Lezione 18: Funzioni Continue (II)

INDICE

T. (VALORI INTERM.) DATI $A=[a,b]$ E $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ CONTINUA, ALLORA

$\forall\lambda\in$ INTERVALLO APERTO DI ESTREMI $f(a), f(b)$ $\exists c\in(a,b)$ t.c. $f(c)=\lambda$.

$\boxed{\text{DIM}}$

PRENDO $g(x)=f(x)-\lambda$ HO CHE $g(x)$ È CONTINUA SU $[a,b]$ E

$g(a)$ E $g(b)$ SONO UNO POSITIVO E UNO NEGATIVO

$$\left.\begin{array}{l} g(a)=f(a)-\lambda \\ g(b)=f(b)-\lambda \end{array}\right\}$$ UNO POSIT. E UNO NEG. (STRETT)

QUINDI PER T. ZERI $\exists c\in(a,b)$ T.C. $g(c)=0$ CIOÈ $f(c)-\lambda=0$

CIOÈ $f(c)=\lambda$.

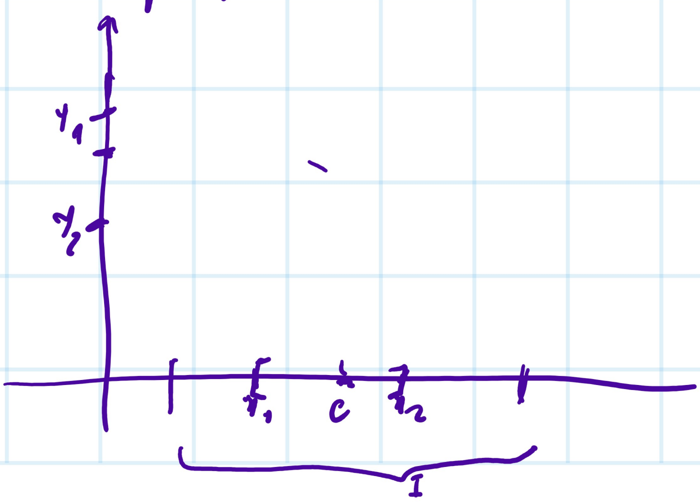
$\boxed{\text{OSS.}}$ T.V.I EQUIVALE A DIRE CHE f MANDA INTERVALLI IN INTERVALLI.

SE I È INTERVALLO $f(I)$ LO DEVE ESSERE PERCHÉ

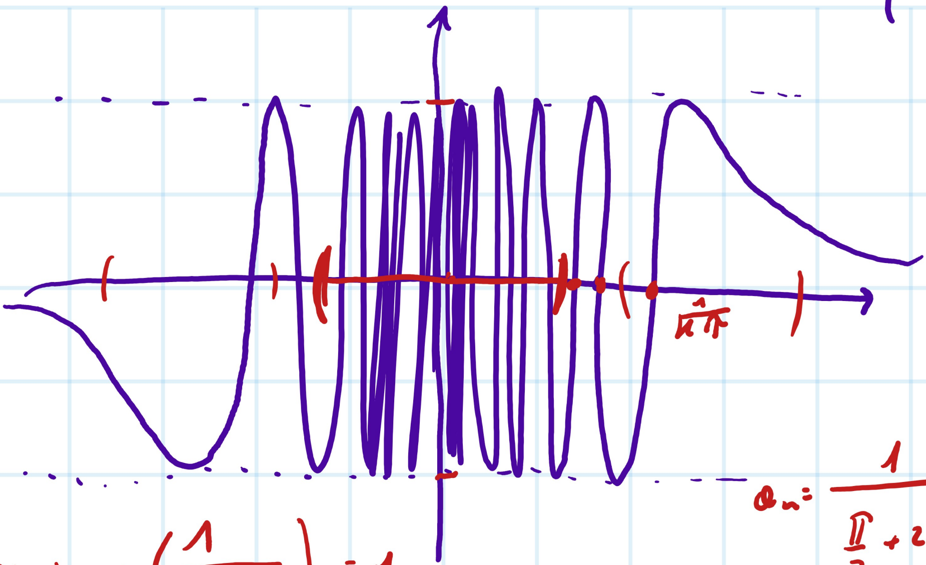
SE $y_1, y_2\in f(I)$ ALLORA PRENDO $x_1, x_2\in I$ t.c. $f(x_1)=y_1$ $f(x_2)=y_2$

ORA $\forall\lambda$ STRETTAMENTE COMPRESO TRA y_1 E y_2 $\exists c\in(x_1,x_2)\subset I$

T.C. $f(c)=\lambda\in f(I)$.



$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$$a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \to 0^+$$

$$f(a_n) = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}}\right) = 1$$

$$b_n = \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2n\pi} \to 0^+$$

$$f(b_n) = -1$$

$\boxed{\text{TEO}}$ (COMP. DI f CONTINUE)

DATI $A, B \subset \mathbb{R}$ E $g: A \to B$ $f: B \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $y_0 \in B$ t.c. $g(x_0) = y_0$. SUPPONIAMO CHE g CONTINUA IN x_0 f continua in y_0

ALLORA $f(g(x))$ È CONTINUA IN x_0.

