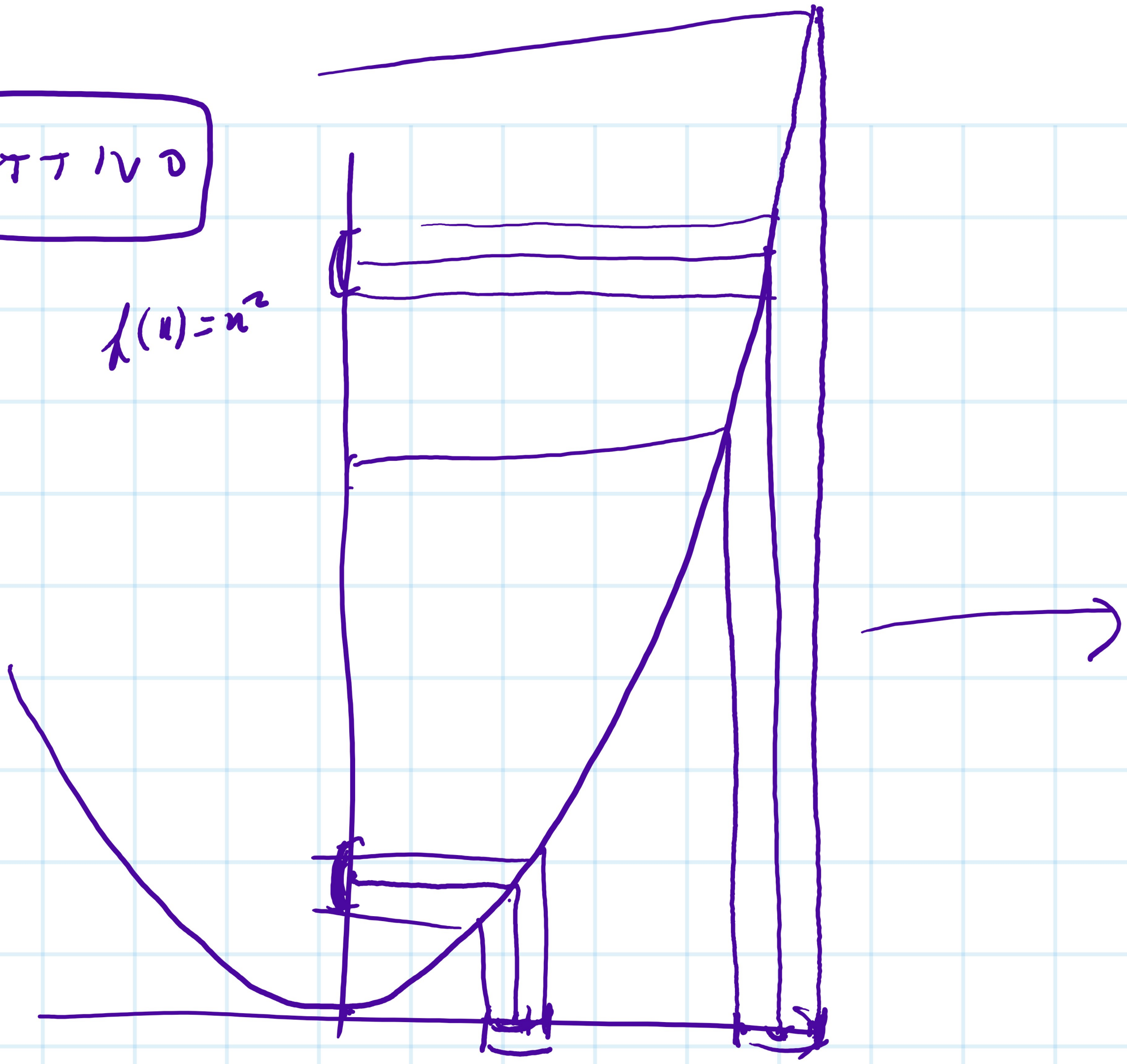
Lezione 21: Continuità Uniforme

INDICE

ES. CATTIVO



DEF. DATO $A \subset \mathbb{R}$ E $f: A \to \mathbb{R}$ DIREMO CHE f È UNIF. CONTINUA SU A

SE $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x, y \in A \;\; |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

T. HEINE-CANTOR DATI $K \subset \mathbb{R}$ COMPATTO E $f: K \to \mathbb{R}$ CONTINUA

ALLORA f È UN. CON. SU K.

