Lezione 22: Continuità Uniforme II

<u>INDICE</u>

1) ESTENSIONE CONTINUA ALLA CHIUSURA

2) ESEMPI: 2.1) $\sqrt{x}$ (LEMMA INCOLLAMENTO) (<u>CONTROESEMPIO A UC ⇒ LIP</u>)

2.2) $\boxed{\frac{\sin x}{x} \quad \text{(TRUCCO DI ESTENDERE)}}$

2.3) $\sin(x^2)$

2.4) $\sin x \cdot \arctan x$

→ 2.5) $\boxed{\sin x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2}}$ (ASINTOTO ORIZZ.)

2.6) $\frac{100+\sin x}{50+\cos x}$ (PERIODICITÀ)

2.7) $x \sin x$

3) EXE TEO.: $\left(f:[0,+\infty) \to \mathbb{R} \text{ T.C. } f(\sqrt{n})=0 \ \forall n\in\mathbb{N},\ f \text{ U.C.}\right) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

$$\boxed{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \to +\infty \qquad x \to 0^+$$

T. (ESTENSIONE CONTINUA ALLA CHIUSURA)

DATI $A \subset \mathbb{R}$ $f: A \to \mathbb{R}$ UN. CONT. ALLORA $\exists! F: \bar{A} \to \mathbb{R}$

T.C. $F|_A = f$ E F È UNIF. CONT. SU $\bar{A}$

$\boxed{\text{DIM}}$

$\forall x \in \bar{A}$ PRENDO (a_n) A VALORI IN A t.c. $a_n \to x$

$F(x) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \Leftarrow$ [ESISTE PERCHÉ $a_n \to x \Rightarrow (a_n)$ DI CAUCHY $\Rightarrow f(a_n)$ È DI CAUCHY $\Rightarrow f(a_n) \to \bar{y} \in \mathbb{R}$

f È U.C.

È BEN POSTA

PERCHÉ SE $(a_n), (b_n)$ SONO DUE SUCC. t.c. $a_n \to x$ $b_n \to x$

MOSTRIAMO CHE $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n)$

PRENDO $A_n = \begin{cases} a_k & \text{SE } n = 2k \\ b_k & \text{SE } n = 2k+1 \end{cases} \Rightarrow A_n \to x$

$\Downarrow$

A_n DI CAUCHY

$\Downarrow$

f

$f(A_n)$ DI CAUCHY

$\Downarrow$

$\boxed{\lim f(a_n) = \lim f(b_n)} \Leftarrow f(\underbrace{A_{2k}}_{a_k}) \to \ell$ E $f(\underbrace{A_{2k+1}}_{b_k}) \to \ell \Leftarrow f(A_n) \to \ell$ FINITO

SE $x \in A$ PRENDO $a_n \equiv x$ E OTTENGO

$$F(x) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x) = f(x)$$

QUINDI $F|_A = f$

VOGLIO MOSTRARE CHE

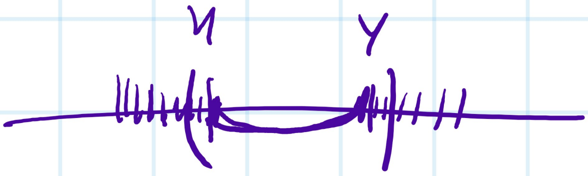
(?) $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$ T.C. $\forall x,y \in \bar{A}$ $\quad |x-y|<\delta \Rightarrow |F(x)-F(y)|<\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0$ PRENDO $\delta>0$ CHE VA BENE PER f con $\frac{\varepsilon}{2}$. E PRENDO

$(x_n), (y_n)$ A VALORI IN A T.C. $x_n \to x$ $\quad y_n \to y$

OP. LIMITI $\rightsquigarrow$ $\boxed{x_n - y_n \to x - y}$

$|\cdot\cdot|$ È CONT. $\rightsquigarrow$ $\boxed{|x_n - y_n| \to |x-y|}$ $\Longrightarrow$ $\left(|x-y|<\delta \Rightarrow \text{DEF. IN } n \ \underbrace{|x_n-y_n|<\delta}\right)$



