$ È BIUNIVOCA, STRETTAMENTE CRESCENTE E TALE CHE SE $a_n\to\ell$ ALLORA $\sqrt[k]{a_n}\to\sqrt[k]{\ell}$.

DEF. 3 DATO $A\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ DEFINIAMO $A^n = \overbrace{A\cdot A\cdots A}^{n}$.
SE INOLTRE $A\neq 0$, DEFINIAMO $A^0=1$ E, $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $A^{-n}=\frac{1}{A^n}$.

OSS. 3 SI DIMOSTRA FACILMENTE (GIÀ DALLA SCUOLA) CHE VALGONO LE USUALI PROPRIETÀ DELLE POTENZE ($A^n\cdot A^m = A^{n+m}$, $(A^n)^m = A^{n\cdot m}$, ...)

DEF 4 DATO $A\in[0,+\infty)$ E $n,m\in\mathbb{N}$ CON $m\neq 0$ DEFINIAMO $A^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{A^n}$ E $A^{-\frac{n}{m}}=\frac{1}{A^{\frac{n}{m}}}$.

OSS 4 LA $\boxed{\text{DEF. 4}}$ È BEN POSTA, NEL SENSO CHE SE $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$, CIOÈ $mq=np$, SI HA $A^{\frac{m}{n}}=A^{\frac{p}{q}}$.
PER VERIFICARLO BASTA MOSTRARE CHE $\left(A^{\frac{m}{n}}\right)^{nq}=\left(A^{\frac{p}{q}}\right)^{nq}$, CIOÈ CHE $\left(\sqrt[n]{A^m}\right)^{nq}=\left(\sqrt[q]{A^p}\right)^{nq}$, CIOÈ CHE $A^{mq}=A^{np}$. MA QUEST'ULTIMA È VERA PERCHÈ $mq=np$.

OSS. 5 ANCHE QUANDO L'ESPONENTE STA IN $\mathbb{Q}$ CONTINUANO A VALERE LE USUALI REGOLE DI CALCOLO PER LE POTENZE. AD ESEMPIO MOSTRIAMO CHE, SE $p,q,n,m\in\mathbb{N}$ CON $q\neq 0$ E $n\neq 0$, ALLORA SI HA:

$$A^{\frac{m}{n}}\cdot A^{\frac{p}{q}} = A^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

PER DIMOSTRARLO SI USANO LE PROPRIETÀ DI CALCOLO DEI RADICALI. SI HA:

$$A^{\frac{m}{n}} \cdot A^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{A^m} \cdot \sqrt[q]{A^p} =$$
$$= \sqrt[nq]{A^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{A^{np}} =$$
$$= \sqrt[nq]{A^{mq} \cdot A^{np}} =$$
$$= \sqrt[nq]{A^{mq+np}} =$$
$$= A^{\frac{mq+np}{nq}} = A^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

TEO.3 SIA $A \in \mathbb{R}$ CON $A > 1$. ALLORA LA FUNZIONE DA $\mathbb{Q}$ IN $(0,+\infty)$ DEFINITA DA $\mathbb{Q} \ni q \longmapsto A^q$, HA LE SEGUENTI PROPRIETÀ.

1) È STRETTAMENTE CRESCENTE
2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}-\{0\}$ TALE CHE $1 < A^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon$
3) $\forall M \in \mathbb{Q} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ TALE CHE $\forall p,q \in \mathbb{Q} \cap (0,M]$ $|p-q| < \delta \Rightarrow |A^p - A^q| < \varepsilon$

DIMO ① BASTA MOSTRARLO SU $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q} \cap [0,+\infty)$, POI SU $\mathbb{Q}^-$ SI OTTIENE PASSANDO AI RECIPROCI.