$\boxed{\text{DIM}}$

BASTA DIMOSTRARE CHE SE (a_n) È A VALORI IN A E $a_n \to x_0$ ALLORA

$f(g(a_n)) \to f(g(x_0))$

INFATTI DALLA CONTINUITÀ DI g IN x_0 SEGUE CHE $g(a_n) \to g(x_0) = y_0$

QUINDI $g(a_n)$ È UNA SUCC. IN B CHE TENDE A y_0, QUINDI

DALLA CONTINUITÀ DI f IN y_0 SEGUE CHE $f(g(a_n)) \to f(y_0) = f(g(x_0))$

$\boxed{\text{T. WEIERSTRASS}}$

SE $K \subset \mathbb{R}$ COMPATTO E $f: K \to \mathbb{R}$ CONTINUA, ALLORA $f(K)$ È COMPATTO.

$\boxed{\text{DIM}}$ VOGLIO MOSTRARE CHE $\forall (y_n)$ A VALORI IN $f(K)$ POSSO ESTRARRE DA

$y_{n_k} \to \bar{y} \in f(K)$

PRENDO (x_n) A VALORI IN K t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(x_n) = y_n$.

POICHÉ K È COMPATTO $\exists (x_{n_k})$ SSUCC. DI (x_n) t.c. $x_{n_k} \to \bar{x} \in K$

POICHÉ f È CONTINUA, DAL T. PONTE SEGUE CHE $f(x_{n_k}) \to f(\bar{x}) = \bar{y} \in f(K)$

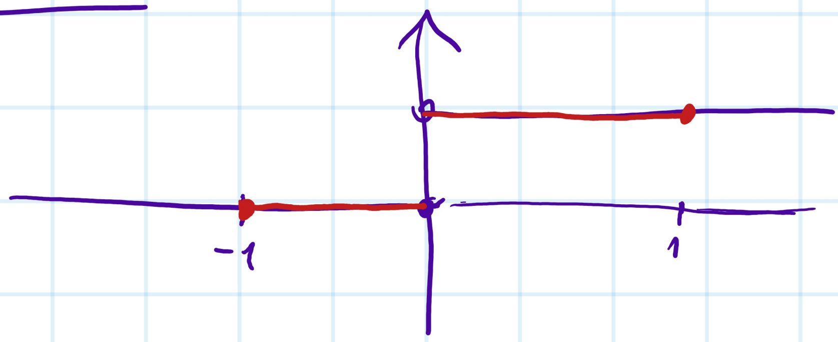
E $(f(x_{n_k})) = (y_{n_k})$ È UNA SSUCC. DI (y_n).

QUINDI ABBIAMO ESTRATTO DA (y_n) UNA SSUCC CONV. A UN PUNTO DI $f(K)$.

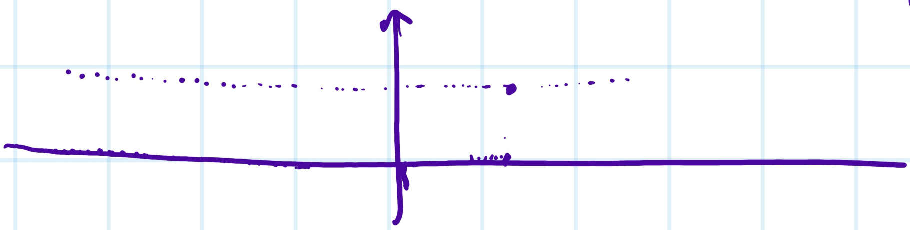
$\boxed{\text{COROLLARIO}}$ (CON STESSE IPOTESI) f HA MAX E MIN SU K.

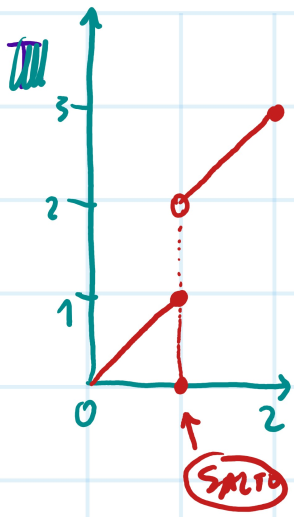
$\boxed{\text{DIM}}$ $f(K)$ È COMPATTO QUINDI È LIMITATO QUINDI INF(A) E SUP(A)

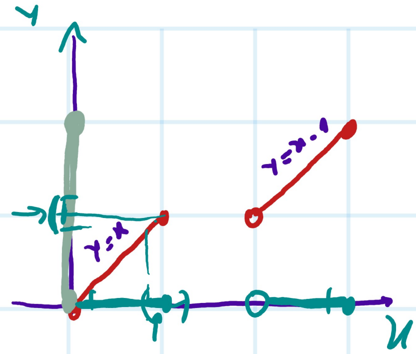
SONO FINITI. INOLTRE $f(K)$ È CHIUSO INF, SUP $\in f(K)$ CIOÈ SONO MAX E MIN.



