Analisi Matematica 1 - 19 Ottobre 2023 - docente: Callegari

Lezione 10: Sottosuccessioni

INDICE:

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots,$$

$$\underbrace{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots}$$

$$a(n)$$

$$k \mapsto n(k) \qquad n \longmapsto \frac{1}{n}$$

$$k \mapsto k^2$$

$$a(n(k))$$

$$a(k^2)$$

$$a_{k^2} = \frac{1}{k^2} \qquad a_n = \frac{1}{n}$$

$\boxed{\text{DEF}}$ DATA (a_n), OVVERO $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a(n)$, DIREMO CHE b_n È UNA SSUCC. DI (a_n) SE $\exists\, n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \to n(k)$ (STR. CR.) t.c. $b_k = \dfrac{a(n(k))}{a_{n_k}}$

$\boxed{\text{T.0}}$ DATA (a_n) E DATA (a_{n_k}) SS. DI (a_n), SE $a_n \to \ell$ ALLORA ANCHE $a_{n_k} \to \ell$.

$\boxed{\text{DIM}}$ $\forall I$ INTORNO DI ℓ SAPPIAMO CHE $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in I$.

POICHÉ $k \mapsto n_k$ È ST. CR. SI HA CHE $\forall k \in \mathbb{N}$ $n_k \geq k$

INFATTI $n_1 \geq 1$ (ovvio)

$n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} > n_k$ CIOÈ $n_{k+1} \geq n_k + 1 \geq k + 1$

IND.

$\Downarrow$

$n_k \geq k \quad \forall k$

SE $k \geq n_0$ ALLORA $n_k \geq n_0$ QUINDI $a_{n_k} \in I$.

T. (B-W) SE (a_n) È LIMITATA ALLORA $\exists\, (a_{n_k})$ SSUCC. DI (a_n) E $\ell \in \mathbb{R}$

T.C. $a_{n_k} \to \ell$

$\boxed{\text{DIM}}$

$\exists M > 0$ t.c. $|a_n| \leq M$

DIREMO CHE UN TERMINE $\boxed{a_i}$ DI (a_n) È DI PICCO

SE $\forall n \geq i$ $\quad a_i \geq a_n$

PRENDIAMO TUTTI I TERMINI DI (a_n) CHE SONO DI PICCO

I° CASO : SONO INFINITI

II° CASO : NO

I° CASO

CONSIDERO LA SSUCC. (a_{n_k}) DI (a_n) COSTITUITA DAI PUNTI DI PICCO

(a_{n_k}) È DECRESCENTE PERCHÈ OGNI a_{n_i} È DI PICCO

E QUINDI $a_{n_i} \geq a_j \quad \forall j \geq n_i$ QUINDI ANCHE

$a_{n_i} \geq a_{n_j} \quad \forall j > i$.

STESSO DI (a_n)

INOLTRE (a_{n_k}) È LIMITATA PERCHÈ $|a_{n_k}| \leq M$

QUINDI $a_{n_k} \to \ell$ $\boxed{\text{finito}}$

FINITO PERCHÈ $|a_{n_k}| \leq M \Rightarrow |\ell| \leq M$

ALTRIMENTI SE FOSSE

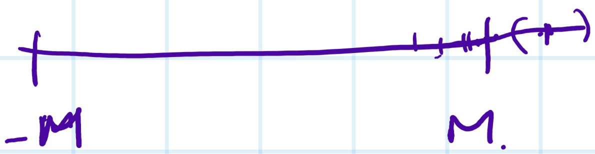
$\ell > M$ o $\ell < -M$

ESISTEREBBE INTORNO I DI ℓ

CHE NON INTERSECA $[-M, M]$

E QUINDI NON PUÒ ESSERE

$a_{n_k} \in I$ DEF. INT.



II° CASO

$\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. NESSUN a_n CON $n \geq \bar{n}$ È DI PICCO.

COSTRUISCO QUINDI UNA SSUCC. STR. CR. DI (a_n) NEL MODO SEGUENTE:

PRENDO $n_0 = \bar{n}$

PRENDO $n_1 > n_0$ t.c. $a_{n_1} > a_{n_0}$

(POSSO PERCHÉ n_0 NON È DI PICCO)

⋮ ⋮

PRENDO $n_{k+1} > n_k$ t.c. $a_{n_{k+1}} > a_{n_k}$

POSSO (STESSO MOTIVO)

⋮

LA SUCC. (a_{n_k}) COSÌ COSTRUITA È ST. CR.

INOLTRE È LIMITATA (STESSO MOTIVO DI 1° CASO)

QUINDI $a_{n_k} \to \ell$ FINITO

T. (CARATT. CHIUSI)

DATO $C \subset \mathbb{R}$ È EQUIV. DIRE CHE:

1) C È CHIUSO

2) $\forall (a_n)$ A VALORI IN C, SE $a_n \to \ell$ ALLORA $\ell \in C$.

$\boxed{\text{DIM}}$ $(1) \Rightarrow (2)$

P.A. $\exists (a_n)$ IN C T.C. $a_n \to \ell \notin C$

ALLORA $\ell \in C^c$ MA OGNI I INTORNO DI ℓ INTERSECA C

PERCHÉ a_n CI STA DEF. DENTRO.