$g(t) = |t| - \delta$

$g(x-y) < 0$

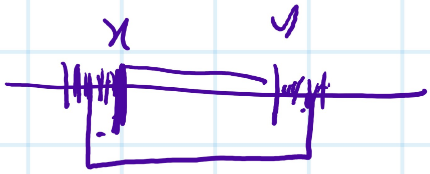
$x_n - y_n \to x - y$

$g(x_n - y_n) \to g(x-y)$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{DEF. IN } n \ |x_n-y_n|<\delta} \overset{\text{DEF. IN } n}{\Leftarrow} |x_n - y_n| - \delta < 0 \Leftarrow \text{DEF IN } n \ g(x_n - y_n) < 0$

POICHÉ $|x_n - y_n| < \delta$ $\quad \underline{|f(x_n) - f(y_n)| < \frac{\varepsilon}{2}}$



$$\Downarrow$$

$$\underline{|F(x_n) - F(y_n)| < \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{|F(x) - F(y)|} = |F(x) - F(x_n) + F(x_n) - F(y_n) + F(y_n) - F(y)| \le$$

$$\le \underbrace{|F(x) - F(x_n)|}_{\to 0} + \underbrace{|F(x_n) - F(y_n)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|F(y_n) - F(y)|}_{\to 0}$$

$F(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n)$

DEF INN

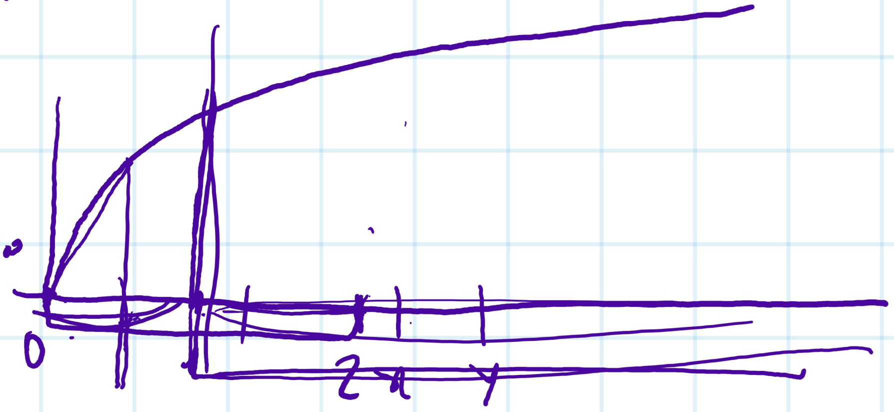
$$|F(x) - F(y)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$\boxed{\text{ES. 1}}$ $\sqrt{x}$ È U.C. SU $[0, +\infty)$

$\forall \varepsilon > 0$

δ_1 su $[0,2]$

δ_2 su $[1, +\infty)$



$\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \frac{1}{2})$

$\sqrt{x}$ È U.C. SU $[0,1]$ PER H.C.

$[1,+\infty)$

$\exists L>0 \ \forall x\,y \in [1,+\infty) \ |\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq L\,|x-y|$??

$$\exists L>0 \ \forall x\,y \in [1,+\infty) \quad \frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|}{|x-y|} \leq L$$

$$\frac{\cancel{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|}}{\cancel{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|}\cdot|\sqrt{x}+\sqrt{y}|} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}} \leq \frac{1}{2}$$

$\Downarrow$

SU $[1,+\infty)$ $\sqrt{x}$ È LIPSC. CON

COST. $\frac{1}{2}$

$\Downarrow$

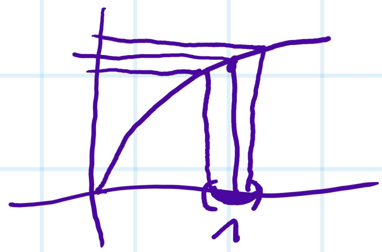
$\sqrt{x}$ È U.C. SU $[1,+\infty)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \underbrace{\exists \delta > 0 \text{ t.c. } |x-y| \leq \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon}_{?}$$

→ SO CHE $\exists \delta_1 > 0$ t.c. $|x-y| < \delta_1 \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon$ SE $x, y \in [0,1]$

→ SO CHE $\exists \delta_2 > 0$ t.c. $|x-y| < \delta_2 \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon$ SE $x, y \in [1, +\infty)$

→ PRENDO $\delta_3 > 0$ t.c. $|x-y| < \frac{\delta_3}{2} \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \frac{\varepsilon}{2}$



PRENDO $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$

H.C. LIP.

