Lezione 20: Esempio di I esonero

$\boxed{1}$ TROVARE, SE ESISTONO, OPPURE DIMOSTRARE CHE NON ESISTONO $\inf(A)$, $\sup(A)$, $\min(A)$, $\max(A)$ DOVE $A = \left\{ \frac{2023}{n} + n^2 \;\middle|\; n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$

$\boxed{2}$ CALCOLARE $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^{n+1} + n}{n^{n+1} + \sqrt{n}} \right)^{(n+1)^n}$

$\boxed{3}$ CONFRONTARE GLI ORDINI DI INFINITESIMO DELLE SEGUENTI SUCCESSIONI:

$$a_n = \frac{1}{n^4 + (1+(-1)^n)\, n^{10}} \qquad b_n = \frac{1}{n^7} \qquad c_n = \begin{cases} \frac{1}{n^5} & \text{SE } 1 \le n \le 1000 \\ \frac{1}{n^8} & \text{SE } n \geq 1001 \end{cases}$$

$\boxed{4}$ CONFRONTARE GLI ORDINI DI INFINITESIMO PER $x \to 0^+$ DELLE SEGUENTI FUNZIONI

$$f(x) = (\cos x)^{\sin x} - 1 \qquad g(x) = (\tan x)^{\sin x} - (\sin x)^{\tan x} \qquad h(x) = \tan(\tan x) - \sin(\sin x) \qquad k(x) = e^{-\frac{1}{\sin x}}$$

$\boxed{5}$ MOSTRARE CHE L'EQUAZIONE $\ln(1 + x^{18}) = x^{100}$ HA ALMENO 3 SOLUZIONI.

$\boxed{6}$ DATI $A, B \subset \mathbb{R}$ NON VUOTI, DEFINIAMO $d(A,B) = \inf\{|x-y| \mid x \in A, y \in B\}$ DIRE SE È VERA O FALSA L'AFFERMAZIONE:

$$d(A,B) = 0 \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

NEI SEGUENTI CASI 1) A, B APERTI 2) A, B CHIUSI, 3) A CHIUSO E B COMPATTO.

SOLUZIONI

DA VOLTA SCORSA

6. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ CONTINUA E PERIODICA SIA DI PERIODO $T_1=1$ SIA $T_2=\sqrt{2}$

DIMOSTRARE CHE f È COSTANTE.

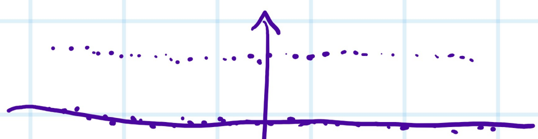
DEF $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ SI DICE PERIODICA DI PER. T SE

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=f(x+T)$$

$$\mathcal{T}=\{T>0 \mid T \text{ È PERIODO}\}$$

ES. CATTIVO

$$f(x)=\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases}1 & \text{SE } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{ALTRIMENTI}\end{cases}$$



OSS. SE $\mathcal{T}=\{T>0 \mid T \text{ È PERIODO PER } f\}$ HA INF $=0$ E f È CONTINUA ALLORA f È COST.

DIM DA CONTINUITÀ IN 0 SEGUE:

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ t.c. $|x|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(0)|<\varepsilon$

PRENDO $T\in\mathcal{T}$ t.c. $0<T<\delta$ ALLORA $\forall x\in\mathbb{R}\ \exists x'\in[0,T]$ t.c. $f(x)=f(x')$

MA SICCOME $[0,T]\subset(-\delta,\delta)$ SI HA $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$

OVVERO $\forall\varepsilon>0$ SI HA CHE $\forall x\in\mathbb{R}$ $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$

QUINDI $\forall x\in\mathbb{R}$ $|f(x)-f(0)|=0$ CIOÈ $f(x)=f(0)$

MOSTRIAMO CHE SE 1 E $\sqrt{2}$ SONO PERIODI ALLORA CI SONO PERIODI ARBITRARIAMENTE PICCOLI.

$\boxed{\text{OSS.}}$ SIA $\mathcal{T}$ = INSIEME DEI PERIODI DI UNA $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ PERIODICA

PRENDIAMO $\underline{A = -\mathcal{T}\cup\{0\}\cup\mathcal{T}}$

A = insieme di tutti i T t.c. $f(x)=f(x+T)$

DE

$$f(x)=f(x+T)$$

$$f(x+T-T)=f(x+T)$$

$$f(y-T)=f(y)$$

T_1 $\quad T_2$ $\quad T_1+T_2$

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x+\boxed{T_1+T_2})=f(x)\ ?$$

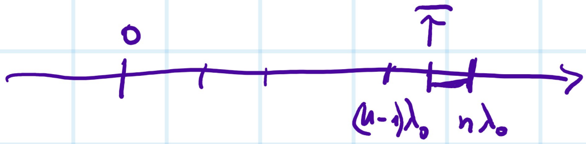
$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x+T_1+T_2)\underset{\uparrow\, T_2 \text{ è per.}}{=} f(x+T_1)\underset{\uparrow\, T_1 \text{ è per.}}{=} f(x)$$