DIM P.A. f NON SIA U.C. E QUINDI

"$\exists \varepsilon_0 > 0$ T.C. $\forall \delta > 0 \;\; \exists x, y \in K$ T.C. $|x-y| < \delta$ MA $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$"

ALLORA $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\} \;\; \exists^{\text{no}} \; x_n, y_n \in K$ T.C. $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ MA $\underline{|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0}$

CONSIDERO LE SUCC. (x_n) E (y_n). POICHÉ K È COMPATTO POSSO ESTRARRE DA (x_n) UNA SSUCC. (x_{n_k}) t.c. $x_{n_k} \to \bar{x} \in K$

POI PRENDO LA SSUCC. (y_{n_k}) DI (y_n) CON STESSI INDICI.

OTTENGO CHE ANCHE $y_{n_k} \to \bar{x}$ PERCHÉ:

$$0 \leq |y_{n_k} - \bar{x}| = |y_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k} - \bar{x}| \leq$$

$$\leq \underbrace{|y_{n_k} - x_{n_k}|}_{\leq \frac{1}{n_k} \,\to\, 0} + \underbrace{|x_{n_k} - \bar{x}|}_{\to\, 0}$$

QUINDI $x_{n_k} \to \bar{x}$ E $y_{n_k} \to \bar{x} \in K$ SU K f È CONTINUA

QUINDI $f(x_{n_k}) \to f(\bar{x})$

$f(y_{n_k}) \to f(\bar{x})$

$f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to 0$ ASSURDO PERCHÉ VALE SEMPRE $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0 > 0$

$\boxed{\text{DEF.}}$ DATI $A \subseteq \mathbb{R}$ E $f: A \to \mathbb{R}$ DIREMO CHE f È LIPSCHITZIANA SU A CON COSTANTE DI LIPSCHITZ L, SE:

$$\forall x, y \in A \quad |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

$\boxed{T.}$ DATI ($A \subset \mathbb{R}$ E) $f: A \to \mathbb{R}$ LIPSCH. ALLORA f È U.C.

$\boxed{DIM.}$ $\forall \varepsilon > 0$ BASTA PRENDERE $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ E SI HA:

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L|x-y| = \cancel{L} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{L}} = \varepsilon$$

$\boxed{T.}$ DATI $A \subset \mathbb{R}$ E $f, g: A \to \mathbb{R}$ UN.CON. ALLORA

$f+g: A \to \mathbb{R}$ È UN.CON.

$\boxed{DIM}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c. $|x-y| < \delta \Rightarrow |(f(x)+g(x)) - (f(y)+g(y))| < \varepsilon$?

$$|(f(x)+g(x)) - (f(y)+g(y))| \leq |f(x)-f(y)| + |g(x)-g(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\exists \delta_1 > 0$ T.C. $|x-y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$

δ_2 $< \delta_2 \Rightarrow |g(x)-g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$\boxed{T.}$ DATI $A, B \subset \mathbb{R}$ $g: A \to B$ $f: B \to \mathbb{R}$ U.C. ALLORA

$f \circ g: A \to \mathbb{R}$ È U.C.

DIM DEVO MOSTRARE CHE $\underline{\forall \varepsilon > 0}$ $\exists \delta' > 0$ t.c. $|x - y| < \delta'$

$$\overset{?}{\Downarrow}$$

$$|f(g(x)) - f(g(y))| < \varepsilon$$

POSSO PERCHÉ f È U.C. → PRENDO $\delta > 0$ t.c. $|g(x) - g(y)| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - f(g(y))| < \varepsilon$