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{SE } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{SE } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$







$f: [0,1] \cup (2,3] \to [0,2]$

$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x & \text{SE } 0 \leq \\ x-1 & \text{SE } 2< \end{cases}$

$\boxed{\text{T. CONT. DI INVERSA}}$

DATI $A, B \subset \mathbb{R}$ E $f: A \to B$ CONTINUA E BIUNIVOCA, ALLORA $f^{-1}: B \to A$

È CONTINUA SE VALE ALMENO UNA DELLE CONDIZIONI SEGUENTI

→ 1) A È COMPATTO

2) A È INTERVALLO.

$\boxed{\text{DIM}}$ 1 P.A. SIA $f^{-1}: B \to A$ NON CONTINUA IN $\bar{y}$. PER T.P. $\exists (y_n)$ A VALORI IN A t.c. $y_n \to \bar{y}$ MA $\underbrace{f^{-1}(y_n)}_{(x_n)} \not\to \bar{x} = f^{-1}(\bar{y})$.

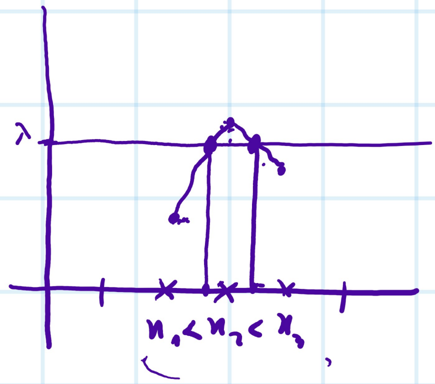
POICHÉ $x_n \to \bar{x}$ $\exists I$ INTORNO DI $\bar{x}$ t.c. (x_n) STA FREQ. FUORI I

QUINDI PRENDO (x_{n_k}) SSUCC. DI (x_n) T.C. (x_{n_k}) È A VALORI IN $A - I$. POICHÉ A È COMPATTO $\exists (x_{n_{k_h}})$ SSUCC. DI (x_{n_k}) T.C. $\boxed{x_{n_{k_h}}} \to \tilde{x} \in A$. SI HA $\tilde{x} \neq \bar{x}$ PERCHÉ $x_{n_{k_h}}$ NON STA MAI DENTRO I. PRESA $(y_{n_{k_h}})$ LA CORRISPONDENTE SSUCC. DI (y_n), PER IL T. PONTE SI HA

$$\left(y_{n_{k_h}}\right) = f\left(x_{n_{k_h}}\right) \to f(\hat{x}) \neq f(\bar{x}) = \bar{y}$$

(ASSURDO PERCHÉ $y_n \to \bar{y}$ E QUINDI TUTTE LE SUE SSUCC. DEVONO TENDERE A $\bar{y}$)

(2) I° PASSO: f È NECESSARIAMENTE MONOTONA STRETT.



CI SONO 6 CASI

(*) $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$

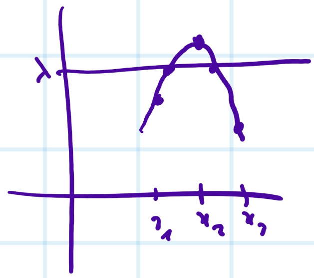
$f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$

(*) $\boxed{f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)}$

$f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)$

$f(x_2) < f(x_3) < f(x_1)$

$f(x_3) < f(x_1) < f(x_2)$



QUESTI NON SI POSSONO VERIFICARE

PERCHÉ (FACCIO SOLO (*)) (IDEM GLI ALTRI)

SE $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$ PRENDO λ t.c. $f(x_1) < f(x_3) < \lambda < f(x_2)$.

PER. T. VAL. INTERM. $\exists\, c_1 \in (x_1, x_2)$ E $\exists\, c_2 \in (x_2, x_3)$ t.c.

$f(c_1) = \lambda = f(c_2)$. QUINDI f NON È INIETTIVA. (ASSURDO)

QUINDI SI VERIFICA SEMPRE (*).

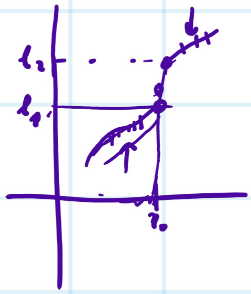
$\boxed{\text{OSS.}}$ SE $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ È CRESC. (DECR.) E $x_0 \in (a,b)$ È DI DISCONTINUITÀ PER g

ALLORA x_0 È P.T. DI SALTO.

$\boxed{\text{DIM}}$

$$\lim_{x\to x_0^-} g(x) = \sup_{x\in[a,x_0)} g(x) = \underline{\ell_1 \in \mathbb{R}}$$

$$\lim_{x\to x_0^+} g(x) = \inf_{x\in(x_0,b]} g(x) = \underline{\ell_2 \in \mathbb{R}}$$



$\ell_1 \le g(x_0) \le \ell_2$ $\qquad$ $\ell_1 = \ell_2 \Rightarrow f$ CONTINUA IN x_0

QUINDI f DISCONTINUA IN $x_0 \Rightarrow \ell_1 \neq \ell_2$