T_1, T_2 per. $\quad\forall n,m\in\mathbb{Z}\quad nT_1+mT_2$ È PERIODO

SIA $\lambda_0 = \inf\{T>0 \mid T \text{ È PERIODO}\}$

MOSTRO CHE SE $\lambda_0>0$ ALLORA OGNI $T\in\mathcal{T}$ SI HA $T=n\lambda_0$ CON $n\in\mathbb{Z}$

PER ASS. SIA $\bar{T}$ NON DEL TIPO ⊛ SI PUÒ SUPPORRE $\bar{T}>0$



HO ASSURDO PERCHÉ $n\lambda_0 - \bar{T}$ È PERIODO T.C. $0 < \underbrace{n\lambda_0 - \bar{T}} < \lambda_0$

MENTRE λ_0 È INF.

$\sqrt{2}$, 1

$n\lambda_0 = \sqrt{2}$ $\qquad \lambda_0 = \frac{\sqrt{2}}{n}$ $\qquad \boxed{\frac{\sqrt{2}}{n} = \frac{1}{m}}$ $\boxed{\text{ASS.}}$

$m\lambda_0 = 1$ $\qquad \lambda_0 = \frac{1}{m}$

$\boxed{5}$ MOSTRARE CHE L'EQUAZIONE $\underbrace{\ln(1+x^{100}) = x^{18}}$ HA ALMENO 3 SOLUZIONI

(0) f, g continue in $[a,b]$ t.c. $f(a) < g(a)$ $\quad f(b) > g(b) \Rightarrow \exists c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = g(c)$

$\boxed{\text{DIM}}$

$h(x) = f(x) - g(x)$ CONTINUA $\quad h(a) < 0 \quad h(b) > 0 \overset{\text{T.Z.}}{\Rightarrow} \exists c \in (a,b)$ t.c. $h(c) = 0$

$f(c) - g(c) = 0 \qquad f(c) = g(c)$

$$\ln(1+x^{18}) = x^{100}$$

$x \to 0^+$

$$x^{100} = o(\ln(1+x^{18}))$$

$$\Downarrow$$

$(*)$ $\quad x^{100} < \ln(1+x^{18})$ PER x piccoli.

$x \to +\infty$

$$\ln(1+x^{10}) = o(x^{100})$$

$(\ast)$ $\ln(1+x^{10}) < x^{100}$ PER x GRANDE

PRENDO $a \in \mathbb{R}$ t.c. VALE $(\ast)$ E $b \in \mathbb{R}$ t.c. VALE $(\ast)$

E APPLICO OSS. (0) A f, g SU $[a,b]$.

$\boxed{2}$ CALCOLARE $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^{n+1}+n}{n^{n+1}+\sqrt{n}}\right)^{(n+1)^n} =$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^{n+1}+\sqrt{n}+n-\sqrt{n}}{n^{n+1}+\sqrt{n}}\right)^{(n+1)^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{\boxed{\frac{n^{n+1}+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}}}\right)^{\boxed{}}}_{e}\right)^{\overbrace{\boxed{\frac{(n+1)^n}{\boxed{}}}}^{e}} = e^{e}$$

$$\boxed{} = \frac{(n+1)^n}{\frac{n^{n+1}+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}} = \frac{(n+1)^n}{n^n}\cdot\frac{1}{\frac{n+\frac{\sqrt{n}}{n^n}}{n-\sqrt{n}}} = \underbrace{\overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}^{e}\cdot\overbrace{\frac{n-\sqrt{n}}{n+\frac{\sqrt{n}}{n^n}}}^{1}}_{e}$$

$\boxed{3}$ CONFRONTARE GLI ORDINI DI INFINITESIMO DELLE SEGUENTI SUCCESSIONI:

$$a_n = \frac{1}{\underline{n^4} + \underline{(1+(-1)^n)}\,\underline{n^{10}}} \qquad b_n = \frac{1}{n^7} \qquad c_n = \begin{cases} \frac{1}{n^5} & \text{SE } 1 \le n \le 1000 \\ \frac{1}{n^8} & \text{SE } n \ge 1001 \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^4+2n^{10}} & n \text{ PARI} \\ \frac{1}{n^4} & n \text{ DISPARI} \end{cases} \qquad b_n = \frac{1}{n^7}$$

$$\frac{b_n}{a_n} = \begin{cases} \xrightarrow{n \text{ PARI}} \frac{\frac{1}{n^7}}{\frac{1}{n^4+2n^{10}}} = \frac{n^4+2n^{10}}{n^7} \to +\infty \\ \xrightarrow{n \text{ DISPARI}} \frac{\frac{1}{n^7}}{\frac{1}{n^4}} = \frac{n^4}{n^7} = \frac{1}{n^3} \to 0 \end{cases}$$

$$c_n = o(b_n)$$

$$\frac{c_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n^8}}{\frac{1}{n^7}} = \frac{1}{n} \to 0$$