$f(x)$ È U.C. SU $[0,3]$ E SU $[1,+\infty)$

A B

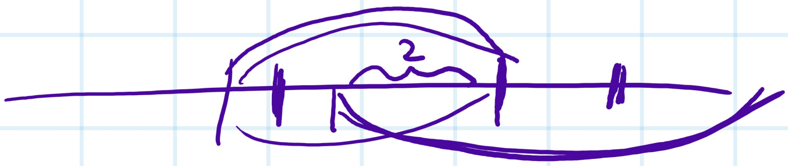
$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$ t.c. $\forall x,y \in [0,+\infty)$, $|x-y|<\delta$ $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\exists \delta_1>0$ t.c. $x,y \in [0,3]$ E $|x-y|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\exists \delta_2>0$ t.c. $x,y \in [1,+\infty)$ E $|x-y|<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$

$|x-y|<\delta$



T. (INCOLLAMENTO)

SE f È U.C. SU A, B INTERVALLI E $A \cap B$ È INT. NON DEGENERE

ALLORA f È U.C. SU $A \cup B$

ES. 2 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ È U.C. SU $(0,1]$

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{SE } x \in (0,1] \\ 1 & \text{SE } x = 0 \end{cases}$$

$F(x)$ È CONTINUA SU $[0,1]$

$\Downarrow$

$F(x)$ È U.C. SU $[0,1]$ PER H.C.