MA ALLORA $\ell \in C^c$ MA NON GLI È INTERNO

QUINDI C^c NON È APERTO (ASSURDO)

$(2) \Rightarrow (1)$ P.A. SUPPONIAMO C NON CHIUSO. QUINDI $\exists\, \bar{x} \in DC$ MA TALE CHE $\bar{x} \notin C$. POICHÉ $\bar{x} \in DC$ SI HA CHE:

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left(\bar{x} - \frac{1}{n}, \bar{x} + \frac{1}{n}\right) \cap C \neq \emptyset$ QUINDI PRENDO $x_n \in$

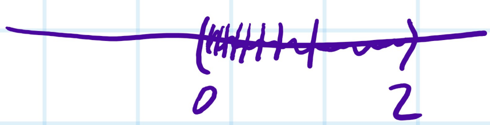
(x_n) È A VALORI IN C T.C. $x_n \to \bar{x} \notin C$ (ASSURDO)

$|x_n - \bar{x}| < \frac{1}{n}$

$\boxed{\text{DEF.}}$ DATO $K \subset \mathbb{R}$ DIREMO CHE K È COMPATTO SE $\forall (a_n)$ A VALORI IN K $\exists$ SSUCC. (a_{n_k}) DI (a_n) T.C. $a_{n_k} \to \ell \in K$

ES. DI INSIEMI NON COMPATTI

1) $(0,2)$ $\quad a_n = \frac{1}{n}$



2) $[0,+\infty)$ $\quad a_n = n$

$\boxed{T.}$ DATO $K \subset \mathbb{R}$ È EQUIV. DIRE CHE

1) K È COMPATTO

2) K È CHIUSO E LIMITATO

$\boxed{\text{DIM}}$

$(1) \Rightarrow (2)$

$\boxed{K \text{ COMPATTO} \Rightarrow K \text{ CHIUSO}}$

P.A. NON SIA CHIUSO. QUINDI $\exists (a_n)$ A VALORI IN K

T.C. $a_n \to \ell \notin K$.

MA ALLORA OGNI (a_{n_k}) SS. DI (a_n) È T.C. $a_{n_k} \to \ell \notin K$

QUINDI NON È POSSIBILE ESTRARRE DA (a_n) UNA SSUCC.

CHE TENDA A UN PUNTO DI K. (ASS.)

$\boxed{K \text{ COMPATTO} \Rightarrow K \text{ LIMITATO}}$

P.A. SIA K NON LIMITATO, QUINDI $\forall n \in \mathbb{N}$

$K \not\subset [-n, n]$ QUINDI $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in K$ T.C. $|x_n| > n$

PRENDO (x_n), AVRÒ CHE OGNI SUA SSUCC. (x_{n_k}) STA DEF. FUORI

DA $[-n, n]$ QUINDI NON PUÒ ESSERE $x_{n_k} \to \ell \in K$

ALTRIMENTI SAREBBE (a_{n_k}) LIMITATA. (ASSURDO)

$(2) \Rightarrow (1)$ DA OGNI (a_n) A VALORI IN K (SICCOME È LIMITATA ESSENDO K LIMITATO) POSSO SEMPRE ESTRARRE (a_{n_k})

CONVERGENTE A ℓ FINITO (PER BOLZ-WEIE)

MA POICHÉ K È CHIUSO DEVE ESSERE $\ell \in K$.

$\boxed{\text{DEF.}}$ DATA (a_n) A VALORI IN $\mathbb{R}$, DIREMO CHE (a_n) È DI CAUCHY SE:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n, m \geq n_0 \ |a_n - a_m| < \varepsilon$.

$\boxed{\text{T.}}$ DATA (a_n) A VALORI IN $\mathbb{R}$ È EQUIV. DIRE CHE:

1) (a_n) È DI CAUCHY

2) (a_n) CONV. A LIMITE FINITO ℓ

$\boxed{\text{DIM}}$

$(2) \Rightarrow (1)$

$(2) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq n_0$ SI HA $|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$

MA ALLORA $\forall n, m \geq n_0$ SI HA $|a_n - a_m| =$

$= |a_n - \ell + \ell - a_m| \leq$

$\leq |a_n - \ell| + |\ell - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

QUINDI (a_n) È DI CAUCHY

$(1) \Rightarrow (2)$ INTANTO (a_n) È LIMITATA PERCHÈ PRESO $\varepsilon = 1$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$\forall n, m \geq n_0 \ |a_n - a_m| < 1$.

IN PARTICOLARE $\forall n \geq n_0 \ |a_n - a_{n_0}| < 1$

OVVERO $a_{n_0} - 1 < a_n < a_{n_0} + 1$ $\quad [a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1] = \underline{I}$

PRENDO INOLTRE $a = \min\{a_1, \dots, a_{n_0 - 1}\}$

$b = \max\{a_1, \dots, a_{n_0 - 1}\}$

QUINDI $\overline{\{a_1, \dots, a_{n_0-1}\}} \subset [a, b]$

$$A = \text{MIN}(a, a_{n_0} - 1)$$

$$B = \text{MAX}(b, a_{n_0} + 1)$$

$$\{a_n\} \subset [A, B]$$

ESSENDO (a_n) LIMITATA $\exists$ (a_{n_k}) SS DI (a_n) T.C. $a_{n_k} \to l$ FINITO PER BOLZ-WEIR.

MOSTRIAMO ORA CHE TUTTA $a_n \to l$ [. . .].

DA FINIRE

. . . . . .