$c_n = o(b_n)$ E a_n NON È CONFRONTABILE CON b_n E c_n

$\boxed{4}$ CONFRONTARE GLI ORDINI DI INFINITESIMO PER $\boxed{x \to 0^+}$ DELLE SEGUENTI FUNZIONI

$$f(x) = (\cos x)^{\sin x} - 1 \qquad g(x) = (\tan x)^{\sin x} - (\sin x)^{\tan x} \qquad h(x) = \tan(\tan x) - \sin(\sin x) \qquad k(x) = e^{-\frac{1}{\sin x}}$$

$$\boxed{-\frac{x^3}{2}} \qquad \boxed{\frac{x^3}{2}\ln(\sin x)} \qquad x^3$$

$$f(x) = \underline{(\cos x)}^{\sin x} - 1 = e^{\ln(\cos x)^{\sin x}} - 1 =$$

$$= e^{\sin x \cdot \ln(\cos x)} - 1 \approx \sin x \cdot \underline{\ln(\cos x)} \approx$$

$$\approx x \cdot \left(-\frac{x^2}{2}\right) = \boxed{-\frac{x^3}{2}}$$

$$\ln(\cos x) = \ln\left(1+(\cos x - 1)\right) \approx$$
$$\approx \cos x - 1 \approx -\frac{x^2}{2}$$

$$g(x) = (\tan x)^{\sin x} - (\sin x)^{\tan x} = e^{\sin x \cdot \ln \frac{\sin x}{\cos x}} - e^{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \ln(\sin x)} =$$

$$= e^{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \ln(\sin x)} \cdot \left(e^{\sin x \cdot (\ln(\sin x) - \ln \cos x) - \frac{\sin x}{\cos x} \ln \sin x} - 1\right)$$

$$= \underbrace{e^{\frac{\sin x}{\cos x} \ln(\sin x)} \cdot \left(e^{\boxed{\frac{\sin x}{\cos x}\left(\cos x \ln(\sin x) - \cos x \ln \cos x - \ln \sin x\right)}} - 1\right)}_{(\circledast)}$$

$$\circledast = o(\bullet)$$

$$= e^{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \ln(\sin x)} \cdot$$

$$\boxed{} = \frac{\sin x}{\cos x}\left(\underbrace{\overbrace{(\cos x - 1)\ln(\sin x)}^{\bullet}}_{-\frac{x^2}{2} \cdot \ln(\sin x)} - \underbrace{\overbrace{\cos x \cdot \ln\left(1+(\cos x - 1)\right)}^{\circledast}}_{\cos x \cdot \left(-\frac{x^2}{2}\right)}\right) \approx$$

$$\approx \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (\cos x - 1)\,\ln(\sin x) \approx \boxed{-\frac{x^3}{2} \cdot \ln(\sin x)} =$$

$$\sin x \cdot \ln(\sin x) = -\ln\left(\frac{1}{\sin x}\right) \cdot \sin x =$$

$$= \boxed{-\frac{\ln\left(\frac{1}{\sin x}\right)}{\frac{1}{\sin x}}} \to 0$$

$$-\boxed{\frac{\ln(y)}{y}} \to 0$$

PER $y \to +\infty$

$$= -\frac{x^3}{2} \cdot \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1} \cdot \boxed{\sin x \cdot \ln(\sin x)} \to 0$$

$$\approx e^{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \ln(\sin x)} \cdot \left(-\frac{x^3}{2} \cdot \ln(\sin x)\right) \approx$$

$$\approx \boxed{-\frac{x^3}{2} \cdot \ln(\sin x)}$$

$$f(x) = o(g(x))$$

$$h(x) = \tan(\tan x) - \sin(\sin x) =$$

$$= \underbrace{\tan(\tan x) - \sin(\tan x)}_{1} + \underbrace{\sin(\tan x) - \sin(\sin x)}_{2} = x^3 + o(x^2) \approx$$

$$\approx \boxed{x^3}$$

$$\frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$2 \quad \sin\Big(\overbrace{(\tan x - \sin x)}^{\alpha} + \overbrace{\sin x}^{\beta}\Big) - \sin(\sin x) =$$

$$= \sin(\tan x - \sin x)\cos(\sin x) + \cos(\tan x - \sin x)\cdot \sin(\sin x) - \sin(\sin x) =$$

$$= \Big(\overbrace{(\tan x - \sin x)}^{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} + o(x^3)\Big)\cos(\sin x) + \sin(\sin x)\Big(\cos(\tan x - \sin x) - 1\Big) =$$

$$\sin(\sin x)\left(-\frac{(\tan x - \sin x)^2}{2} + o(x^6)\right)$$

$$= \left(\frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)\cos(\sin x) + \sin(\sin x)\cdot\left(-\frac{\left(\frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)^2}{2} + o(x^6)\right)$$

$$\approx -\frac{x^7}{8} = o(x^3)$$

$$= \boxed{\frac{x^3}{2}} + o(x^3)$$

$$\underbrace{\tan(\tan x) - \sin(\tan x)}_{\boxed{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}} \approx \frac{(\tan x)^3}{2} \approx \frac{x^3}{2}$$