U.C. PASSA AI SOTTOINSIEMI

$\Downarrow$

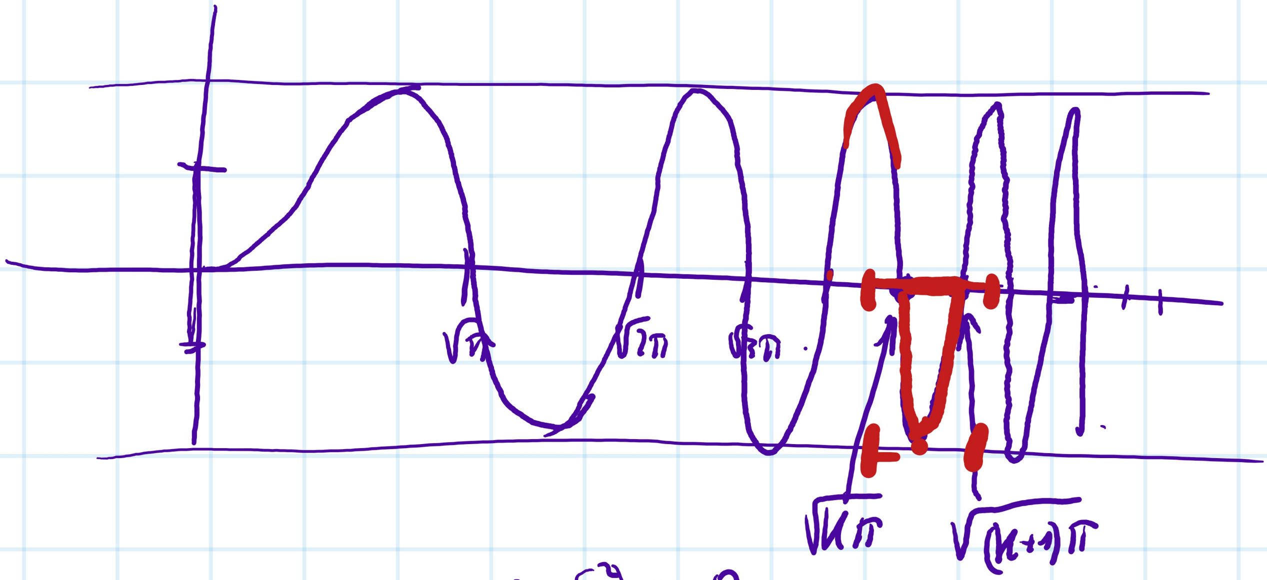
$F(x)$ È U.C. SU $(0,1]$

$\Downarrow$

$f(x)$ È U.C. SU $(0,1]$

$f(x) = \sin(x^2)$

$g(x) = \frac{\sin(x^2)}{1+x^2}$



$$\sin(x^2) = 0$$

$$x^2 = k\pi$$

$$x = \sqrt{k\pi}$$

$$\frac{\sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi}}{1} = \frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi} + \sqrt{k\pi}} \xrightarrow{k \to +\infty} 0$$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$

$\forall \delta > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi} < \delta$

PER $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$ $f(x)$ ASSUME

TUTTI I VALORI TRA 0 E 1 QUINDI $\exists$ non $x_1, x_2 \in$

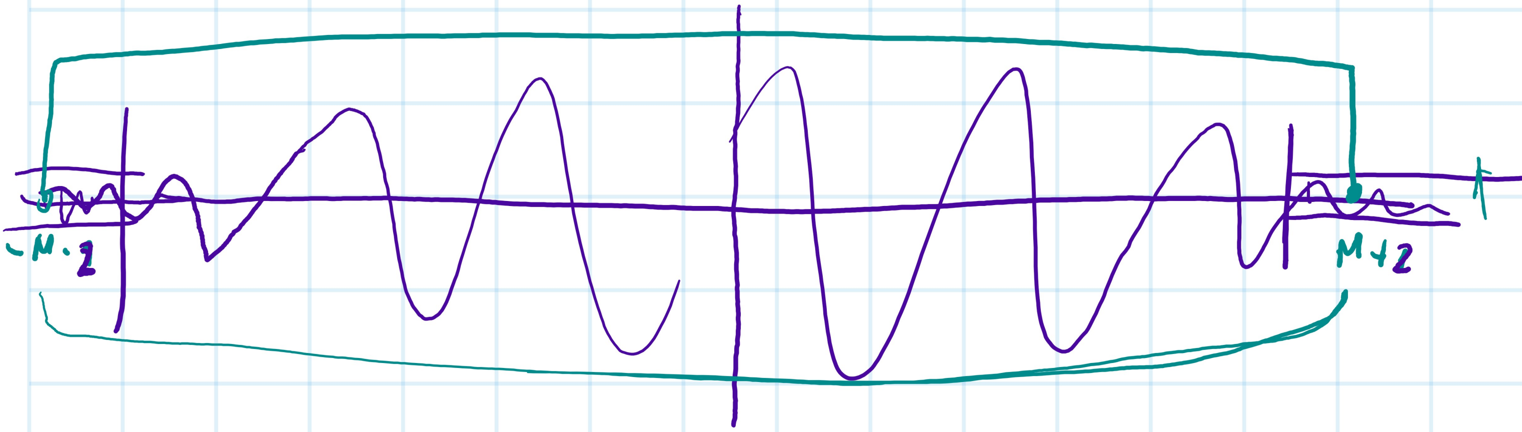
E QUINDI T.C. $|x_1 - x_2| < \delta$ t.c. $|f(x_1) - f(x_2)| > \frac{1}{2}$

ES

$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{1+x^2}$ È U.C. SU $\mathbb{R}$

$f(x) \to 0$ SE $x \to \pm\infty$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$



TROVO $M > 0$ TC. $|x| \geq M$ $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$f(x)$ È U.C. SU $[-M-2, M+2]$ PER H.C.

QUINDI $\exists \delta_1 > 0$ t.c. $|x-y| < \delta_1$ E $x, y \in [-M-2, M+2]$

$$\Downarrow$$

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$\delta = \text{MIN} \{ \delta_1, 1 \}$