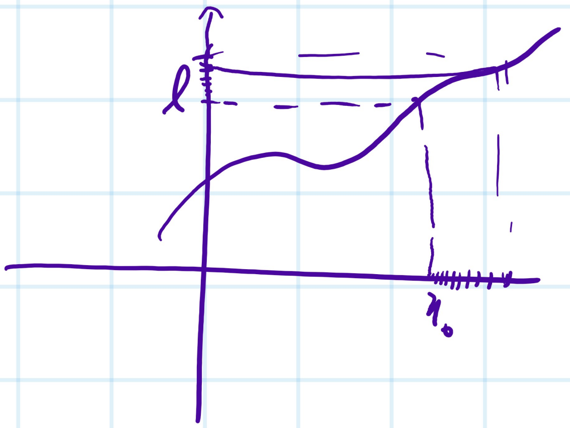
Analisi Matematica 1 - 25 Ottobre 2023 - docente: Callegari

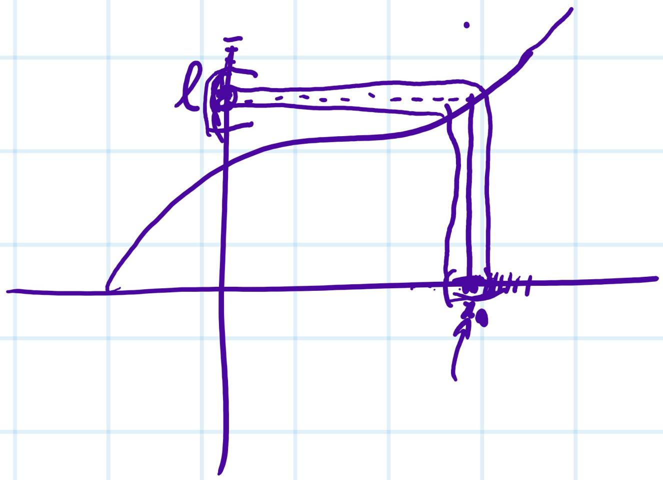
Lezione 13: Limiti di funzioni da R in R

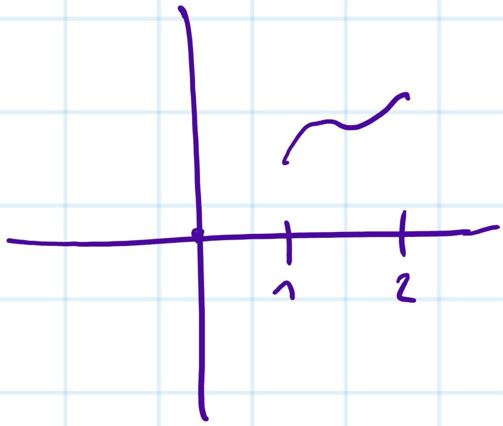
INDICE

1) DEF. DI LIMITE (9 CASI) E ESEMPI : $\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{(x-2)^2} = +\infty$
2) DEF. GENERALE DI LIMITE
3) T. PONTE
4) LIM. DESTRO E SINISTRO
5) CARRELLATA TEOREMI SIMILI A SUCCESSIONI
   - 5.1) UNICITÀ LIMITE
   - 5.2) PERMANENZA SEGNO
   - 5.3) LIM FUNZIONI MONOTONE
   - 5.4) T. CONFRONTO
   - 5.5) T. OPERAZIONI SUI LIMITI
6) ALTRI TEOREMI: LIM. FUNZIONE COMPOSTA
7) LIMITI NOTEVOLI



LIMITI DI $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$





$\boxed{\text{DEF. 1.1}}$ DATO $A\subset\mathbb{R}$, x_0 DI ACC. PER A, $f:A\to\mathbb{R}$, $\ell\in\mathbb{R}$ DIREMO CHE "$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$" SE $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ t.c. $x\in(A-\{x_0\})$ E $|x-x_0|<\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

$\boxed{\text{DEF. 1.2}}$ DATI A, x_0, f COME PRIMA DIREMO CHE "$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$" SE
$\forall M\in\mathbb{R}\ \exists\delta>0$ t.c. $x\in(A-\{x_0\})$ E $|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M$