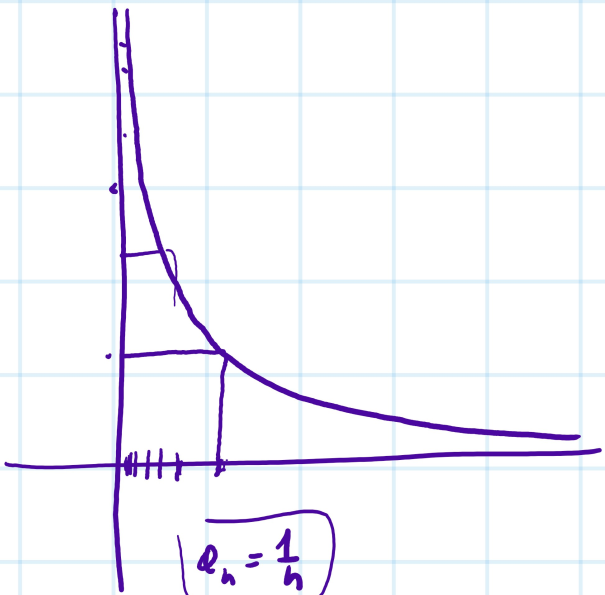
ORA PRENDO $\delta' > 0$ t.c. $|x-y| < \delta' \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \delta$

ALLORA

$$|x-y| < \delta' \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - f(g(y))| < \varepsilon$$

ES. CATTIVO

$$f(x) : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$



$a_n = \frac{1}{n}$

$$f(a_n) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$$

T. DATI $A \subset \mathbb{R}$ $f : A \to \mathbb{R}$ U.C. ALLORA SE (a_n) È DI CAUCHY IN A anche $f(a_n)$ È DI CAUCHY.

DIM VOGLIO MOSTRARE CHE:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n, m > \bar{n}$ SI HA $|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$ (??)

PRENDO $\delta > 0$ t.c. VALE U.C. PER ε PER LA f.

$\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n, m > \bar{n}$ SI HA $|a_n - a_m| < \delta$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \boxed{} \quad . \boxed{}$ E QUINDI $|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$

$(f(a_n))$ È DI CAUCHY

$\boxed{\text{T.}}$ DATI $A \subseteq \mathbb{R}$ LIMITATO ED $f: A \to \mathbb{R}$ U.C. ALLORA $f(A)$ È LIMITATO.

$\boxed{\text{DIM}}$ P.A. SIA $f(A)$ NON LIMITATO ALLORA $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ $\exists y_n \in f(A)$ t.c. $y_n \notin [-n, n]$.

CONSIDERO (y_n) E PRENDO (x_n) IN A T.C. $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(x_n) = y_n$

(x_n) È LIMITATA PERCHÉ A È LIMITATO, QUINDI POSSO ESTRARRE DA (x_n) UNA SSUCC. (x_{n_k}) CONV., QUINDI (x_{n_k}) È DI CAUCHY,

MA ESSENDO f U.C. AVREMO CHE $\underset{\displaystyle y_{n_k}}{\underset{\shortparallel}{(f(x_{n_k}))}}$ È DI CAUCHY.

QUINDI (y_{n_k}) È UNA SSUCC. LIMITATA DI (y_n) (ASSURDO

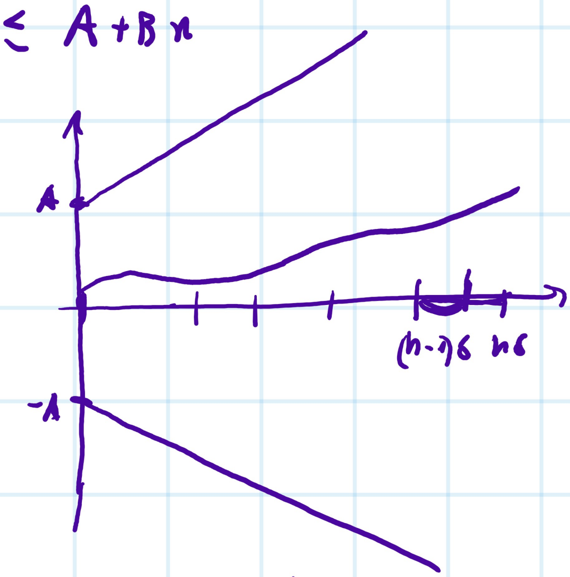
PERCHÉ OGNI SSUCC. DI (y_n) È NON LIMITATA.

QUINDI $f(A)$ NON PUÒ ESSERE NON LIMITATO.