PRESI $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}^+$, CIOÈ $q_1 = \frac{m}{n}$ E $q_2 = \frac{s}{t}$ CON $m,n,s,t \in \mathbb{N}$ E $n \neq 0$ E $t \neq 0$,

SUPPONIAMO CHE $q_1 < q_2$, CIOÈ $mt < ns$. PER MOSTRARE CHE $A^{q_1} < A^{q_2}$, CIOÈ CHE $A^{\frac{m}{n}} < A^{\frac{s}{t}}$, BASTERÀ VERIFICARE CHE $\left(A^{\frac{m}{n}}\right)^{nt} < \left(A^{\frac{s}{t}}\right)^{nt}$, CIOÈ CHE

$$\left(\left(\sqrt[n]{A^m}\right)^n\right)^t < \left(\left(\sqrt[t]{A^s}\right)^t\right)^n$$

CIOÈ CHE:

$$\left(A^m\right)^t < \left(A^s\right)^n.$$

MA QUEST'ULTIMA È VERA PERCHÉ $mt < sn$.

② VISTO CHE $A^{\frac{1}{n}} > 1$ È SEMPRE VERIFICATA, MOSTRARE LA (2) EQUIVALE A MOSTRARE CHE $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}-\{0\}$ TALE CHE:

$$A < (1+\varepsilon)^n$$

MA QUESTO SEGUE BANALMENTE DALLA DISUG. DI BERNOULLI, PERCHÉ:

$$(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon > A \quad \text{DEF. IN } n.$$

DISUG. DI BERNOULLI

SE $x > -1$ E $n \in \mathbb{N}$, CON $n \geq 2$ ALLORA $(1+x)^n \geq 1+nx$.

DIMO

A) PER $n=2$ È OVVIA PERCHÉ $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 \geq 1+2x$

B) SE VALE PER $n=k$ VALE ANCHE PER $n=k+1$. INFATTI, SUPPOSTO CHE

$$(1+x)^k \geq 1+kx,$$

PER $n=k+1$ SI HA:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+kx) =$$
$$= 1+(k+1)x$$

DA (A) E (B) LA TESI SEGUE PER INDUZIONE

(3) SENZA PERDERE DI GENERALITÀ POSSIAMO SEMPRE SUPPORRE $p>q$.

OSSERVIAMO CHE, FISSATI $\varepsilon>0$ E $M\in\mathbb{Q}$, PERCHÈ L'AFFERMAZIONE SIA VERA BASTA PRENDERE, GRAZIE AL PUNTO 2, $\delta=\frac{1}{n}$, DOVE $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ È TALE CHE

$$1<A^{\frac{1}{n}}<1+\frac{\varepsilon}{A^M}$$

IN TAL CASO INFATTI, ESSENDO $0<p-q<\frac{1}{n}$, SI HA:

$$|A^p-A^q|=A^p-A^q=A^q\left(A^{p-q}-1\right)<A^M\cdot\left(A^\delta-1\right)<A^M\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{A^M}-1\right)=\varepsilon$$

OSS. 5 QUANDO STUDIEREMO LE FUNZIONI UNIFORMEMENTE CONTINUE SCOPRIREMO CHE LA PROPRIETÀ (3) DIMOSTRATA NEL $\boxed{\text{TEO. 3}}$ SIGNIFICA PROPRIO CHE LA FUNZIONE $q\longmapsto A^q$ È UNIFORMEMENTE CONTINUA SU $\mathbb{Q}\cap(-\infty,M]$, PER OGNI $M\in\mathbb{Q}$. A QUEL PUNTO, UTILIZZANDO UN OPPORTUNO TEOREMA SULLE FUNZIONI UNIF. CONTINUE, POTREMO AFFERMARE CHE C'È UN UNICO MODO DI DEFINIRE A^x ANCHE PER $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ IN MODO CHE LA FUNZIONE $x\longmapsto A^x$ SIA CONTINUA SU TUTTO $\mathbb{R}$.

SCEGLIENDO QUESTA COME DEFINIZIONE DI A^x PER $x\in\mathbb{R}$, SI DIMOSTRA CHE VALGONO ANCORA TUTTE LE REGOLE DI CALCOLO PER LE POTENZE. INOLTRE LA CONTINUITÀ DI A^x GARANTIRÀ CHE SE $a_n\to\ell$ ALLORA $A^{a_n}\to A^\ell$.