$\boxed{\text{DEF. 1.3}}$ DATO $\boxed{A\subset\mathbb{R}\ \text{NON SUP. LIMITATO}}$ E $f:A\to\mathbb{R}$ DIREMO CHE "$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$" SE $\forall M\in\mathbb{R}\ \exists N>0$ T.C. $\forall x\in A$ $x>N \Rightarrow f(x)<M$

$\boxed{\text{DEF. 2}}$ DEFINIAMO INTORNI DI $+\infty$ TUTTE LE SEMIRETTE DEL TIPO $(a,+\infty)$
. . . . . $-\infty$ . . . . $(-\infty, a)$

$\boxed{\text{NOTAZIONE}}$ $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}=\mathbb{R}^*$

$\boxed{\text{DEF. GENERALE DI LIMITE}}$ DATI A, $x_0\in\mathbb{R}^*$ CHE SIA DI ACC. PER A, $f:A\to\mathbb{R}$ E $\ell\in\mathbb{R}^*$, DIREMO CHE

" $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ " SE $\boxed{\forall I \text{ INTORNO DI } \ell \ \exists J \text{ INTORNO DI } x_0 \text{ t.c. } x \in (A - \{x_0\}) \cap J \Rightarrow f(x) \in I}$

ESEMPIO

$$\boxed{\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{(x-2)^2} = +\infty}$$

$$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \left.\begin{array}{l} x \neq 2 \\ |x-2| < \delta \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) > M \qquad (??)$$

> 1

$x \neq 2$

$$\frac{x^2}{(x-2)^2} > M$$

$$x^2 > M(x-2)^2$$

$$\frac{x^2}{M} > (x-2)^2$$

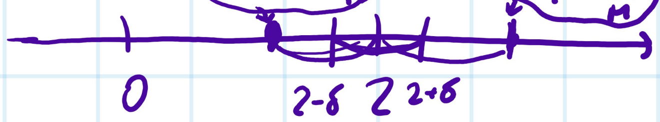
$$\left(1 - \frac{1}{M}\right)x^2 - 4x + 4 < 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\left(1 - \frac{1}{M}\right)}}{1 - \frac{1}{M}} = \frac{2 \pm \sqrt{\frac{4}{M}}}{1 - \frac{1}{M}} = \frac{2 \pm 2\frac{1}{\sqrt{M}}}{1 - \frac{1}{M}} = 2\,\frac{1 \pm \frac{1}{\sqrt{M}}}{1 - \frac{1}{M}}$$

$$2 \cdot \frac{1 \pm \frac{1}{\sqrt{M}}}{1 - \frac{1}{M}}$$

$$2 \cdot \boxed{\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{M}}}{1 - \frac{1}{M}}} \quad < 1$$

$$2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{M}}}{1 - \frac{1}{M}} \qquad 2 \cdot \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{M}}}{1 - \frac{1}{M}}$$



$\boxed{\text{T. (PONTE)}}$ DATI $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ DI ACC. PER A, $\ell \in \mathbb{R}^*$, $f: A \to \mathbb{R}$.
È EQUIVALENTE DIRE CHE:

$\to$ 1) $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}$ $\leftarrow$

2) $\forall (a_n)$ A VALORI IN $\underbrace{A - \{x_0\}}_{(*)}$, SE $\underbrace{a_n \to x_0}_{(*)}$ ALLORA ANCHE $f(a_n) \to \ell$

$\boxed{\text{DIM}}$

$(1) \Rightarrow (2)$

$\boxed{\forall I \text{ INTORNO DI } \ell, \text{ DEF. IN } n, f(a_n) \in I}$ (??)

PRENDO J INTORNO DI x_0 t.c. $\overbrace{x \in \underbrace{J \cap (A - x_0)} \Rightarrow f(x) \in I}^{(\square)}$

(POSSO FARLO GRAZIE A (1))

DA $(*)$ SEGUE CHE DEF. IN n $a_n \in \underbrace{J \cap (A - x_0)}$, QUINDI

DA $(\square)$ SEGUE CHE $\overset{\text{DEF. IN } n}{f(a_n) \in I}$.