$\boxed{T.}$ (SUBLINEARITÀ)

DATA $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$, U.C., ALLORA ESISTONO $A, B > 0$ t.c. $\forall x \in [0,+\infty)$

SI HA $\quad |f(x)| \leq A + Bx$



$\boxed{\text{DIM}}$ SIA $\varepsilon = 1$ E SIA $\delta > 0$ t.c. $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1$

SI HA CHE $|f(n\delta) - f(0)| < n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$|f(n\delta) - f(0)| = |f(n\delta) - f((n-1)\delta) + f((n-1)\delta) - f((n-2)\delta) + f((n-2)\delta) - \dots - f(\delta) + f(\delta) - f(0)|$$

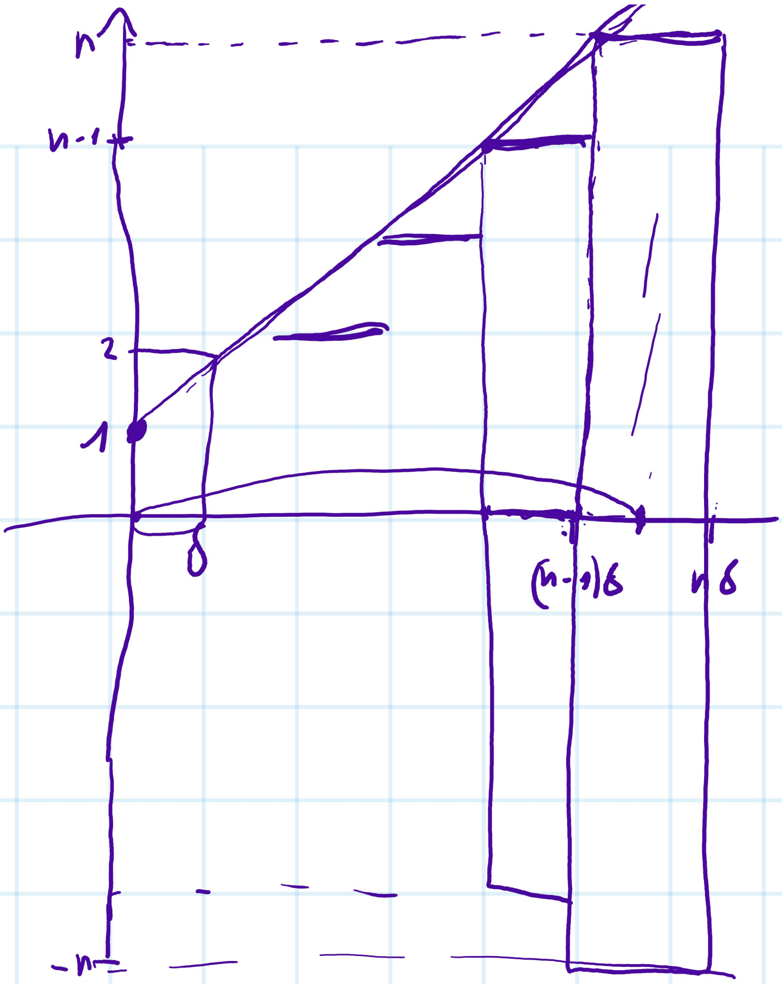
$$\leq |f(n\delta) - f((n-1)\delta)| + |f((n-1)\delta) - f((n-2)\delta)| + \dots + |f(\delta) - f(0)| <$$

$$< n$$

SE $\quad (n-1)\delta < x \leq n\delta$

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - f((n-1)\delta)| + \dots + \boxed{} \leq n.$$

$g(x) = f(x) - f(0)$



$n-1 = \left\lfloor \frac{x}{\delta} \right\rfloor$

$\boxed{n = \left\lfloor \frac{x}{\delta} \right\rfloor + 1}$

$|f(x) - f(0)| < \overset{1+}{\vee} \frac{1}{\delta} x$

$-\frac{1}{\delta}x < f(x) - f(0) < \frac{1}{\delta}x$

$f(0) - \frac{1}{\delta}x < f(x) < 1 + f(0) + \frac{1}{\delta}x$

$-|f(0)| - \frac{1}{\delta}x < f(x) < \overbrace{1 + |f(0)|}^{A} + \overbrace{\frac{1}{\delta}}^{B} x$

$|f(x) - f(0)| < n$

$|f(x) - f(0)| < \left\lfloor \frac{x}{\delta} \right\rfloor + 1 \leq$

$|f(x) - f(0)| \leq \frac{x}{\delta} + 1$

$$\boxed{|f(x)| < A + Bx}$$