$\underline{(2)} \Rightarrow (1)$ P.A. NON SIA VERO CHE "$\forall I$ INTORNO DI ℓ $\exists J$ INTORNO DI x_0 t.c.
$x \in J \cap (A - \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in I$"

CIOÈ CHE:

$\to (\bullet)$ $\left[\begin{array}{l} \exists I \text{ INTORNO DI } \ell \text{ t.c. } \forall J \text{ INTORNO DI } x_0 \ \exists x \text{ t.c. } x \in J \cap (A - \{x_0\}) \\ \text{MA } f(x) \notin I. \end{array}\right.$

DISTINGUO 2 CASI: $\overset{1° \text{CASO}}{\boxed{x_0 \in \mathbb{R}}}$ o $\overset{2° \text{CASO}}{\boxed{x_0 = \pm\infty}}$

1° CASO $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ PRENDO $(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$. GRAZIE A $(\bullet)$

$\exists$ UN ELEMENTO DI $(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) \cap (A - \{x_0\})$ LA CUI IMMAGINE
NON STA IN I. LO CHIAMO a_n

CONSIDERO LA SUCC. (a_n) DEI PUNTI COSÌ PRESI.

HO CHE $a_n \to x_0$ PERCHÉ $|a_n - x_0| < \frac{1}{n}$.

MA $f(a_n) \not\to \ell$ PERCHÉ $f(a_n) \notin I$. (ASSURDO)

$\boxed{2° \text{ CASO}}$ $\boxed{x_0 = +\infty}$ IN TAL CASO $(\bullet)$ SIGNIFICA CHE

$\exists I$ INTORNO DI ℓ t.c. $\forall M > 0 \; \exists x \in A - \{x_0\}$ t.c. $x > M$ MA $f(x) \notin I$. (Δ)

QUINDI $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists a_n \in \underbrace{(A - \{x_0\}) \cap (n, +\infty)}$ t.c. $f(a_n) \notin I$

CONSIDERO LA SUCC. (a_n) COSÌ COSTRUITA.

SI HA $a_n \to +\infty$ PERCHÉ VALE (Δ) MA $f(a_n) \not\to \ell$

PERCHÉ $f(a_n) \notin I$. (ASSURDO)

GRAZIE A T.P. HO GRATIS T. OP. LIMITI.

$\boxed{\text{T. (OP. SU LIMITI)}}$

DATI $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ DI ACC. PER A, $f, g : A \to \mathbb{R}$, E $\ell, L \in \mathbb{R}$.

t.c. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$.

ALLORA

1) $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell + L$

→ 2) $\boxed{\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell \cdot L}$

3) SE $L \neq 0$ $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{L}$

$\boxed{\text{DIM}}$ (2) DEVO DIM. CHE $\forall (a_n)$ A VALORI IN $A - \{x_0\}$

$a_n \to x_0 \Rightarrow f(a_n) \cdot g(a_n) \to \ell \cdot L$ (??)

$$f(a_n) \to \ell \qquad g(a_n) \to L$$

$$\boxed{f(a_n) \cdot g(a_n)} \to \boxed{\ell \cdot L}$$ PERCHÉ T. VALE PER SUCC.

$\ell \qquad L$

(a_n)

$a_n \to x_0 \Rightarrow \boxed{f(a_n)} \to \ell$

$a_n \to x_0 \Rightarrow \boxed{f(a_n)} \to L$

$f(x) < g(x) < h(x)$

$f(a_n) < \boxed{g(a_n)} < h(a_n)$

$]x_0, x_0+\rho[$

$\boxed{\text{DEF.}}$ DATI $A \subset \mathbb{R}$, x_0 t.c. $\forall \rho > 0$ $(x_0-\rho, x_0) \cap A \neq \emptyset$, $f: A \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}^*$

DIRENO CHE $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ SE

$(x_0, x_0+\delta)$

$\forall I$ INTORNO DI ℓ (x_0^+) $\exists \delta > 0$ t.c. $x \in A \cap (x_0-\delta, x_0) \Rightarrow f(x) \in I$